Bollettino Unione Matematica Italiana

Giovanni Crupi

Su una nuova equazione delle onde piane magneto-idrodinamiche propagantisi in una generica direzione ed una sua applicazione.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.2, p. 173–178.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_2_173_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1958.

Su una nuova equazione delle onde piane magneto-idrodinamiche propagantisi in una generica direzione ed una sua applicazione.

Nota di GIOVANNI CRUPI (a Messina)

Sunto. - *Scopo di questa Nota è di dimostrare che la ricerca di onde piane magneto-idrodinamiche, propagantisi in una direzione generica* u, *si può ricondurre alla integrazione di un'equazione del terzo ordine. L'uso del sistema di* EULER-MINKOWSKI *ed il contributo di* $\dot{\boldsymbol{D}}$ *permettono di stabilire l'esistenza di onde permanenti.*

Summary. - *The aim of this article is to show that the research of magneto-hydrodynamic plane waves extending in an generical direction* u, *re-conducts to the integration of a third order equation. By the use of the* EULER-MINKOWSKI *system and the contribution of* $\boldsymbol{D}$ *it is possible to prove the existence of permanent waves.*

In un lavoro del 1957 [1], ho considerato un fluido conduttore, incomprimibile, mobile in un campo magnetico omogeneo, esterno, di induzione $\boldsymbol{B}_0$ ed ho caratterizzato, sulla base del sistema di EULER-MINKOWSKI, le onde piane magneto-idrodinamiche, propagantisi in una direzione generica $\boldsymbol{u}$, diversa da quella del campo esterno impresso.

Trascurando la densità di corrente di spostamento $\dot{\boldsymbol{D}}$, ho dimostrato, tra l'altro, che le grandezze caratteristiche del fenomeno soddisfano ad una medesima risolvente del terzo ordine.

Scopo della presente Nota è quello di approfondire la ricerca di tali onde, nel caso di campi rapidissimamente variabili, trattenendo anche il contributo della corrente di spostamento.

Dimostrerò che in questo caso le grandezze caratteristiche $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{D}$ soddisfano alla nuova equazione

$$m \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial t} + V^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \varepsilon' \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t^3} - (1 + q) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

$m = \dfrac{c^2}{\mu \sigma}$, $V^2 = \dfrac{B_0{}^2}{\rho \mu}$, $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{c}$, $q = \dfrac{\varepsilon \mu - \lambda c}{c^2} V^2 \cos^2 \theta$, la quale differisce per i termini $-\varepsilon' \dfrac{\partial^3 \Phi}{\partial t^3}$ e $-q \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$ da quella a cui sono pervenuto, trascurando $\dot{\boldsymbol{D}}$ nel lavoro citato.

(1) CRUPI G., *Sulle onde piane magneto-idrodinamiche propagantisi in una generica direzione*, Boll. U. M. I. Vol. 12, pp. 604-609, 1957.

Mi permetto di segnalare quest'equazione, perchè credo possa costituire un utile strumento per eventuali studi sulle onde piane magneto-idrodinamiche nei casi in cui non si voglia, o non si possa, tralasciare $\dot{\boldsymbol{D}}$.

Infine, mi limiterò ad utilizzarla per mostrare come il contributo della corrente di spostamento e l'uso del sistema di EULER-MINKOWSKI permettono di stabilire l'esistenza di onde piane armoniche, *non smorzate*, propagantisi in una generica direzione u, mentre simili onde sono escluse dal sistema di EULER-MAXWELL.

Il sistema di EULER-MINKOWSKI ([2]), che sarà posto a fondamento di questa ricerca, si ottiene associando le equazioni dell'idrodinamica di EULER con quelle dell'elettrodinamica dei mezzi in moto di MINKOWSKI, approssimate ai termini di primo ordine in $\beta = v/c$.

Il quadro delle equazioni è dato, nel nostro caso, da

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{v}} + (\boldsymbol{v} \ \text{grad})\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{F} + \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{1}{c}\boldsymbol{I} \wedge \boldsymbol{B} - \text{grad}\ p\right) \\ \dot{\boldsymbol{B}} = -c \ \text{rot}\ \boldsymbol{E} \\ \dot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{I} = c\ \text{rot}\ \boldsymbol{H} \end{cases} \qquad \left(\cdot \equiv \frac{\partial}{\partial t},\ \lambda = \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}\right)$$

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \boldsymbol{E} = \dfrac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon} - \dfrac{\lambda}{\varepsilon\mu}\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{H} = \dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu} + \dfrac{\lambda}{\varepsilon\mu}\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{I} = \sigma\left(\boldsymbol{E} + \dfrac{1}{c}\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}\right) \end{cases} \qquad \text{(III)} \quad \begin{cases} \text{div}\ \boldsymbol{v} = 0 \\ \text{div}\ \boldsymbol{D} = 0 \\ \text{div}\ \boldsymbol{B} = 0 \end{cases}$$

dove $\boldsymbol{v}$ è la velocità della generica particella, $\boldsymbol{F}$ la forza non elettromagnetica agente sul fluido, $\boldsymbol{I}$ la densità di corrente elettrica, $\boldsymbol{B}$ l'induzione magnetica, $\boldsymbol{E}$ l'intensità del campo elettrico, $\boldsymbol{D}$ lo spostamento elettrico, $\boldsymbol{H}$ l'intensità magnetica, c la velocità della luce nel vuoto, ρ la densità del fluido, p la pressione, σ la conducibilità, ε la costante dielettrica e μ la permeabilità magnetica.

Ponendo $\lambda = 0$ nelle precedenti equazioni, si ottiene il sistema di EULER-MAXWELL ([3]), introdotto dal Prof. ALFVÉN nell'istituire le prime ricerche sui fenomeni magneto-idrodinamici.

([2]) CARINI G., *Sulle equazioni della magneto-idrodinamica*, «Rend. Lincei», ser. VIII, vol. XXI, fasc. VI (1956).

([3]) H. ALFVÉN, *On the Existence...* «Arkiv für matematik, astronomi, fysik», Bd. 29 N. 2, 1942. *Cosmical elettrodynamics*, cap. IV, Oxford University Press. 1950.

1. Conveniamo di assumere il sistema inerziale di riferimento $S(Oxyzt)$ con l'asse Oz coincidente in direzione e verso con l'induzione $\boldsymbol{B}_0$ del campo impresso. Nel seguito indicheremo con θ l'angolo che il versore $\boldsymbol{u}$ $(a_1, a_2, a_3 = \cos\theta)$ della direzione di propagazione forma con $\boldsymbol{B}_0$.

Le grandezze caratteristiche, associate alle onde piane propagantisi nella direzione $\boldsymbol{u}$, sono, come è ovvio, funzioni di x, y, z, t, anzi di

$$\zeta = k\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{u} - \omega t \tag{1}$$

dove $\boldsymbol{r} = P - O$, $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{u}$ è il vettore di propagazione.

Tenendo conto della (1), mediante considerazioni già esposte [1], dalle (III) seguono

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} = 0, \qquad \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u} = 0, \qquad \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u} = 0, \tag{2}$$

essendo $\boldsymbol{b}$ il contributo all'induzione magnetica del campo indotto.

Richiamiamo, poichè ci saranno utili, le seguenti identità

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{rot}\,(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}) \equiv B_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z} \\ &\operatorname{rot}\,(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{D}) \equiv 0 \\ &\boldsymbol{B} \wedge \operatorname{rot}\,\boldsymbol{B} \equiv \frac{1}{2}\operatorname{grad}\,B^2 - B_0 \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial z}, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

che sono state stabilite nella Nota citata.

Adesso, dalle (I), tralasciando $\boldsymbol{F}$, eliminando $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ ed $\boldsymbol{I}$ per mezzo delle equazioni vettoriali (II), e tenendo conto delle (3), otteniamo il sistema

$$\left\{\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{v}} + \frac{1}{2\rho\mu}\operatorname{grad}\,B^2 - \frac{B_0}{\rho\mu}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial z} + \frac{1}{\rho c}\dot{\boldsymbol{D}} \wedge \boldsymbol{B} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}\,p \\ &\dot{\boldsymbol{B}} = -\frac{c}{\varepsilon}\operatorname{rot}\,\boldsymbol{D} + \frac{c\lambda}{\varepsilon\mu} B_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z} \\ &\dot{\boldsymbol{D}} + \frac{\sigma}{\varepsilon}\left(\boldsymbol{D} + \frac{\lambda_1}{c}\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}\right) = \frac{c}{\mu}\operatorname{rot}\,\boldsymbol{B} \qquad \lambda_1 = \frac{\varepsilon\mu - \lambda c}{\mu} \end{aligned}\right. \tag{4}$$

A questo punto il problema matematico consiste nella determinazione delle grandezze $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$ e p.

Moltiplicando ambo i membri della prima delle (4) vettorialmente per $\boldsymbol{u}$, osservando che l'operatore grad si riduce a $k\boldsymbol{u}\frac{d}{d\zeta}$, dopo la (1), e tenendo presenti le (2), si deduce

$$(\boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{u})\, \dot{\boldsymbol{D}} = \rho c \left(- \boldsymbol{u} \wedge \dot{\boldsymbol{v}} + \frac{B_0}{\rho\mu} \boldsymbol{u} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial z} \right) \tag{5}$$

Se $\boldsymbol{u}$ si sceglie ortogonale a $\boldsymbol{B}_0$, dalla (5) si ha

$$\boldsymbol{u} \wedge \dot{\boldsymbol{v}} = 0 \tag{6}$$

D'altra parte, dalla prima delle (2), derivando rispetto a t, si ottiene

$$\boldsymbol{u} \cdot \dot{\boldsymbol{v}} = 0 \tag{7}$$

Ma, affinchè le (6) e (7) possano coesistere, è necessario che sia $\dot{\boldsymbol{v}} = 0$, e ciò non ha senso in un fenomeno a carattere ondoso. Dunque, non si può parlare di onde piane magneto-idrodinamiche in direzione ortogonale al campo impresso. Questa previsione è la stessa di quella che si ha nel caso in cui si trascuri $\dot{\boldsymbol{D}}$.

Nel seguito supporremo $\boldsymbol{u}$ non ortogonale a $\boldsymbol{B}_0$.

Moltiplicando vettorialmente per $\boldsymbol{u}$ la terza delle (4), e tenendo presente che, in virtù della (1), vale l'identità $\boldsymbol{u} \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{B} \equiv - \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial z}$, si ottiene

$$\boldsymbol{u} \wedge \dot{\boldsymbol{D}} = - \frac{\sigma}{\varepsilon} \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{D} - \frac{\sigma\lambda_1}{\varepsilon c} (\boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{u}) \boldsymbol{v} - \frac{c}{\mu \cos\theta} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial z}. \tag{8}$$

Eliminando $\dot{\boldsymbol{D}}$ da questa, in virtù della (5), si ricava

$$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{D} = - \frac{\varepsilon\rho c}{\sigma B_0 \cos\theta} \dot{\boldsymbol{v}} - \frac{\lambda_1 B_0 \cos\theta}{c} \boldsymbol{v}. \tag{9}$$

Dalle (8) e (9) si deduce subito la seguente equazione in $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{B}$

$$\frac{\varepsilon\mu\rho}{\sigma B_0} \ddot{\boldsymbol{v}} + \frac{\rho c\mu + \mu\lambda_1 \frac{B_0^2}{c} \cos^2\theta}{c B_0} \dot{\boldsymbol{v}} = \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial z}. \tag{10}$$

Analogamente, moltiplicando la seconda delle (4) vettorialmente per $\boldsymbol{u}$, si ha

$$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial z} = \frac{\varepsilon \cos \theta}{c} \boldsymbol{u} \wedge \dot{\boldsymbol{B}} - \frac{\lambda B_0 \cos \theta}{\mu} \boldsymbol{u} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}$$

ed eliminando $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial z}$ da quest' ultima e dall' equazione che si ottiene derivando la (9) rispetto a z si deduce una nuova equazione in $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{B}$

$$B_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z} + \frac{\rho c^2}{\sigma B_0 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t \partial z} = \dot{\boldsymbol{B}} . \tag{11}$$

Infine, eliminando $\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t \partial z}$ dalle equazioni che si ottengono moltiplicando la (10) per $\frac{\partial}{\partial t}$ e la (11) per $\frac{\partial}{\partial z}$, ed osservando che $\frac{\partial^3 \boldsymbol{v}}{\partial z^2 \partial t} = \cos^2 \theta \Delta \dot{\boldsymbol{v}}$ resta stabilito che $\boldsymbol{v}$ soddisfa alla seguente equazione del terzo ordine

$$m \frac{\partial (\Delta \boldsymbol{v})}{\partial t} + V^2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial z^2} - \varepsilon' \frac{\partial^3 \boldsymbol{v}}{\partial t^3} - (1 + q) \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t^2} = 0 \tag{12}$$

dove

$$m = \frac{c^2}{\mu \sigma}, \quad V^2 = \frac{B_0^2}{\rho \mu}, \quad \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\sigma}, \quad q = \frac{\varepsilon \mu - \lambda c}{c^2} V^2 \cos^2 \theta. \tag{13}$$

Si dimostra che alla stessa equazione soddisfano anche le altre due grandezze $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{D}$.

Se $\boldsymbol{u}$ si sceglie coincidente con $\boldsymbol{B}_0$, la (12) si particolarizza in un' equazione già nota (4).

La (12) partecipa del contributo della corrente di spostamento per la presenza dei due termini $- \varepsilon' \frac{\partial^3 \boldsymbol{v}}{\partial t^3}$ e $- q \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t^2}$ i quali mancano nell' equazione

$$m \frac{\partial (\Delta \boldsymbol{v})}{\partial t} + V^2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t^2} = 0,$$

a cui, come ho dimostrato nella Nota «Sulle onde piane magneto-idrodinamiche propagantisi in una generica direzione», soddisfano le grandezze, se si trascura $\dot{\boldsymbol{D}}$.

(4) Crupi G., *Sulle onde piane magneto-idrodinamiche.* «Boll. U. M. I.» vol. 12, pp. 439-442, 1957.

Notiamo, inoltre, che il contributo caratteristico del sistema di EULER-MINKOWSKI si manifesta nel quarto coefficiente della (12), perchè q dipende da λ, tramite la quarta delle (13).

2. Applicando la (12), mi propongo di dimostrare l'esistenza di onde armoniche, non smorzate, propagantisi nella generica direzione $\boldsymbol{u}$.

Tentiamo di soddisfare alla (12) con una

$$v = v_0 e^{k\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u} + i\omega t} , \tag{13}$$

dove v_0 è un vettore costante ed ortogonale ad $\boldsymbol{u}$, ω è un parametro reale prefissato e k un parametro da determinarsi in modo opportuno.

Sostituendo la (13) nella (12) e generalizzando le considerazioni già fatte in altra Nota ([4]), a proposito delle onde permanenti propagantisi nella direzione del campo impresso $\boldsymbol{B}_0$, si trova che per

$$B_0^2 \cos^2\theta = c^2 \frac{\mu}{\varepsilon\mu - 1}\rho \tag{14}$$

il parametro k è suscettibile dei soli valori

$$k = \mp \frac{\omega}{W} i \tag{15}$$

con

$$W = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} . \tag{16}$$

La (14) esprime la condizione a cui deve soddisfare B_0 affinchè nella direzione $\boldsymbol{u}$ si abbiano onde armoniche permanenti. La (16) esprime che la velocità di propagazione di queste onde è indipendente dalla direzione $\boldsymbol{u}$ e coincide con quella della luce nei mezzi dielettrici, in quiete, isotropi ed omogeni. Il doppio segno della (15) sta ad indicare che nella direzione di versore $\boldsymbol{u}$ possono esistere onde progressive e retrograde.

Per $\theta = 0$ la (14) si particolarizza in una formula già stabilita nella Nota ricordata sopra ([4]).

Il sistema di EULER-MAXWELL esclude l'esistenza di onde non smorzate: ciò si dimostra ponendo $\lambda = 0$ nella (12).