Bollettino
Unione Matematica Italiana

Ettore Picasso

Invarianti proiettivo-differenziali di contatto di una superficie di S_4.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.2, p. 160–172.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_2_160_0>

Invarianti proiettivo-differenziali di contatto di una superficie di S_4.

Nota di ETTORE PICASSO (a Cagliari)

Sunto. - *In analogia col caso dello spazio ordinario* (BOMPIANI), *le forme fondamentali e alcuni elementi relativi a curve di una superficie di* S_4, *vengono geometricamente definiti mediante termini principali di birapporti infinitesimi. Per superficie di contatto si assumono due particolari quadriche di carattere intrinseco alla superficie ed invarianti per collineazioni* (*quadriche di* LIE).

Summary. - *With analogy to the case of* S_3 *space* (BOMPIANI), *the fundamental forms and some methods for curves on* S_4-*surfaces are geometrically defined by means of principal terms of infinitesimal biratios. For contact-surfaces, two particular quadrics are assumed* (LIE'*s quadrics*), *who have intrinsec character and are invariant under collineations.*

1. Scopo della ricerca. – Nella teoria degli invarianti di contatto di una superficie σ di S_3, per render conto del significato geometrico degli elementi fondamentali (elemento lineare proiettivo, forme normali di FUBINI, invarianti del 2° e 3° ordine di una curva tracciata su σ), il BOMPIANI (1) utilizza, come è noto, la quadrica di LIE associata a ciascun punto di σ o, più in generale, il sistema di quadriche contenenti come generatrici le tangenti asintotiche.

Per le superficie di S_4, è possibile ricostruire secondo le medesime vedute le forme differenziali di FUBINI–BOMPIANI ed è anche possibile determinare il significato geometrico di elementi invarianti relativi a curve tracciate su σ, qualora si associ a ciascun punto della superficie il sistema di quadriche che la tagliano lungo una linea per cui il punto considerato su σ è un punto quadruplo. A questo sistema, già utilizzato dal FUBINI (2) nella

(1) BOMPIANI, *Determinazioni proiettivo-differenziali relative ad una snperficie dello spazio ordinario*, « Atti della R. Accademia di Torino », Vol. 59; pag. 409.

BOMPIANI, Appendice II della *Geom. Proiett Diff.*, FUBINI-ČECH, Zanichelli.

(2) FUBINI-ČECH, *Geom. Proiett. Diff.*, Zanichelli, Bologna, Vol. II-110, B, pag. 641.

determinazione del significato geometrico della seconda forma fondamentale F_5, appartengono due quadriche particolari di natura intrinseca alla superficie ed invarianti per collineazioni, che si possono assumere quali quadriche di Lie dell'attuale trattazione ([3]).

2. Sistemi di riferimento e calcolo di differenziali. – In relazione al sistema di equazioni differenziali che definiscono la superficie (che supporremo a punti planari non parabolici) in coordinate curvilinee coniugate

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
x_{uv} &+ ax_u + bx_v + cx = 0\\
x_{uuu} &= \alpha_1 x_{uu} + \alpha_2 x_{vv} + \alpha_3 x_u + \alpha_4 x_v + \alpha_5 x\\
x_{vvv} &= \beta_1 x_{uu} + \beta_2 x_{vv} + \beta_3 x_u + \beta_4 x_v + \beta_5 x
\end{aligned}
$$

i punti di S_4 verranno riferiti alla piramide invariante di vertici

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
&x\,; \qquad \bar{z} = x_u + bx\,; \qquad z = x_v + ax\,;\\
&\underset{3}{C} = x_{uu} + \frac{\beta_3}{\beta_1} x_u + \left(b\frac{\beta_3}{\beta_1} + b_u - b^2\right) x\,;\\
&\underset{4}{C} = x_{vv} + \frac{\alpha_4}{\alpha_2} x_v + \left(a\,\frac{\alpha_4}{\alpha_2} + a_v - a^2\right) x
\end{aligned}
$$

sicchè il punto $\lambda_0 x + \lambda_1 z + \lambda_2 \bar{z} + \lambda_3 \underset{3}{C} + \lambda_4 \underset{4}{C}$ si potrà ritenere individuato dalle sue coordinate locali λ_χ.

Indicheremo con

$$
(3)\qquad \frac{d^i x}{ds^i} = L_i x + M_i z + N_i \bar{z} + R_i \underset{3}{C} + T_i \underset{4}{C} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots
$$

i differenziali successivi lungo una curva di σ. Le espressioni L_i M_i N_i R_i T_i si calcolano mediante le (1). Ove si usino derivate covarianti e differenziali controvarianti rispetto alla forma $F_2 = 2g_{12}dudv$ e si introducano le abbreviazioni

$$
\theta_u = \frac{\partial \log g_{12}}{\partial u} \qquad \theta_v = \frac{\partial \log g_{12}}{\partial v}\,,
$$

([3]) Per le definizioni e le proprietà delle due quadriche, si vedano le due note: E. Picasso, *Su particolari correlazioni definite dagli iperpiani cuspidali ...*, « Rend. Sem. Facoltà di Scienze dell'Università di Cagliari », Vol. XXVI, fasc. 3-4, 1956; Vol. XXVII, fasc. 3-4, 1957.

i termini che necessitano per il seguito hanno i valori

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
&L_1=\left(-b\frac{du}{ds}-a\frac{dv}{ds}\right)ds\,;\; M_1=\frac{du}{ds}ds\,;\; N_1=\frac{dv}{ds}ds\,;\; R_1=0\,;\; T_1=0\\
&M_2=\left(\frac{\delta^2 u}{ds}+\theta_u\frac{du^2}{ds^2}-\frac{\beta_3}{\beta_1}\frac{du^2}{ds^2}-2a\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}\right)ds^2\\
&N_2=\left(\frac{\delta^2 v}{ds^2}+\theta_v\frac{dv^2}{ds^2}-\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\frac{dv^2}{ds^2}-2b\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}\right)ds^2\\
&R_2=\frac{du^2}{ds^2}ds^2\,;\qquad T_2=\frac{dv^2}{ds^2}ds^2\\
&R_3=\left[3\frac{du}{ds}\frac{\delta^2 u}{ds^2}+(\alpha_1+3\theta_u)\frac{du^3}{ds^3}-3a\frac{du^2}{ds^2}\frac{dv}{ds}+\beta_1\frac{dv^3}{ds^3}\right]ds^3\\
&T_3=\left[3\frac{dv}{ds}\frac{\delta^2 v}{ds^2}+\alpha_2\frac{du^3}{ds^3}-3b\frac{du}{ds}\frac{dv^2}{ds^2}+(\beta_2+3\theta_v)\frac{dv^3}{ds^3}\right]ds^3\\
&M_3=\frac{\delta^3 u}{ds^3}+\left(3\theta_u\frac{du}{ds}-3a\frac{dv}{ds}-3\frac{\beta_3}{\beta_1}\frac{du}{ds}\right)\frac{\delta^2 u}{ds^2}-3a\frac{du}{ds}\frac{\delta^2 v}{ds^2}+\\
&\qquad\qquad+m_{rst}\frac{du^r}{ds}\frac{du^s}{ds}\frac{du^t}{ds}\\
&N_3=\frac{\delta^3 v}{ds^3}+\left(3\theta_v\frac{dv}{ds}-3b\frac{du}{ds}-3\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\frac{dv}{ds}\right)\frac{\delta^2 v}{ds^2}-3b\frac{dv}{ds}\frac{\delta^2 u}{ds^2}+\\
&\qquad\qquad+n_{rst}\frac{du^r}{ds}\frac{du^s}{ds}\frac{du^t}{ds}
\end{aligned}\right.$$

Per un punto qualunque X prossimo ad x situato sulla curva per x, si avrà

$$(5)\qquad X=x+\frac{dx}{ds}ds+\frac{1}{2}\frac{d^2x}{ds^2}ds^2+\frac{1}{3\,!}\frac{d^3x}{ds^3}ds^3+\ldots$$

e nel sistema (2)

$$(6)\qquad X=L_{0123\ldots}x+M_{123\ldots}z+N_{123\ldots}\bar{z}+R_{23\ldots}\underset{3}{C}+T_{23\ldots}\underset{4}{C}$$

ove manifestamente

$$(7)\qquad \begin{aligned}
L_{0123\ldots}&=I+L_1+\frac{1}{2}L_2+\frac{1}{6}L_3+\ldots\\
M_{123\ldots}&=M_1+\frac{1}{2}M_2+\frac{1}{6}M_3+\ldots\\
N_{123\ldots}&=N_1+\frac{1}{2}N_2+\frac{1}{6}N_3+\ldots\\
R_{23\ldots}&=\frac{1}{2}R_2+\frac{1}{6}R_3+\ldots\\
T_{23\ldots}&=\frac{1}{2}T_2+\frac{1}{6}T_3+\ldots\,.
\end{aligned}$$

3. Quadriche di Lie. Forme invarianti. - In prossimità di x valgono su σ gli sviluppi approssimati seguenti [4]

$$(8)\qquad \begin{aligned} 2\lambda_3 &= \lambda_1^2 + 2\beta_1\lambda_2\lambda_4 + \dots \\ 2\lambda_4 &= \lambda_2^2 + 2\alpha_2\lambda_1\lambda_3 + \dots . \end{aligned}$$

Le quadriche che tagliano σ secondo una linea, dotata di un punto quadruplo in x, sono conseguentemente quelle del sistema

$$(9)\qquad \begin{aligned} m(2\lambda_0\lambda_4 - \lambda_2^2 - 2\alpha_2\lambda_1\lambda_3) + n(2\lambda_0\lambda_3 - \lambda_1^2 - 2\beta_1\lambda_2\lambda_4) + \\ + p\lambda_3^2 + 2q\lambda_3\lambda_4 + r\lambda_4^2 = 0. \end{aligned}$$

Le due quadriche di questo sistema

$$(10)\qquad Q_1(\lambda) \equiv 2\lambda_0\lambda_4 - \lambda_2^2 - 2\alpha_2\lambda_1\lambda_3 + \Omega\lambda_3^2 + \Gamma\lambda_4^2 = 0$$

$$(11)\qquad Q_2(\lambda) \equiv 2\lambda_0\lambda_3 - \lambda_1^2 - 2\beta_1\lambda_2\lambda_4 + \Gamma'\lambda_3^2 + \Omega'\lambda_4^2 = 0$$

corrispondenti a $n = q = 0$, $p = \Omega$, $r = \Gamma$ e $m = q = 0$, $p = \Gamma'$, $r = \Omega'$, ove si sono usate le notazioni

$$\begin{aligned} \Omega &= \alpha_2\left(2b - \frac{\beta_3}{\beta_1} - \frac{\partial \log k}{\partial u}\right) \\ \Gamma &= \left(\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\right)_v - \left(\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\right)^2 - \beta_2\left(\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\right) + \beta_4 + a\frac{\alpha_4}{\alpha_2} + a_v - a^2 \\ \Omega' &= \beta_1\left(2a - \frac{\alpha_4}{\alpha_2} - \frac{\partial \log h}{\partial v}\right) \\ \Gamma' &= \left(\frac{\beta_3}{\beta_1}\right)_u - \left(\frac{\beta_3}{\beta_1}\right)^2 - \alpha_1\left(\frac{\beta_3}{\beta_1}\right) + \beta_3 + b\frac{\beta_3}{\beta_1} + b_u - b^2 \end{aligned}$$

in cui h e k sono gli invarianti di LAPLACE della (1), risultano intrinsecamente legate alla superficie e invarianti per collineazioni.

Sia $Y = \nu_0 x + \nu_1 z + \nu_2 \bar{z} + \nu_3 \underset{3}{C} + \nu_4 \underset{4}{C}$, un qualunque punto dello spazio non appartenente a nessun S_3 coordinato. La retta che lo congiunge ad X sega la quadrica $Q_1(\lambda) = 0$ in due punti che si ottengono ponendo in $\tau Y + X$ l'una o l'altra radice dell'equazione

$$Q_1(Y)\tau^2 + 2Q_1(XY)\tau + Q_1(X) = 0.$$

Allo stesso modo l'equazione

$$Q_2(Y)\tau^2 + 2Q_2(XY)\tau + Q_2(X) = 0$$

[4] FUBINI-ČECH, *G. P. D.*, Vol. II; pag. 642.

determina i valori di τ che sostituiti in $\tau Y + X$ forniscono le intersezioni di t con la quadrica $Q_2(\lambda) = 0$. Le intersezioni prossime ad X corrispondono a

$$X_1) \qquad \tau_1 = -\frac{Q_1(X)}{2Q_1(XY)}\,; \qquad\qquad X_2) \qquad \tau_2 = -\frac{Q_2(X)}{2Q_2(XY)}$$

ossia a

$$\tau_1 = \frac{1}{3\nu_4}\left[\alpha_2 du^3 - \frac{1}{2}\left(\beta_2 + 3\frac{\alpha_4}{\alpha_2} - 3a\right)dv^3\right] + \dots \tag{12}$$

$$\tau_2 = \frac{1}{3\nu_3}\left[\beta_1 dv^3 - \frac{1}{2}\left(\alpha_1 + 3\frac{\beta_3}{\beta_1} - 3b\right)du^3\right] + \dots \tag{13}$$

mentre le intersezioni C_1 C_2 di t coi due *iperpiani cuspidali* $\lambda_4 = 0$ e $\lambda_3 = 0$ corrispondono a

$$\tau_3 = -\frac{1}{2\nu_4}dv^2 + \dots \qquad \tau_4 = -\frac{1}{2\nu_3}du^2 + \dots .$$

I due birapporti (XC_1X_1P) e (XC_2X_2P) ove P è un qualsiasi punto di t, hanno come termine principale per $X \to x$, rispettivamente

$$\frac{2}{3}\,\frac{\alpha_2 du^3 - \frac{1}{2}\left(\beta_2 + 3\frac{\alpha_4}{\alpha_2} - 3a\right)dv^3}{dv^2} \tag{14}$$

$$\frac{2}{3}\,\frac{\beta_1 dv^3 - \frac{1}{2}\left(\alpha_1 + 3\frac{\beta_3}{\beta_1} - 3b\right)du^3}{du^2}\,. \tag{15}$$

I termini principali dei due birapporti ora detti costruiti mediante le due quadriche di Lie, quando X $\to$ x *su una curva la cui tangente non coincida con le tangenti principali, costituiscono due invarianti proiettivi della superficie che non dipendono né dalla trasversale* t *per* X *né dal punto* P *su di essa, ma soltanto dalla tangente alla curva su cui si muove* X.

Qualora $Q_1(\lambda) = 0$ ovvero $Q_2(\lambda) = 0$ si assumano quali quadriche assoluto di una metrica proiettiva non-euclidea e P coincida con l'ulteriore intersezione delle due quadriche con t, si ha come per S_3:

Il birapporto il cui logaritmo misura la distanza proiettiva dall'iperpiano cuspidale $\lambda_4 = 0$ (*ovvero* $\lambda_3 = 0$) *di un punto* X *situato su una curva uscente da* x *calcolata su una trasversale generica per* X, *quando si assuma come assoluto la quadrica* $\mathrm{Q}_1(\lambda) = 0$ (*ovvero* $\mathrm{Q}_2(\lambda) = 0$), *non dipende dalla trasversale per* X, *ma soltanto dalla curva scelta ed ha per termine principale il valore* (14) (*ovvero* (15)).

È evidente per la loro costruzione l'invarianza delle (14) e (15) sia rispetto alla normalizzazione delle coordinate sia rispetto ad un qualsiasi mutamento del sistema curvilineo sulla superficie. Del resto ciò è confermato dal modo di variare dei coefficienti delle equazioni (1) che compaiono nelle (14) e (15) per le trasformazioni

$$x = \rho(uv)\bar{x} \qquad \bar{u} = \varphi(u) \qquad \bar{v} = \psi(v) \tag{16}$$

per le quali risulta

$$\bar{\alpha}_2 = \alpha_2 \qquad \bar{\beta}_2 = \beta_2 - 3\frac{\rho_u}{\rho} \qquad \bar{\alpha}_4 = 2\alpha_2\frac{\rho_v}{\rho} + \alpha_4 \qquad \bar{\beta}_1 = \beta_1 \qquad \bar{\alpha}_1 = \alpha_1 - 3\frac{\rho_u}{\rho}$$

$$\bar{\beta}_3 = 2\beta_1\frac{\rho_u}{\rho} + \beta_3 \qquad \bar{b} = b + 3\frac{\rho_u}{\rho} \qquad \bar{a} = a + 3\frac{\rho_v}{\rho}$$

$$\bar{\alpha}_2 = \alpha_2\frac{\psi'^2}{\varphi'^3}; \quad \bar{\beta}_2 = \frac{\beta_2}{\psi'} - 3\frac{\psi''}{\psi'^2}; \quad \bar{\alpha}_4 = \alpha_2\frac{\psi''}{\psi'^3} + \alpha_4\frac{\psi'}{\varphi'^3}; \quad \bar{\beta}_1 = \beta_1\frac{\varphi'^2}{\psi'^3}; \quad \bar{\alpha}_1 = \frac{\alpha_1}{\varphi_1} - 3\frac{\varphi''}{\varphi'^2}$$

$$\bar{\beta}_3 = \beta_1\frac{\varphi''}{\psi'^3} + \beta_3\frac{\varphi'}{\psi'^3}; \qquad \bar{a} = \frac{a}{\psi'}; \qquad \bar{b} = \frac{b}{\varphi'}.$$

Indicando con φ_2 e φ_5 le due forme di Bompiani

$$\varphi_2 = \alpha_2\beta_1 du dv \tag{17}$$

$$\varphi_5 = (\alpha_2\beta_1)^2(\alpha_2 du^5 - \beta_1 dv^5) \tag{18}$$

e con φ_1 la forma lineare

$$\varphi_1 = -\left[\frac{3}{2}\frac{\partial \log \beta_1}{\partial u} + (\alpha_1 + 3b)\right] du + \left[\frac{3}{2}\frac{\partial \log \alpha_2}{\partial v} + (\beta_2 + 3a)\right] dv \tag{19}$$

segue dalle (14) e (15) che se il punto si muove lungo le linee di equazione

$$\frac{\varphi_5}{\varphi_2{}^2} + \varphi_1 = 0 \tag{20}$$

i due birapporti hanno uguali i termini principali. Si può dire altrimenti che *a meno di infinitesimi di ordine superiore al 3° quando si assumano* $Q_1(\lambda) = 0$ *ovvero* $Q_2(\lambda) = 0$ *come assoluto di una metrica proiettiva non-euclidea i punti delle linee* (20) *entro l'intorno del 3° ordine del punto* x *sono proiettivamente equidistanti dai due iperpiani cuspidali.*

Se la trasversale t non è una retta generica per X ma coincide in particolare con la corda xX, i valori (14) (15) corrispondono alle due intersezioni, distinte da x, di questa con le due quadriche.

Le linee del sistema (20) sono pertanto caratterizzate dalla proprietà seguente

Se X *è un punto prossimo ad* x *entro l'intorno del 3º ordine sopra una qualunque curva uscente da* x *appartenente al sistema* (20), *la corda* xX *interseca le due quadriche* $Q_1(\lambda)=0$ *e* $Q_2(\lambda)=0$ *in due punti coincidenti.*

4. **Curve osculatrici alle linee principali.** - L'elemento di curva su σ appartenga ad una linea principale. Avendosi in questo caso

$$X' = x + x_u du + \frac{1}{2} x_{uu} du^2 + \frac{1}{6} x_{uuu} du^3 + \ldots \tag{21}$$

$$X'' = x + x_v dv + \frac{1}{2} x_{vv} dv^2 + \frac{1}{6} x_{vvv} dv^3 + \ldots \tag{22}$$

se ne calcolano le coordinate locali ancora mediante le (6) sopprimendo in queste per X' i termini contenenti dv e per X'' i termini contenenti du e per entrambi i termini coi differenziali d'ordine ≥ 2.

Se t', t'' sono due trasversali per X', X'', si indichino con P', P'' due punti qualsiasi su di esse; con X_1', X_2', le intersezioni di t' con le due quadriche; con X_1'', X_2'' le intersezioni di queste con t'' (la prima coppia prossima ad X; la seconda prossima ad X'') e infine con C_1', C_2' e C_1'', C_2'' le intersezioni di t' e t'' con i due iperpiani cuspidali. Per i punti della trasversale t' si hanno i punti $\tau Y + X'$ corrispondenti ai valori

$$X_1')\quad \tau = \frac{\alpha_2}{3\nu_4} du^3 + \ldots \qquad X_2')\quad \tau = \frac{1}{3\nu_3}\left(\alpha_1 + 3b + \frac{3}{2}\frac{\partial \log \beta_1}{\partial u}\right) du^3 + \ldots$$

$$C_1')\quad \tau = -\frac{\alpha_2}{6\nu_4} du^3 + \ldots \qquad C_2')\quad \tau = -\frac{1}{2\nu_3} du^2 + \ldots .$$

Per la trasversale t'' i punti $\tau Y + X''$ con

$$X_1'')\quad \tau = \frac{1}{3\nu_4}\left(\beta_2 + 3a + \frac{3}{2}\frac{\partial \log \alpha_2}{\partial v}\right) dv^3 + \ldots \qquad X_2'')\quad \tau = \frac{\beta_1}{3\nu_3} dv^3 + \ldots$$

$$C_1'')\quad \tau = -\frac{1}{2\nu_4} dv^2 + \ldots \qquad C_2'')\quad \tau = -\frac{\beta_1}{6\nu_3} dv^3 + \ldots .$$

Si hanno per i birapporti sulle due rette i seguenti limiti

$$\lim_{X' \to x} (X'C_1'X_1'P') = \lim_{X'' \to x} (X''C_2''X_2''P'') = -2$$

$$\lim_{X' \to x} (X'C_2'X_2'P') = -\frac{2}{3}\left(\alpha_1 + 3b + \frac{3}{2}\frac{\partial \log \beta_1}{\partial u}\right) du$$

$$\lim_{X'' \to x} (X''C_1''X_1''P'') = -\frac{2}{3}\left(\beta_2 + 3a + \frac{3}{2}\frac{\partial \log \alpha_2}{\partial v}\right) dv.$$

I primi due birapporti danno luogo ad *un invariante proiettivo della superficie e delle due quadriche indipendente dalle linee lungo cui variano* X' X'' → x (*invariante di* SEGRE).

I termini principali dei due rimanenti *dipendono soltanto dalle linee coordinate lungo cui* X', X'' *tendono ad* x, *sono invece indipendenti dalle due trasversali* t' *e* t'' *e dai due punti scelti su di esse.*

5. **Forma φ_2 di Bompiani.** - Il significato geometrico della forma $\varphi_2 = \alpha_2\beta_1 dudv$ come termine principale di birapporto infinitesimo che non fa intervenire alcuna superficie in contatto con σ, è indicato dal BOMPIANI (5). Ma è estensibile alla forma φ_2 il procedimento seguito dallo stesso Autore per definire la forma normale di FUBINI $\varphi_2 = 2\beta\gamma dudv$ dello spazio ordinario (6).

Da X prossimo ad x su una curva di σ non in contatto con le linee coordinate si mandino le linee principali. Le intersezioni con le analoghe linee uscenti da x saranno ancora i punti X', X''. La retta $X'X''$ interseca la quadrica $Q_1(\lambda) = 0$ in un punto $X_1 = X' + \tau_1 X''$ prossimo ad X' corrispondente a

$$\tau_1 = \frac{2}{3}\alpha_2 \frac{du^3}{dv^2} + \dots$$

e la quadrica $Q_2(\lambda) = 0$ in un punto $X_2 = \tau_2 X' + X''$ prossimo ad X'' corrispondente a

$$\tau_2 = \frac{2}{3}\beta_1 \frac{dv^3}{du^2} + \dots .$$

Il birapporto dei quattro punti $(X_1 X_2 X' X'')$ ha per termine principale il birapporto dei quattro numeri

$$\left(\frac{2}{3}\alpha_2 \frac{du^3}{dv^2} \quad \frac{3}{2}\frac{du^2}{\beta_1 dv^3} \quad 0 \quad \infty\right)$$

(5) « Si considerino due punti P, P' della superficie e le coppie di linee u, v uscenti da essi. Sia P_1' il punto d'incontro della linea u uscente da P e della linea v uscente da P' e P_2' l'altro punto e si costruisca l'S_3 congiungente la retta osculatrice in P alla superficie col piano osculatore in P alla linea u e l'altro analogo per la linea v uscente da P. Detti X_1' e X_2' i punti in cui la retta P_1' P_2' incontra i due S_3 così ottenuti, se si fa tendere P' a P sopra una qualsiasi curva γ (non tangente alla linea u per P) il termine principale del birapporto $(X_1' X_2' P_1' P_2')$ vale $\frac{1}{9}\alpha_2\beta_1 dudv$ ».

(6) BOMPIANI, « Atti della R. Accademia di Torino », l. c., pag. 240.

ossia

$$\frac{4}{9}\alpha_2\beta_1 du dv = \frac{4}{9}\varphi_2 .$$

Il birapporto analogo al precedente formato con le ulteriori intersezioni $\bar{X}_1\bar{X}_2$ della retta $X'X''$ con le due quadriche $(\bar{X}_1\bar{X}_2X'X'')$ ha per termine principale il birapporto dei quattro numeri

$$\left(\frac{2}{3}\left[\beta_2 + 3a + \frac{3}{2}\frac{\partial \log \alpha_2}{\partial v}\right] dv \qquad \frac{3}{2\left[\alpha_1 + 3b + \frac{3}{2}\frac{\partial \log \beta_1}{\partial u}\right] du} \qquad 0 \qquad \infty\right)$$

ossia l'altra forma quadratica

$$\psi_2 = \frac{4}{9}\left(\alpha_1 + 3b + \frac{3}{2}\frac{\partial \log \beta_1}{\partial u}\right)\left(\beta_2 + 3a + \frac{3}{2}\frac{\partial \log \alpha_2}{\partial v}\right) du dv. \tag{23}$$

Gli sviluppi precedenti non risultano modificati quando alle due quadriche $Q_1(\lambda) = 0$, $Q_2(\lambda) = 0$ si sostituiscono due qualunque quadriche del sistema (9) che taglino la superficie lungo una linea avente in x un punto quadruplo e contenenti rispettivamente la prima ovvero la seconda tangente principale (si ottengono ponendo in (9) $n = 0$ ovvero $m = 0$).

Sulle linee principali per x *si considerino i punti* X'X'' *corrispondenti agli incrementi* du, dv *e siano* $\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2$ *e* $\bar{\mathrm{X}}_1\bar{\mathrm{X}}_2$ *le intersezioni della loro congiungente con due quadriche che taglino la superficie lungo una linea avente in* x *un punto quadruplo e contenenti rispettivamente la prima o la seconda tangente principale, con* X_1 *prossimo ad* X' *e* X_2 *prossimo ad* X''. *Il birapporto* $(\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2\mathrm{X}'\mathrm{X}'')$ *ha per termine principale quando* X'. X'' $\rightarrow$ x $\frac{4}{9}\alpha_2\beta_1$dudv *ossia a meno del fattore numerico* $\frac{4}{9}$, *la forma* φ_2 *del Bompiani.*

Se nelle medesime ipotesi si considera il birapporto $(\bar{\mathrm{X}}_1\bar{\mathrm{X}}_2\mathrm{X}'\mathrm{X}'')$ *si trova la forma quadratica* (23).

La forma ψ_2, come la φ_2, non dipende dalla normalizzazione delle coordinate nè dalle trasformazioni (16) del sistema curvilineo.

6. **Osservazione sul sistema di forme** $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_5$. – È ben noto che le forme F_2 ed F_5 di Fubini assieme alla forma lineare F_1 (7), sono atte a rappresentare la superficie a meno di omografie dello

(7) Fubini-Čech. *G. P. D.*, Zanichelli, Bologna, Vol. II, n. 109, pag. 631 e seg.

spazio ambiente. Le due forme F_2, F_5, *propriamente intrinseche*, si trasformano, quando si moltiplichino per un medesimo fattore ρ le coordinate di un punto dello spazio, a norma delle relazioni

$$\bar{F}_2 = \rho^{\frac{5}{3}} F_2 \qquad \bar{F}_5 = \rho^{\frac{10}{3}} F_5$$

mentre la forma F_1 si comporta in modo meno semplice.

Una particolare normalizzazione delle coordinate consente di far coincidere la F_2 e la F_5 con la φ_1 e φ_5 di BOMPIANI [8]: basta porre nella prima delle (16)

$$\rho = \left(\frac{\alpha_2\beta_1}{2g_{12}}\right)^{\frac{3}{5}}.$$

Gli sviluppi precedenti hanno d'altra parte condotto a considerare la forma lineare φ_1 invariante per le (16). Ci si può domandare se le tre forme

$$(24)\qquad \begin{aligned} \varphi_1 &= \left[\frac{\partial \log \alpha_2}{\partial v} + \frac{2}{3}(\beta_2 + 3a)\right] dv - \left[\frac{\partial \log \beta_1}{\partial u} + \frac{2}{3}(\alpha_1 + 3b)\right] du \\ \varphi_2 &= \alpha_2\beta_1 du dv \\ \varphi_5 &= (\alpha_2\beta_1)^2(\alpha_2 du^5 - \beta_1 dv^5) \end{aligned}$$

siano atte a rappresentare la superficie nel gruppo richiesto.

Si ha intanto in coordinate così normalizzate $\bar{F}_2 = \varphi_2$; $\bar{F}_5 = \varphi_5$ e conseguentemente (FUBINI, l. c., Vol. II, pag. 646)

$$(25)\qquad \begin{aligned} 3\frac{\partial \log \alpha_2\beta_1}{\partial u} &= -2\bar{b} + \bar{\alpha}_1 = (3\bar{b} + \bar{\alpha}_1) - 5\bar{b}; \\ 3\frac{\partial \log \alpha_2\beta_1}{\partial v} &= -2\bar{a} + \bar{\beta}_2 = (3\bar{a} + \beta_2) - 5\bar{a}. \end{aligned}$$

Ma qualunque sia la normalizzazione risulta $3\bar{b} + \bar{\alpha}_1 = 3b + \alpha_1$; $3\bar{a} + \bar{\beta}_2 = 3a + \beta_2$ e i coefficienti di du. dv in φ_1 consentono di eliminare $3\bar{b} + \bar{\alpha}_1$ e $3\bar{a} + \bar{\beta}_2$ dalle (25); $\bar{a}$ e $\bar{b}$ si esprimono mediante i coefficienti (noti) delle forme assegnate e loro derivate. Determinati $\bar{a}$ e $\bar{b}$ si calcolano $\bar{\alpha}_1$ e $\bar{\beta}_2$. Conoscere le tre forme (24) vale dunque quanto conoscere $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\beta}_2$.

[8] E. PICASSO, *Sulla Geom. Proiett. Diff. delle Sup. di S_4*, « Rend. Acc. dei Lincei », (6), 18, (1933), pp. 285-290.

Le condizioni d'integrabilità delle (1) relative alle derivate del quarto ordine x_{uuuv} e x_{uvuu} e delle derivate x_{vvvu} e x_{uvvv} tratte dalle equazioni del 3° ordine e di LAPLACE, consentono il calcolo mediante i coefficienti delle (24) e loro derivate dei restanti coefficienti delle (1) con sole operazioni razionali.

Il sistema di forme intrinseco ed invariante φ_1, φ_2, φ_5 *è dunque atto ad individuare la superficie a meno della più generale omografia dello spazio ambiente.*

Le forme stesse potranno considerarsi come un sistema di *forme normali* per la superficie.

7. Invarianti del 2° ordine di una curva tracciata sulla superficie. – Per *curvatura proiettiva* di una curva tracciata sulla superficie si assume secondo BOMPIANI, l'invariante differenziale del 2° ordine ottenuto dividendo la forma

$$3\,\frac{d^2udv - d^2vdu}{dudv} + (\alpha_1 + 3b)du - (\beta_2 + 3a)dv \tag{26}$$

per la potenza $F_2^{\frac{1}{2}}$ della forma fondamentale F_2.

Il carattere di invarianza non si perde qualora si aggiunga al precedente un invariante arbitrario dipendente dai soli differenziali primi; di questa parte additiva si può disporre per costruire un invariante differenziale del 2° ordine di semplice significato proiettivo.

Sia X un punto di una curva tracciata su σ, prossimo ad x; si considerino le proiezioni t' della corda xX sul piano tangente in x a σ, fatta dal piano coordinato xC_3C_4 (piano pseudonormale proiettivo), la tangente t alla curva in x che supporremo distinta dalle due tangenti principali t_1, t_2 e si calcoli il birapporto delle quattro rette $(t\,t'\,t_1\,t_2)$. Per ottenere t' basterà esigere che l'iperpiano $m\lambda_1 + n\lambda_2 = 0$ contenga X, onde

$$\frac{m}{n} = -\frac{M_{123\ldots}}{N_{123\ldots}}$$

e da questa

$$\frac{m}{n} = \frac{du}{dv}\left[-1 - \frac{\alpha_2\beta_1(\delta^2udv - \delta^2vdu)}{2\varphi_2} - \frac{1}{2}\left(3b + \alpha_1 + \frac{\partial \log \beta_1}{\partial u} + \theta_u\right)du - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\left(3a + \beta_2 + \frac{\partial \log \alpha_2}{\partial v} + \theta_v\right)dv.\right.$$

Per il birapporto richiesto si ha

$$(t\,t'\,t_1\,t_2) = 1 + \frac{\alpha_2\beta_1(\delta^2 u dv - \delta^2 v du)}{2\varphi_2} + \frac{1}{2}\left(3b + \alpha_1 + \frac{\partial \log \beta_1}{\partial u} + \theta_u\right) du -$$
$$- \frac{1}{2}\left(3a + \beta_2 + \frac{\partial \log \alpha_2}{\partial v} + \theta_v\right) dv.$$

La parte principale del $\log(t\,t'\,t_1\,t_2)$ che serve a misurare sul piano tangente l'angolo infinitesimo $\widehat{t\,t'}$ quando si assuma come assoluto nel fascio di centro x la coppia di tangenti principali, è rappresentata da

$$\frac{\alpha_2\beta_1(\delta^2 u dv - \delta^2 v du)}{2\varphi_2} + \frac{1}{2}\left(3b + \alpha_1 + \frac{\partial \log \beta_1}{\partial u} + \theta_u\right) du - \tag{27}$$
$$- \frac{1}{2}\left(3a + \beta_2 + \frac{\partial \log \alpha_2}{\partial v} + \theta_v\right) dv.$$

Indicata con C_P l'espressione della curvatura proiettiva e con C'_P l'invariante di curvatura (27), ora calcolato, si ha immediatamente

$$C_P = 6C_P' + \frac{4}{3}\varphi_1$$

Si consideri ora il *sistema planare di curve* i cui piani d'appoggio sono i piani coordinati $x\underset{3}{C}\underset{4}{C}$. Le espressioni di $\underset{3}{C}\underset{4}{C}$. tenuto conto che valgono le relazioni di cui si è già fatto tacito uso

$$\frac{\beta_3}{\beta_1} = - b - \alpha_1 - \frac{\partial \log \beta_1}{\partial u} \qquad \frac{\alpha_4}{\alpha_2} = - a - \beta_2 - \frac{\partial \log \alpha_2}{\partial v}$$

danno per tali linee l'equazione

$$\frac{d^2 u dv - d^2 v du}{du dv} + \left(3b + \alpha_1 + \frac{\partial \log \beta_1}{\partial v}\right) du - \left(3a + \beta_2 + \frac{\partial \log \alpha_2}{\partial v}\right) dv = 0. \tag{28}$$

Il cui confronto con la (27) da immediatamente che *l'invariante di curvatura ora determinato è nullo per tutte le curve appartenenti al sistema planare i cui piani d'appoggio sono i piani coordinati* $x\underset{3}{C}\underset{4}{C}$.

8. **Invarianti del 3° ordine relativo a due curve in contatto del 2° ordine.** – Si può anche in questo caso definire un inva-

riante del 3° ordine relativo a due curve in contatto del 2° ordine in x. Assumiamo su tali curve due punti $X, \bar{X}$ prossimi ad x nell'intorno del 3° ordine.

La proiezione delle due corde xX e $x\bar{X}$ sul piano tangente eseguita dal piano coordinato $x\underset{3}{C}\underset{4}{C}$ e le due tangenti principali danno un birapporto il cui logaritmo ha per termine principale un invariante proiettivo differenziale del 3° ordine delle due curve in x.

Sopralineando gli elementi relativi alla seconda curva, risulta per le condizioni imposte $\delta^1 = \bar{\delta}^1$, $\delta^2 = \bar{\delta}^2$ ma $\delta^3 \neq \bar{\delta}^3$.

L'iperpiano $m\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ conterrà X se

$$m_1 = -\frac{N_{123\ldots}}{M_{123\ldots}}.$$

Conterrà $\bar{X}$ se è

$$m_2 = -\frac{\bar{N}_{123\ldots}}{\bar{M}_{123\ldots}}.$$

Per il birapporto cercato si ha successivamente

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{N_{123\ldots}\bar{M}_{123\ldots}}{M_{123\ldots}\bar{N}_{123}} = \frac{N_1 + \frac{1}{2}N_2 + \frac{1}{6}N_3 + \ldots}{N_1 + \frac{1}{2}N_2 + \frac{1}{6}\bar{N}_3 + \ldots} \cdot \frac{M_1 + \frac{1}{2}M_2 + \frac{1}{6}\bar{M}_3 + \ldots}{M_1 + \frac{1}{2}M_2 + \frac{1}{6}M_3 + \ldots} =$$

$$= 1 + \frac{1}{6}\left[\frac{(N_3 - M_3) - (\bar{N}_3 - \bar{M}_3)}{dudv}\right] + \ldots = 1 +$$

$$+ \frac{1}{6}\left[\frac{\delta^3 vdu - \delta^3 udv}{dudv} - \frac{\bar{\delta}^3 vdu - \bar{\delta}^3 udv}{dudv}\right] + \ldots .$$

L'infinitesimo principale del suo logaritmo vale

$$\frac{1}{3}\frac{\alpha_2\beta_1}{\varphi_2}\left[(\delta^3 vdu - \delta^3 udv) - (\bar{\delta}^3 vdu - \bar{\delta}^3 udv)\right].$$

Quanto precede esaurisce lo scopo dell'attuale ricerca e pone inoltre in rilievo nuove analogie che le due quadriche di cui si è fatto uso come superficie di contatto, presentano nei confronti della quadrica di Lie dello spazio ordinario, a conferma di quanto avevo già osservato nel definirle.