Francesco Speranza


## Sulle corrispondenze polari.


*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **13** (1958), n.2, p. 157–159.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_2_157_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1958.

# SEZIONE SCIENTIFICA

## BREVI NOTE

### Sulle corrispondenze polari.

Nota di Francesco Speranza (a Bologna)

**Sunto.** - *Si comunica che le sole trasformazioni dualistiche, non singolari, la cui correlazione associata ad una coppia generica di elementi corrispondenti è involutoria, sono le corrispondenze polari, e si indicano alcune proprietà delle trasformazioni considerate.*

**Summary.** - *Author relates that regular dualistic transformations whose associated correlation to a general couple of correspondent elements is involutory are polar correspondances, and gives some properties of these transformations.*

**1.** Com'è noto, si dice *trasformazione dualistica in* $S_r$ una corrispondenza $\mathcal{T}$ fra i punti e gl'iperpiani di $S_r$ [1]. Se $A$ è un punto generico di $S_r$, ed $a$ l'iperpiano corrispondente, supporremo

[1] Le trasformazioni dualistiche (fra spazi proiettivi distinti) sono ovviamente trasformazioni puntuali, argomento sul quale vi è ormai un'assai ricca letteratura (Bompiani, Čech, Villa e molti altri Autori). Se i due spazî sono sovrapposti, lo studio delle trasformazioni dualistiche si differenzia però da quello delle trasformazioni puntuali (intese in senso stretto).
Sulle trasformazioni dualistiche, si veda: Enea Bortolotti, *Sulla geometria proiettiva differenziale delle trasformazioni dualistiche*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (6) 28, 224-230 ($1938_2$); *Trasformazioni dualistiche e*

sempre che $A$ ed $a$ non si appartengano ([2]), e che costituiscano una coppia regolare per la $\mathcal{C}$.

In relazione all'intorno del 1° ordine della coppia $A$, $a$, si definisce una correlazione $\Gamma$ *(correlazione associata)* nella stella $A$, in questo modo: sia $A'$ un punto infinitamente vicino ad $A$ ed $a'$ l'iperpiano ad esso corrispondente in $\mathcal{C}$; $\Gamma$ è la correlazione che associa alla direzione $AA'$ la giacitura proiettante da $A$ l'$S_{r-2}$ intersezione di $a$ ed $a'$ ([3]). Particolare interesse presenta il caso in cui $\Gamma$ è involutoria: se $r$ è pari, $\Gamma$ può essere una polarità oppure un sistema nullo; se $r$ è dispari, $\Gamma$ è necessariamente una polarità.

Il Čech ha dimostrato che le trasformazioni, la cui correlazione associata ad una coppia generica è una polarità, si possono così costruire ([4]): si consideri un $S_{r+1}$, contenente $S_r$, ed in esso (fuori di $S_r$) un punto $O$; sia inoltre $\Sigma$ un'ipersuperficie di $S_{r+1}$ e $B$ un suo punto generico. Alla proiezione $A$ di $B$ da $O$ su $S_r$ va associato l'$S_{r-1}$ intersezione di $S_r$ con lo spazio tangente a $\Sigma$ in $B$. Queste trasformazioni si indicano col nome di *corrispondenze polari.*

Ho rilevato, con semplici argomentazioni geometriche, che *la correlazione* $\Gamma$ *relativa ad* A *è la proiezione da* O *su* $S_r$ *della polarità rispetto al cono asintotico relativo al punto* B *di* $\Sigma$ ([5]).

*spazi proiettivamente piani*, « Boll. U. M. I. » (1) **17**, 219-223 (1938); F. Speranza, *Proprietà proiettive delle trasformazioni dualistiche*, « Boll. U.M.I. » (3) **12**, 552-565 (1957).

([2]) Per quanto riguarda le trasformazioni dualistiche per le quali punti ed iperpiani corrispondenti si appartengono, cfr. A. Terracini, *Trasformazioni dualistiche di tipo nullo nel piano e sistemi* (G) *proiettivamente deformabili*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (8) **10**, 89-94 ($1951_1$); *Sistemi* (G) *proiettivamente deformabili di tipo speciale*, «Rend. Acc. Naz. Lincei » (8) **10**, 186-189 ($1951_1$); Z. Nádeník, *La couche d'hypersurfaces et la correspondance nulle dans un espace projectif a* n *dimensions*, «Czechoslovak Math. Journal» T. 7 (82), 73-95 (1957).

([3]) La correlazione $\Gamma$ è stata introdotta da Enea Bortolotti, la prima op. cit. in ([1]), n. 4.

([4]) Cfr. E. Čech, *Quadriques osculatrices à centre donné et leur signification projective*, « Comptes Rendus de la Société des Sciences et Lettres de Wroclaw », 7, 1 (1952); cfr. pure G. Fubini - E. Čech, *Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces*, Gauthier - Villars, Paris (1931), pag. 153. Un'altra caratterizzazione di queste trasformazioni trovasi in Bortolotti, l. c. in ([3]).

([5]) Questa proprietà appare anche, implicitamente, in A. Terracini, Per $r = 2$, ne segue, in particolare, che *la rete canonica* [6] *di una corrispondenza polare è la proiezione, da* O, *della rete delle curve asintotiche della superficie* $\Sigma$: essa è quindi una *rete asintotica* [7]. Se, viceversa, è data nel piano una rete asintotica di curve, esistono infinite trasformazioni dualistiche, dipendenti da due funzioni arbitrarie di una variabile, che ammettono quella rete come rete canonica [8]; ma fra queste vi sono al più $\infty^1$ corrispondenze polari [9].

Si rileva poi facilmente che le corrispondenze polari possono caratterizzarsi anche come le sole trasformazioni dualistiche che ammettono, in una coppia generica di elementi corrispondenti, una polarità tangente.

**2.** Ma la correlazione $\Gamma$ può essere involutoria anche quando è un sistema nullo. Orbene, ho dimostrato che *non esistono trasformazioni dualistiche, non singolari, per le quali* $\Gamma$ *sia, nella coppia generica di elementi corrispondenti, un sistema nullo.* Segue che le sole trasformazioni dualistiche per le quali $\Gamma$, in una coppia generica, è involutoria sono le corrispondenze polari.

Più precisamente, ho dimostrato che *se* $\Gamma$ *è, in una coppia generica, un sistema nullo,* $\mathcal{T}$ *si riduce ad una correlazione che ad un punto qualsiasi di* $S_r$ *fa corrispondere un iperpiano fisso* (o anche alla corrispondenza duale) [10].

Le dimostrazioni, qui omesse, si troveranno, insieme a maggiori dettagli sugli argomenti trattati, in un lavoro che apparirà prossimamente negli « Atti dell'Accademia delle Scienze di Bologna ».

*Densità di una corrispondenza di tipo dualistico, ed estensione dell'invariante di Mehmke-Segre,* « Atti Accad. Sci. Torino », 71, 310-328 (1935-36).

Ricordo che il cono asintotico è il luogo delle tangenti principali alla varietà intersezione di $\Sigma$ con lo spazio tangente; cfr. G. FUBINI - E. ČECH, *Geometria proiettiva differenziale,* Zanichelli, Bologna (1926), T. II, pag. 605.

(6) Cfr. F. SPERANZA, op. cit. in (1).

(7) Cfr. G. FUBINI - E. ČECH. op. cit. in (4), pag. 150.

(8) Cfr. F. SPERANZA, op. cit., n. 8.

(9) Cfr. G. VAONA, *Sulle trasformazioni puntuali fra piani aventi due reti asintotiche di curve caratteristiche corrispondenti,* « Boll. U. M. I. » (3) 7, 148-154 (1952).

(10) Si suppone che $\mathcal{T}$ operi su tutto $S_r$ (o su tutto lo spazio duale).