
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

SALVATORE CHERUBINO

Sulla teoria delle matrici.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 13
(1958), n.1, p. 7–10.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_1_7_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sulla teoria delle matrici.

Nota di SALVATORE CHERUBINO (a Pisa)

Sunto. - *Dopo alcune osservazioni sulla necessità di unificare le notazioni sulle matrici, si considerano campi in cui non vale il teorema di SYLVESTER, ma uno più ridotto, che sussiste anche negli anelli.*

Per analogia si nota come la nozione di funzione olomorfa di matrici, data dall'autore nel 1937, coincide con quella di funzione totalmente derivabile di SPAMPINATO in algebre complesse di matrici contenenti l'identità e le trasposte coniugate di tutti i suoi elementi.

Summary. - *After some considerations about the need of unifying matrix notations, the Author studies fields where SYLVESTER's theorem is no more valid, but, a weaker one, which holds true even for rings.*

In analogy, it is remarked that the concept of holomorphic function of matrices, given by the Author in 1937, coincides with that of totally derivable function, due to SPAMPINATO, in complex matrix algebras containing the identity and the conjugate transpose of all their elements.

(da una lettera al Prof. M. PICONE)

.

1. La tua proposta di indicare con $|A|$ il modulo di una matrice complessa A mi sembra assai opportuna; così pure quella di designare il suo determinante con $\det A$. Nel mio *Calcolo delle Matrici* ⁽¹⁾ adopero promiscuamente questa e la notazione usuale che, come tu ben dici, è meglio riservare al modulo. La definizione di modulo di una matrice data a pag. 261 è dovuta al fatto che ivi mi riferisco alla rappresentazione geometrica di un'algebra del campo (o corpo) complesso e deriva dallo SPAMPINATO.

A proposito di notazioni, sono del parere che occorrerebbe una buona volta unificarle. Un tentativo ho cercato di farlo nella mia Monografia, ma è ancora tutt'altro che perfetto, come provato da quel che scrivi ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Che richiamerò appresso scrivendo *Matrici*.

⁽²⁾ Mi permetto di aggiungere che la trasposta di una matrice A l'indicherei sempre A_{-1} , simbolo in certo senso operativo, introdotto dal non mai abbastanza compianto GAETANO SCORZA, [*Corpi numerici e Algebre*. Messina, Principato, p. 138]; i vettori colonna (o verticali) li indicherei sempre ad es., x_{-1} , mentre x designerà lo stesso vettore ma orizzontale (o riga). Solo in certi casi l'indice -1 si può omettere, come nella tua Nota, senza ambiguità. Inoltre riserverei le minuscole tonde ai vettori,

Le immediate limitazioni superiori pei moduli dei numeri caratteristici che dai mediante i moduli a destra e a sinistra di una matrice, benchè note ⁽³⁾, sono felici per la semplicità con la quale si ottengono e per le notazioni.

2. Il teorema di SYLVESTER a pag. 118 di *Matrici* viene completato a pag. 171 servendosi della forma canonica di A , che nella tua Nota non interviene ⁽⁴⁾. Si può anzi completare più semplicemente così ⁽⁵⁾. Per $\varphi(z)$ polinomico di grado m si ha:

$$[\varphi(A) - \varphi(\alpha)I] = \psi(A)[A - \alpha I] = [A - \alpha I]\psi(A)$$

con $\psi(A)$ polinomio di grado $m - 1$ in A , I matrice identica dell'ordine n di A . E poichè, se α è radice caratteristica di A , esiste un esponente naturale i (indice ⁽⁶⁾ di α) pel quale l'equazione

$$[A - \alpha I]^i x_{-1} = 0$$

possiede tante soluzioni linearmente indipendenti quant'è la molteplicità di α (cioè uguale alla somma degli interi della segnatura), $\varphi(\alpha)$ ha almeno la stessa molteplicità per $\varphi(A)$, che non potrà avere radici caratteristiche diverse dalle $\varphi(\alpha)$.

le maiuscole tonde oppur no e le minuscole nerette le adopererei per le matrici ed il corsivo per gli elementi delle matrici e le componenti dei vettori. Si sa bene che non si potrà sempre far così (v. l'OSSERVAZIONE a pag. 6 di *Matrici*).

⁽³⁾ Cfr., *Matrici*, cap. III, § 3 a), pag. 219. In detto capitolo si trovano anche altre limitazioni superiori o inferiori, tutte raggiunte con mezzi assai semplici. Al FROBENIUS, oltre alle limitazioni superiori che hai indicate, si deve un teorema più generale di quello di SYLVESTER ed anche di quello che dimostri, in modo così semplice ed elegante, alla fine della tua Nota. Esso riguarda i numeri caratteristici della matrice funzione razionale di due o più matrici date, fra loro permutabili. Essi si ottengono tutti sostituendo, nella funzione razionale considerata, le date matrici coi loro numeri caratteristici presi in ordine reciproco opportuno, indipendente dalla funzione. Vedi *Matrici*, cap. II, § 6, nn. 19 e 20, pag. 199-200.

⁽⁴⁾ Un primitivo mio proposito era quello di dare la forma canonica all'inizio del cap. II deducendone subito, ad es., il teorema di CALEY-HAMILTON, l'equazione minima ed il teorema di FROBENIUS, premessi a pagg. 96-97, oltre a quello, completo, di SYLVESTER.

⁽⁵⁾ Altra mia intenzione era quella di prostrarre il più possibile l'uso dei determinanti e cioè oltre i primi quattro paragrafi del capitolo primo. Per realizzare questo proposito e quello della nota ⁽⁴⁾ mi sarei dovuto allontanare ancor più dalla comune trattazione e quindi dalle applicazioni più usuali benchè queste avrebbero potuto trarne vantaggi.

⁽⁶⁾ Le nozioni di indice e di segnatura non dipendono dalla forma canonica (cfr. *Matrici*, pp. 160-161).

6. In campi diversi da quello complesso può accadere che il teorema di SYLVESTER valga solo come a pag. 118 di *Matrici*. Le nozioni di numero caratteristico (qui è meglio dire *numero* anzichè *radice*) di indice e di segnatura possono introdursi in un campo $\mathcal{F}$ qualsiasi senza bisogno di determinanti e precisamente come nel campo complesso.

Dirò che α è un numero caratteristico in $\mathcal{F}$ della matrice A appartenente anch'essa (coi suoi elementi) ad $\mathcal{F}$ se ad α è associato, dalla destra o dalla sinistra, almeno un autovettore x di $\mathcal{F}$ non nullo, cioè se in $\mathcal{F}$ si ha:

$$[A - \alpha I]x_{-1} = 0; \quad \text{oppure: } x[A - \alpha I] = 0; \quad x \neq 0.$$

Si dimostra facilmente che A non può ammettere, in $\mathcal{F}$, più di n numeri caratteristici. Basta osservare che se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, sono numeri caratteristici di A in $\mathcal{F}$, $x', x'', \dots, x^{(s)}$ sono autovettori linearmente indipendenti (quindi $s \leq n$) a quelli rispettivamente associati, ad es. a destra, accade che se ad un numero caratteristico β , sempre in $\mathcal{F}$, è associato, dallo stesso lato, un autovettore $y \neq 0$ linearmente dipendente da quelli, β deve necessariamente coincidere con uno almeno degli $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$. Infatti, se con coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ non tutti zero di $\mathcal{F}$ si ha

$$y = \lambda_1 x' + \lambda_2 x'' + \dots + \lambda_s x^{(s)},$$

dalle

$$Ax_{-1}^{(h)} = \alpha_h x_{-1}^{(h)}; \quad Ay_{-1} = \beta y_{-1}; \quad h = 1, 2, \dots, s$$

segue che

$$\sum_{h=1}^s \lambda_h (\alpha_h - \beta) x_{-1}^{(h)} = 0.$$

Quindi β coincide con gli α_h pei quali $\lambda_h \neq 0$.

Dopo di che, se A ammettesse in $\mathcal{F}$ gli $n + 1$ numeri caratteristici $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ uno almeno degli autovettori associati ad essi (da uno stesso lato) sarebbe combinazione lineare in $\mathcal{F}$ degli altri; onde, etc.

Se $h_1 > 0$ è la nullità di $[A - \alpha I]$ in $\mathcal{F}$, ad α sono associati h_1 autovettori linearmente indipendenti in $\mathcal{F}$, sia a destra che a sinistra. Per le successive potenze di $[A - \alpha I]$ la nullità in $\mathcal{F}$ cresce o almeno non diminuisce sino a un esponente massimo $\leq n$. e ad una nullità massima $\leq n$, che si dicono rispettivamente *indice* e *molteplicità* di α per A , in $\mathcal{F}$. Si istituisce così la nozione di *segnatura* di A in $\mathcal{F}$ rispetto ad α , proprio come nel campo complesso, senza forma canonica. Con lo stesso procedimento dei nn. 19 e 20 del cap. II, § 4, pagg. 157 a 164 di *Matrici*, procedimento che si esegue in $\mathcal{F}$, si perviene alla forma (25) di pag. 164, cioè si porta

A per contragredienza in $\mathcal{F}$ a diventare composta di una matrice come la detta (25) e di un'altra matrice B non possedente α come numero caratteristico in $\mathcal{F}$. Analogamente si opera su B se ammette in $\mathcal{F}$ un numero caratteristico $\beta \neq \alpha$, che sarà tale anche per A . E via di seguito.

Però, a differenza del campo complesso, in $\mathcal{F}$ la somma delle molteplicità dei numeri caratteristici di A può essere minore di n . Se μ è un numero caratteristico di $\varphi(A)$ in $\mathcal{F}$ ⁽⁷⁾ non è detto che esista un numero caratteristico α di A , sempre in $\mathcal{F}$, pel quale $\varphi(\alpha) = \mu$. Sia, ad es., $\mathcal{F}$ il campo dei numeri razionali: potendo il polinomio caratteristico di A , matrice in $\mathcal{F}$, essere qualunque (in $\mathcal{F}$), possiamo supporre che esso possieda soltanto $1 < s < n$ radici distinte in $\mathcal{F}$ mentre un'altra α ha in $\mathcal{F}$ il suo quadrato. Allora $\varphi(A) = A^2$ possiede in $\mathcal{F}$ i numeri caratteristici, distinti o coincidenti, $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots, \alpha_s^2, \alpha^2$ e la somma delle molteplicità di queste per $\varphi(A)$ è maggiore di quella delle molteplicità di $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha$, per A . Dunque in $\mathcal{F}$ il coinsieme di $\varphi(z)$ relativo allo insieme dei numeri caratteristici di A può non coincidere ma è sempre contenuto in quello dei numeri caratteristici di $\varphi(A)$. La coincidenza avviene se la somma delle molteplicità dei numeri caratteristici di A in $\mathcal{F}$, quindi quella dei $\varphi(\alpha_i)$, caratteristici per $\varphi(A)$, è uguale ad n ⁽⁸⁾.

Il teorema di SYLVESTER, come enunciato e dimostrato a pag. 118, vale anche se $\mathcal{F}$ è un anello commutativo anzichè un campo.

4. Quel che si è visto a proposito del teorema di SYLVESTER ci dice che il campo cui appartengono le matrici ed i parametri o coefficienti delle loro funzioni può avere molta influenza sulle proprietà di queste e di quelle.

Un altro esempio notevole è offerto dalla nozione di funzione olomorfa di matrici introdotta in una mia Memoria del 1937, ove le funzioni olomorfe non coincidono necessariamente con quelle totalmente derivabili (o monogene) secondo SPAMPINATO. In *Matrici*, pagg. 278-280, le due nozioni coincidono purchè l'algebra complessa di matrici in cui si opera (oltre alla matrice identica) contenga le trasposte coniugate dei suoi elementi, il chè può sempre ottenersi congiungendo l'algebra da cui si parte con quella delle trasposte coniugate.

.

(7) Per la segnatura di $\varphi(A)$ vedasi pagg. 171-172 e, più compiutamente, la nota di L. CANTONI citata nella bibliografia di *Matrici*.

(8) Cioè nel caso in cui esista la forma canonica di A in $\mathcal{F}$, come nel campo complesso: ovvero sia nei campi in cui il polinomio caratteristico di A possiede n radici distinte o coincidenti.