Bollettino
Unione Matematica Italiana

Gino Arrighi

Considerazioni sulle serie $\sum_{s=1}^{\infty} P_s(t)e^{\rho_s t}$.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.1, p. 38–45.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_1_38_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Considerazioni sulla serie $\sum_{1}^{\infty}{}_s P_s(t)e^{\rho_s t}$.

Nota di GINO ARRIGHI (a Lucca)

Sunto. - *In questa Nota introduco alcuni criteri per la convergenza di una serie che si è presentata in mie precedenti ricerche.*

Summary. - *In this Note I introduce some rules for the convergence of a series which has risen in my previous reserches.*

1. Recenti ricerche di calcolo funzionale fondate su una nuova definizione di funzione di matrice [1] ci hanno posto la considerazione di serie del tipo

$$\sum_{1}^{\infty}{}_s P_s(t)e^{\rho_s t} \tag{1}$$

dove: t è una variabile reale, i $P_s(t)$ sono polinomi a coefficienti complessi di grado $\mu_s - 1$ in t e i $\rho_s = a_s + ib_s$ sono numeri complessi diversi fra loro. Il termine s-mo della (1) può riguardarsi come integrale particolare della equazione differenziale

$$\left(\frac{d}{dt} - \rho_s\right)^{\mu_s} y(t) = 0.$$

Nella terza delle note citate in [1] accennavamo rapidamente a larghe possibilità di convergenza della (1) ed ora ci intratterremo più diffusamente attorno alla medesima avvertendo che talune considerazioni varrebbero altresì quando, in luogo dei $P_s(t)$, avessero a trovarsi altre funzioni regolari $f_s(t)$.

[1] G. ARRIGHI, *Sulle funzioni polidrome di matrici*, in « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa », Serie III, Vol. VIII. Id., *Sur la formule de Buchheim*, in « Comptes rendus de l'Académie des Sciences », T. 242 (1956). Id., *Sostituzioni lineari e calcolo operatorio*, in « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa », Serie III, Vol. X.

2. La convergenza della serie

$$\sum_1^\infty{}_s \, | P_s(t) | \, e^{a_s t} \tag{2}$$

dei moduli dei termini della (1), per $t = 0$ si riduce a quella (eventuale) della serie numerica a termini positivi

$$\sum_1^\infty | P_s(0) | \, ;$$

pertanto, qui di seguito, passeremo a considerare il caso di $t = t_0 \neq 0$.

a) Per $t = t_0$ esista un indice s_0 tale che, per qualunque $s > s_0$, sia verificata la

$$| P_s(t_0) | < k$$

onde la (2), in t_0, è maggiorata dalla

$$\sum_1^{s_0}{}_s \, | P_s(t_0) | \, e^{a_s t_0} + k \sum_{s_0+1}^\infty{}_s \, e^{a_s t_0} \, ;$$

inoltre se $t_0 > 0$ sia verificata la

$$a_s - a_{s+1} > k_1 > 0, \tag{3}$$

ovvero se $t_0 < 0$ sia verificata la

$$a_s - a_{s+1} < k_1 < 0, \tag{4}$$

così da aversi, comunque, la

$$(a_s - a_{s+1}) t_0 > k_1 t_0 > 0 \, ; \tag{5}$$

sarà allora

$$e^{(a_{s+1} - a_s) t_0} < e^{-k_1 t_0} < 1$$

cioè la serie precedente soddisfa al criterio del rapporto e quindi la (2) risulta convergente in t_0.

b) Per $t = t_0$ esista un indice s_0 tale che, per qualunque $s > s_0$, sia

$$\log \left| \frac{P_s(t_0)}{P_{s+1}(t_0)} \right| + (a_s - a_{s+1}) t_0 > h > 0 \, ; \tag{6}$$

avremo allora

$$\left|\frac{P_{s+1}(t_0)}{P_s(t_0)}\right| e^{(a_{s+1}-a_s)t_0} = \frac{|P_{s+1}(t_0)|\, e^{a_{s+1}t_0}}{|P_s(t_0)|\, e^{a_s t_0}} < e^{-h} < 1$$

onde, ancora per il criterio del rapporto, la (2) è convergente in t_0.

c) Per $t = t_0$ esista un indice s_0 tale che, per qualunque $s > s_0$, sia

$$\left|\frac{P_s(t_0)}{P_{s+1}(t_0)}\right| > k' > 1, \tag{7}$$

onde

$$\log\left|\frac{P_s(t_0)}{P_{s+1}(t_0)}\right| > \log k' > 0, \tag{8}$$

inoltre se $t_0 > 0$ sia verificata la (3), ovvero se $t_0 < 0$ sia verificata la (4), così da aversi, comunque, la (5).

Dalla (5) e dalla (8) discende che la (6) è verificata, onde la (2) è convergente in t_0.

d) Per $t = t_0$ sia ancora verificata la (7), inoltre se $t_0 > 0$ sia verificata la

$$0 > a_s - a_{s+1} > k_1,$$

ovvero se $t_0 < 0$ sia verificata la

$$k_1 > a_s - a_{s+1} > 0,$$

così da aversi, comunque, la

$$0 > (a_s - a_{s+1})t_0 > k_1 t_0.$$

Infine sia pure

$$\log k' > -k_1 t_0 \tag{9}$$

onde avremo

$$\log\left|\frac{P_s(t_0)}{P_{s+1}(t_0)}\right| > \log k' > -k_1 t_0 > (a_{s+1} - a_s)t_0$$

cioè

$$\log\left|\frac{P_s(t_0)}{P_{s+1}(t_0)}\right| + (a_s - a_{s+1})t_0 > \log k' + k_1 t_0 > 0. \tag{10}$$

Dalla (9) e dalla (10) discende che la (6) è verificata, onde la (2) è convergente in t_0.

e) Per $t = t_0$ esiste un indice s_0 tale che, per qualunque $s > s_0$, sia

$$1 > \left| \frac{P_s(t_0)}{P_{s+1}(t_0)} \right| > k' > 0,$$

onde

$$0 > \log \left| \frac{P_s(t_0)}{P_{s+1}(t_0)} \right| > \log k',$$

inoltre se $t_0 > 0$ sia verificata la (3), ovvero se $t_0 < 0$ sia verificata la (4), così da aversi, comunque, la (5).

Infine si abbia pure la (9) onde avremo

$$-\log \left| \frac{P_s(t_0)}{P_{s+1}(t_0)} \right| < -\log k' < k_1 t_0 < (a_s - a_{s+1}) t_0$$

cioè

$$\log \left| \frac{P_s(t_0)}{P_{s+1}(t_0)} \right| + (a_s - a_{s+1}) t_0 > \log k' + k_1 t_0 > 0. \tag{11}$$

Dalla (9) e dalla (11) discende che la (6) è verificata, onde la (2) è convergente in t_0.

3. Ovviamente la convergenza della (2) in un intervallo potrebbe farsi seguire da uno dei criteri superiormente esposti, quale ad esempio la verifica della (6), per tutti i punti dell'intervallo stesso, ma qui imposteremo il ragionamento in altro senso.

Dalla

$$P_s(t) = P_s(t_0) + \frac{t - t_0}{1!} P_s'(t_0) +$$

$$+ \frac{(t - t_0)^2}{2!} P_s''(t_0) + \ldots + \frac{(t - t_0)^{\mu_s - 1}}{(\mu_s - 1)!} P_s^{(\mu_s - 1)}(t_0)$$

segue

$$|P_s(t)| \leq |P_s(t_0)| + \frac{|t - t_0|}{1!} |P_s'(t_0)| +$$

$$+ \frac{|t - t_0|^2}{2!} |P_s''(t_0)| + \ldots + \frac{|t - t_0|^{\mu_s - 1}}{(\mu_s - 1)!} |P_s^{(\mu_s - 1)}(t_0)|$$

onde se in t_0 l'insieme dei valori $|P_s^{(r)}(t_0)|$ è limitato e, precisamente, per qualunque $s > s_0$ è

$$(12) \qquad |P_s^{(r)}(t_0)| < k'' \qquad (r = 0, 1, \dots, \mu_s - 1)$$

avremo

$$(13) \quad |P_s(t)| < k''\left(1 + \frac{|t-t_0|}{1!} + \frac{|t-t_0|^2}{2!} + \dots + \frac{|t-t_0|^{\mu_s-1}}{(\mu_s-1)!}\right) < k'' e^{|t-t_0|}.$$

Associando la (12) con altre condizioni considerate nel precedente paragrafo potremo enunciare criteri di convergenza della (1) in opportuni intervalli della variabile t. Ad esempio:

a) se esistono un punto $t_0 > 0$ *e un indice* s_0 *tali che, per qualunque* $s > s_0$, *sono verificate la* (12) *e la* (3), *la serie* (1) *è uniformemente convergente in qualunque intervallo finito positivo contenente* t_0.

Infatti sia (a, b) un tale intervallo $(0 < a \leq t \leq b)$, poichè per $s > s_0$ è verificata la (3), per s maggiore di un conveniente $s' \geq s_0$, si avrà $a_s < 0$. Allora la serie (2), a partire dal termine $(s_0 + 1)$-mo è maggiorata, per la (13), dalla serie

$$\sum_{s_0+1}^{\infty}{}_s\, k'' e^{|t-t_0|} e^{a_s t}$$

e quindi anche dalla

$$\sum_{s_0+1}^{\infty}{}_s\, k'' e^{b-a} e^{a_s t};$$

ma, a partire dal termine $(s' + 1)$-mo la serie stessa è maggiorata dalla serie

$$\sum_{s'+1}^{\infty}{}_s\, k'' e^{b-a} e^{a_s a}.$$

Questa serie, in base alla (3), è convergente per il criterio del rapporto e. per il noto criterio, varrà la convergenza uniforme della (1).

b) se esistono un punto $t_0 < 0$ *e un indice* s_0 *tali che, per qualunque* $s > s_0$, *sono verificate la* (12) *e la* (4), *la serie* (1) *è uniformemente convergente in qualunque intervallo finito negativo contenente* t_0.

Infatti sia (a, b) un tale intervallo $(a \leq t \leq b < 0)$; poichè per

$s > s_0$ è verificata la (4), per s maggiore di un conveniente $s' \geq s_0$, si avrà $a_s > 0$. Allora la serie (2), a partire dal termine $(s_0 + 1)$-mo è maggiorata, per la (13), dalla

$$\sum_{s_0+1}^{\infty}{}_s \, k'' e^{|t-t_0|} e^{a_s t}$$

e quindi anche dalla

$$\sum_{s_0+1}^{\infty}{}_s \, k'' e^{b-a} e^{a_s t} ;$$

ma a partire dal termine $(s' + 1)$-mo la serie stessa è maggiorata dalla serie

$$\sum_{s'+1}^{\infty}{}_s \, k'' e^{b-a} e^{a_s b} .$$

Donde, come prima, segue la convergenze uniforme della (1).

4. Per l'ipotesi relativa ai coefficienti dei polinomi $P_s(t)$ può porsi

$$P_s(t) = A_s(t) + i\, B_s(t) \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

dove $A_s(t)$ e $B_s(t)$ sono polinomi a coefficienti reali nella variabile, reale, t; sarà quindi

$$\frac{P_s(t)}{P_{s+1}(t)} = M_s(t) + iN_s(t)$$

essendo $M_s(t)$ e $N_s(t)$ funzioni razionali a coefficienti reali della variabile, reale, t.

Si avrà in tali ipotesi

$$\log \left| \frac{P_s(t)}{P_{s+1}(t)} \right| = \frac{1}{2} \log \{ M_s^2(t) + N_s^2(t) \} \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{14}$$

dove i logaritmi che figurano sono gli ordinari logaritmi reali, e osserviamo che questa eguaglianza non varrebbe per t variabile complessa. Però il suo secondo membro, anche per t variabile complessa, è funzione della t con infinite determinazioni, ciascuna delle quali è funzione olomorfa di t nell'intorno di ogni punto t_0 che non sia radice di nessuno dei due polinomi $P_s(t)$ e $P_{s+1}(t)$. Il primo membro della (14), invece, non è funzione olomorfa di t.

Per un determinato valore di s, e per $t = t_0$, con t_0 reale e tale che $P_s(t_0) \neq 0$ e $P_{s+1}(t_0) \neq 0$, si prenda la determinazione reale del secondo membro della (14): essa sarà sviluppabile, come del resto le altre determinazioni, in serie di TAYLOR nell'intorno di t_0 e tale sviiuppo, *per* t *reale*, varrà anche per il primo membro della stessa (14).

Supponiamo che, per s maggiore di un conveniente s_1, esista un intervallo (p, q) dell'asse reale t ed un rettangolo R (del piano complesso t) avente (p, q) come mediana così che nell'interno di R non cade alcun punto che sia radice di almeno un polinomio $P_s(t)$. Preso allora t_0 interno a (p, q) e detto Γ il massimo cerchio, di centro in t_0, i cui punti interni siano pure interni ad R, ognuno dei secondi membri delle (14), per $s > s_1$, resulterà sviluppabile in serie di TAYLOR, nell'intorno di t_0, convergente almeno nell'interno di Γ; tale sviluppo, *per* t *reale*, varrà anche per i primi membri cosicchè, per ogni $s > s_1$, avremo

$$\log\left|\frac{P_s(t)}{P_{s+1}(t)}\right| = \log\left|\frac{P_s(t_0)}{P_{s+1}(t_0)}\right| +$$

$$+ \frac{t-t_0}{1\,!} D_{t=t_0} \log\left|\frac{P_s(t)}{P_{s+1}(t)}\right| + \frac{(t-t_0)^2}{2\,!} D^2_{t=t_0} \log\left|\frac{P_s(t)}{P_{s+1}(t)}\right| + \ldots$$

e tutti questi sviluppi saranno convergenti all'interno di un certo intervallo (a, b) contenente t_0 nel proprio interno.

Perciò, per ogni $s > s_1$ e per ogni t tale che $a < t < b$, avremo

$$\log\left|\frac{P_s(t)}{P_{s+1}(t)}\right| + (a_s - a_{s+1})t = \log\left|\frac{P_s(t_0)}{P_{s+1}(t_0)}\right| +$$

$$(15) \qquad + (a_s - a_{s+1})t_0 + \frac{t-t_0}{1\,!}\left\{ D_{t=t_0} \log\left|\frac{P_s(t)}{P_{s+1}(t_0)}\right| + a_s - a_{s+1}\right\} +$$

$$+ \sum_{2}^{\infty}{}_r \frac{(t-t_0)^r}{r\,!} D^r_{t=t_0} \log\left|\frac{P_s(t)}{P_{s+1}(t_0)}\right|.$$

Supponiamo adesso che per $t = t_0$ esista un indice s_0 tale che, per qualunque $s > s_0$, sia verificata la (6) ed inoltre si abbiano le

$$(16) \qquad D_{t=t_0} \log\left|\frac{P_s(t)}{P_{s+1}(t_0)}\right| + a_s - a_{s+1} > h' > 0$$

$$(17) \qquad D^r_{t=t_0} \log\left|\frac{P_s(t)}{P_{s+1}(t_0)}\right| > h' \qquad (r = 2, 3, \ldots),$$

le quali manifestamente non sono incompatibili con la validità dello sviluppo (15).

Supponiamo ora $t \geq t_0$, e quindi $t_0 \leq t < b$; allora la (15), tenendo conto delle (6) (16) (17), per $s > s_2$ (essendo s_2 il maggiore dei due minori s_0 e s_1), ci fornisce

$$\log \left| \frac{P_s(t)}{P_{s+1}(t)} \right| + (a_s - a_{s+1})t > h'' \sum_0^\infty {}_r \frac{(t-t_0)^r}{r!} = h'' e^{t-t_0} > 0,$$

dove h'' è il minore dei numeri h ed h', onde la (6) è verificata per tutti i punti di (t_0, b) escluso al più b.

Nelle ipotesi superiori segue pertanto la convergenza della (2) in tutto (t_0, b) escluso al più b.

Non indugeremo sui criteri che, subordinatamente, possono ricavarsi, ma prima di chiudere queste righe, osserviamo che per

$$\mu_s = 1 \qquad b_s = 0 \qquad\qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

e

$$0 > a_1 > a_2 > \ldots > a_s > \ldots \qquad \lim_{s \to \infty} a_s = -\infty$$

la (1) si riduce alla serie di DIRICHLET [2]; mentre, se ancora è $\mu_s = 1$, ma $a_s = 0$ e la serie è uniformemente convergente in tutto $(-\infty, +\infty)$ la sua somma è una funzione quasi-periodica secondo BOHR e STEPANOFF [3].

Varrà ancora osservare che, volendosi separare le parti reale e immaginaria, la serie (1) può scriversi pure

$$(19) \qquad \sum_1^\infty {}_s e^{a_s t} [A_s(t) \cos b_s t - B_s(t) \operatorname{sen} b_s t] + i \sum_1^\infty e^{a_s t} [A_s(t) \operatorname{sen} b_s t + B_s(t) \cos b_s t]$$

avendosi posto

$$P_s(t) = A_s(t) + iB_s(t) \qquad\qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

dove $A_s(t)$ e $B_s(t)$ sono polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a $\mu_s - 1$ in t. Le due serie che compaiono in (19), quando con le $\mu_s = 1$ e $a_s = 0$ sono pure verificate le $b_s = s$, si riducono a due serie trigonometriche.

Come per casi particolari predetti, varrebbe la pena di condurne gli studi per altri.

[2] G. SANSONE, *Lezioni sulle teorie delle funzioni di una variabile complessa*. Cedam, Padova, 1947, Vol. II, pag. 1.

[3] S. CINQUINI, *Funzioni quasi-periodiche*, in « Quaderni matematici della Scuola Normale Superiore », Tacchi, Pisa, 1948-49, Pagg. 36-37, 72-73.