
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

VINCENZO CAPRA

Risoluzione dell'equazione algebrica di 4° grado per mezzo del regolo calcolatore logaritmico.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 13
(1958), n.1, p. 141–146.

Zanichelli

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_1_141_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_1_141_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

SEZIONE STORICO-DIDATTICA

Risoluzione dell'equazione algebrica di 4° grado per mezzo del regolo calcolatore logaritmico.

Nota di VINCENZO CAPRA (a Torino)

Sunto. - *Si deducono alcune trasformate della equazione di 4° grado le cui radici reali si possono determinare con una sola collocazione dello scorrevole del regolo calcolatore.*

Summary. - *By means of the slide-rule and on the ground of some transforms the real roots related to the fourth-order algebraic equation are found out with a single collocation of the slide.*

1₁. Con una sola collocazione dello scorrevole del regolo calcolatore logaritmico si possono risolvere le equazioni algebriche di 2° grado [1] e di 3° grado [2].

Ma anche l'equazione di 4° grado si può trasformare in modo che le radici reali della trasformata si possano determinare analogamente.

Supposto infatti che l'equazione di 4° grado sia già nella forma

$$(1) \quad f(x) = b_0 x^4 + b_2 x^2 + b_3 x + b_4 = 0$$

ponendo:

$$(2) \quad x = mz,$$

la (1) si trasforma in

$$(3) \quad b_0 m^2 z^2 + \frac{b_4}{m^2} \frac{1}{z^2} + \frac{b_2}{m} \frac{1}{z} = -b_3.$$

Eguagliando i coefficienti di $\frac{1}{z^2}$ ed $\frac{1}{z}$ si deduce

$$(4) \quad m = \frac{b_4}{b_3},$$

$$(5) \quad \varphi(z) \equiv Az^2 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} = E, \quad \left(A = \frac{b_0 b_4^3}{b_3^4}, \quad E = -\frac{b_2 b_4}{b_3^2} \right).$$

Le radici reali della (5) si determinano con una sola collocazione dello scorrevole:

— secondo lo schema di fig. 1a se lo scorrevole porta la scala dei reciproci dei quadrati ⁽¹⁾,

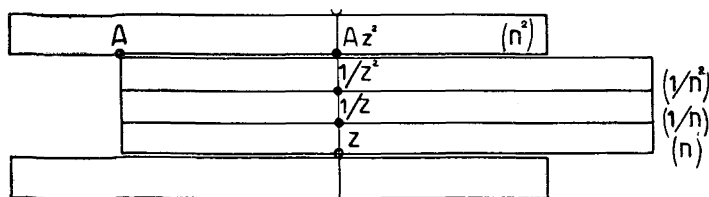


Fig. 1a

— secondo lo schema di fig. 1b se le scale sono quelle del sistema RIETZ (in questo caso lo scorrevole deve essere invertito).

Negli schemi delle figure 1a ed 1b:

- le linee orizzontali rappresentano le scale del regolo ((n) = scala base, (1/n) = scala dei reciproci, ecc. ⁽²⁾),
- la verticale rappresenta la linea di fede del corsoio.

Per determinare le radici:

— si imposta il valore A con il tratto iniziale dello scorrevole come indicato in fig. 1a o 1b,

— si cerca (per tentativi) una posizione del corsoio tale che la somma (con segno) delle tre letture indicate coi cerchietti pieni sotto la linea di fede eguagli il valore E,

— sotto la linea di fede si legge allora una soluzione z indicata col cerchietto vuoto,

⁽¹⁾ Per. es. nei regoli con scale sistema ARISTO-DARMSTADT.

⁽²⁾ Nella fig. 1b è stata mantenuta anche dopo l'inversione dello scorrevole la denominazione originaria delle scale.

— le posizioni del corsoio che conducono a soluzioni (reali) dell'equazione sono al più 4: se vi è motivo per ritenere che le esplorazioni fatte impostando il valore A con il tratto iniziale dello scorrevole non abbiano rivelato tutte le soluzioni, si dovrà ripetere l'operazione impostando il valore A con il tratto finale.

1₂. Per rendere più agevole la ricerca delle radici conviene ricordare che « se la somma dei quadrati delle radici è negativa vi sono certamente radici complesse (non essendo vero il viceversa) ».

Siccome poi per $z \rightarrow 0$ $\varphi(z) \rightarrow +\infty$ e per $z \rightarrow \pm\infty$ $\varphi(z) \rightarrow \infty$ col segno di A :

— se $A < 0$ la (5) ha certo una radice positiva (oppure tre) ed una negativa (oppure tre).

— se $A > 0$ le radici reali sono riunite a gruppi di due collo stesso segno.

Inoltre l'esame di $\varphi(\pm 10^m) - E$, con m intero relativo, consente di stabilire uno o più intervalli in cui cadono le radici. Ciò in base al prevalere, variando m , del primo o del secondo termine della (5).

Qualora la determinazione di tutte le radici presentasse difficoltà, dopo averne determinate due si può abbassare di grado la (1) in modo da giudicare della realtà delle radici residue e calcolarle.

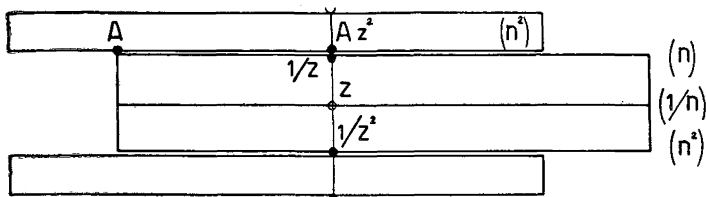


Fig. 1b

Infine i valori x_i delle radici si migliorano calcolando mediante la (1) i residui $r_i = f(x_i)$ e quindi modificando opportunamente x_i in modo che risulti $r_i \cong 0$. Per questi calcoli conviene attenersi allo schema di RUFFINI che si presta bene all'uso del regolo.

1₃. Esempio — Determinare le radici reali dell'equazione

$$(6) \quad f(y) = y^4 - 14y^3 - 12y^2 - 29y + 2 = 0$$

disponendo di un regolo di base cm. 12.5 con scale ARISTO-DARMSTADT.

Posto $y = x - 3.5$ e per mezzo del regolo si ottengono i coefficienti della equazione nella forma (1) seguendo lo schema di RUFFINI.

	1	- 14	- 12	- 29	2
3.5	1	- 10.5	- 48.75	- 199.8	- 697 $\simeq b_4$
	1	- 7	- 73.25	- 456.3 $\simeq b_3$	
	1	- 3.5	- 85.47 $\simeq b_2$		

Seguono poi (v. (4) e (5): $m \simeq 1.525$, $A \simeq -0.00778$, $E \simeq -0.286$.

Nella (6) la somma dei quadrati delle radici è $196 + 24 > 0$ e quindi non si hanno indicazioni per le radici complesse. Siccome è $A < 0$ la (5) ha almeno una radice negativa e una positiva (v. 1.2). Da $\varphi(\pm 10^m) - E = -0.00778 \cdot 10^{2m} + 10^{-2m} + 10^{-m} + 0.286$ si deduce che vi sono radici negli intervalli $(-10; -0,1)$ e $(1; 10)$.

Impostando A con il tratto iniziale si osserva che la somma $Az^2 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}$ cresce in valore assoluto con $|z|$ finchè in corrispondenza a $z = -2.25$ si legge:

$$Az^2 \simeq -0.0392, \quad \frac{1}{z^2} \simeq 0.198, \quad \frac{1}{z} \simeq -0.445, \quad \text{la cui somma è } -0.2862.$$

Impostando A con il tratto finale, in corrispondenza a $z = 7.5$ si legge:

$$Az^2 \simeq -0.437, \quad \frac{1}{z^2} \simeq 0.0178, \quad \frac{1}{z} \simeq 0.134, \quad \text{la cui somma è } -0.2852.$$

Si hanno così le radici della (6):

$$y_1 \simeq 1.525 \cdot (-2.25) + 3.5 \simeq 0.065, \quad y_2 \simeq 1.525 \cdot 7.5 + 3.5 \simeq 14.94.$$

Si migliorano i valori precedenti con il calcolo dei residui (v. 1.2):

$$- \quad f(0.065) \simeq 0.06; \quad f(0.067) \simeq 0$$

$$- \quad f(14.94) \simeq 20.65; \quad f(14.92) \simeq -48.8; \quad f(14.93) \simeq -7.7.$$

Si assumono in definitiva i valori approssimati

$$(7) \quad y_1 \simeq 0.067, \quad y_2 \simeq 14.93.$$

Abbassando poi di grado la (6) si ottiene

$$y^2 + y + 2.004 \simeq 0,$$

e quindi la (6) non ha altre radici reali.

Siccome le radici esatte sono $y_1 = 0.06696 \dots$ e $y_2 = 14.93303 \dots$, i valori (7) si possono ritenere soddisfacenti tenendo conto che tutti i calcoli ausiliari e di miglioramento sono stati eseguiti col regolo da cm. 12.5.

2. La trasformata (5) non è però l'unica adatta alla risoluzione col regolo calcolatore. Fra le varie possibili si indicheranno quelle che si prestano alla risoluzione con entrambi i tipi di regolo.

Dalla (3):

a) eguagliando i coefficienti di z^2 e $\frac{1}{z}$ si ottiene $m = \sqrt[3]{\frac{b_3}{b_0}}$ e quindi

$$(8) \quad z^2 + \frac{B}{z^2} + \frac{1}{z} = E, \quad \left(B = \frac{b_4}{b_3} \sqrt[3]{\frac{b_0}{b_3}}, \quad E = -\frac{b_2}{\sqrt[3]{b_0 b_3^2}} \right):$$

b) dividendo per $b_0 m^2$ ed eguagliando il valore assoluto del coefficiente di $\frac{1}{z^2}$ al quadrato del coefficiente di $\frac{1}{z}$ si ha $m = \sqrt{\pm \frac{b_3^2}{b_0 b_4}}$ e successivamente

$$(9) \quad z^2 \pm \frac{C^2}{z^2} + \frac{C}{z} = E, \quad \left(C^2 = \pm \frac{b_0 b_4^3}{b_3^4}, \quad C = \pm \frac{b_4}{b_3} \sqrt{\pm \frac{b_0 b_4}{b_3^2}}, \quad E = \mp \frac{b_2 b_4}{b_3^2} \right)$$

dove per C^2 , C , E e nella (9) valgono insieme i segni superiori o gli inferiori e la scelta è fatta in modo che sia $C^2 > 0$.

I primi membri delle (8) e (9) tendono ad infinito per $z \rightarrow 0$, e per $z \rightarrow \infty$, quindi ne seguono ragionamenti analoghi a quelli fatti in 1.2 per la (5).

Per le impostazioni e le letture sul regolo si usano le scale secondo le indicazioni della Tab. 1. per la (8) e della Tab. 2 per la (9). La seconda colonna di ogni Tabella è relativa ai regoli con scala dei reciproci dei quadrati (le scale indicate si riferiscono alla fig. 1a); la terza colonna è relativa agli altri regoli (le scale però si riferiscono alla fig. 1b), e bisogna ricordare che lo scorrevole deve essere invertito.

In entrambe le tabelle è precisato se le scale indicate sono sul fisso o sullo scorrevole.

B	(n^2)	(n^2)	fisso
B/z^2	(n^2)	(n^2)	»
z^2	$(1/n^2)$	(n^2)	scorrevole
$1/z$	(n)	$(1/n)$	
z	$(1/n)$	(n)	»

Tab. 1.

C^2	(n^2)	(n^2)	fisso
C^2/z^2	(n^2)	(n^2)	»
z^2	$(1/n^2)$	(n^2)	scorrevole
C/z	(n)	(n)	fisso
z	$(1/n)$	(n)	scorrevole

Tab. 2.

Si noti che « lo schema indicato nella terza colonna della tab. 2 è utilizzabile anche con regoli che non hanno la scala dei reciproci ».

BIBLIOGRAFIA

- [1] FR. A. WILLERS, *Methoden der Praktischen Analysis*, (Berlino 1950).
- [2] R. ZURMÜHL, *Praktische Mathematik* (Berlino 1953).