Bollettino Unione Matematica Italiana

Lina Zuffi

Sulla velocità media dell'energia nei cristalli assorbenti.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.1, p. 126–127.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_1_126_0>

Sulla velocità media dell'energia nei cristalli assorbenti.

Nota di LINA ZUFFI (a Cesena)

Sunto. - *Si dimostra che in un mezzo anisotropo conduttore la velocità di fase coincide con la componente, nella direzione di propagazione, della velocità media dell' energia.*

Summary. - *Author shows that, in anisotropic conductor medium, the phase velocity is equal to the component of flow energy velocity in the direction of propagation.*

1) Com'è noto, nei mezzi isotropi conduttori, la velocità media dell'energia coincide con la velocità di fase [1]. In questa nota estenderò il teorema ora enunciato al caso dei mezzi anisotropi. Più precisamente dimostrerò come, in un mezzo comunque anisotropo ed assorbente (però con omografia della conduttività simmetrica), la velocità di fase di un' onda piana coincide con la componente della velocità media dell'energia, nella direzione di propagazione dell'onda stessa.

2) Sia s la direzione di propagazione dell'onda piana sinusoidale di pulsazione ω, u la velocità media dell'energia; la sua

(1) J. Cfr. VAN MIEGHEM, *Propagation des ondes électromagnétiques en milieu homogène*, Paris, Gauthier-Villars, 1944, pag. 46.

componente lungo s è espressa dalla formula [2]:

$$u \times s = \frac{2\mathfrak{R}[E \wedge H^* \times s]}{\mathfrak{R}[E \times D^*] + \mathfrak{R}[H \times B^*]} \tag{1}$$

dove E, H, D, B sono vettori complessi che rappresentano rispettivamente il campo elettrico, il campo magnetico, il vettore spostamento e il vettore induzione dell'onda piana; D^* è il vettore complesso coniugato di D e analoga definizione vale per E^*, H^*, B^*; $\mathfrak{R}$ indica parte reale.

Ora, se γ è l'omografia della conduttività, le equazioni di MAXWELL per campi sinusoidali (j indica l'unità immaginaria) sono:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} H = j\omega D + \gamma E \\ \operatorname{rot} E = -j\omega B. \end{cases} \tag{2}$$

Ma, nel caso di un'onda piana, in un punto generico P, D, B, E, H, valgono un vettore costante moltiplicato per $\exp[-j\omega(\beta - j\alpha)(P - O) \times s]$ dove exp indica la funzione esponenziale, O un punto fisso, β ed α due costanti reali (in particolare l'inverso di β vale la velocità di fase v).

Si ha allora:

$$\operatorname{rot} H = -j\omega(\beta - j\alpha)s \wedge H$$

e analoga formula per rot E, sicchè dalle (2) si ricava facilmente

$$\begin{cases} D = (\beta - j\alpha)H \wedge s + j\dfrac{\gamma E}{\omega} \\ B = (\beta - j\alpha)s \wedge E \end{cases} \tag{3}$$

e tenendo presente che, essendo γ reale e simmetrica, è reale anche $\gamma E \times E^*$ si ha:

$$u \times s = \frac{2\mathfrak{R}[E \wedge H^* \times s]}{\mathfrak{R}[+j\dfrac{\gamma}{\omega}E^* \times E] + \mathfrak{R}[(\beta + j\alpha)(E \times H^* \wedge s) + \mathfrak{R}[(\beta + j\alpha)(H \times s \wedge E^*)]}. \tag{4}$$

Allora, posto per brevità $E \wedge H^* \times s = l + jm$ (l e m reali) si ha:

$$u \times s = \frac{l}{\mathfrak{R}(\beta + j\alpha)l} = \frac{1}{\beta} = v. \tag{5}$$

Il teorema enunciato in principio è in tal modo completamente provato.

[2] Cfr. loco citato pag. 11. A rigore questa formula si riferisce alla velocità istantanea; la velocità media, da noi considerata, si ottiene (cfr. ancora loco citato pagg. 45, 46) sostituendo il numeratore e il denominatore coi loro valori medi. Si ha così la (1) del testo.