Bollettino Unione Matematica Italiana

Cataldo Agostinelli

Sulle equazioni di Schrödinger integrabili per separazione di variabili.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.1, p. 11–23.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_1_11_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1958.

Sulle equazioni di Schrödinger integrabili per separazione di variabili.

Nota di CATALDO AGOSTINELLI (a Torino)

Sunto. - *Come nel n. 1.*

1. È ben nota l'importanza dell'equazione delle onde di SCHRÖDINGER nella Fisica teorica e quindi della sua integrazione nei casi di maggiore interesse che in essa si presentano.

Ora questi casi rientrano fortunatamente, quasi sempre, in quei tipi di equazioni integrabili per separazione di variabili. Da ciò è nata la questione, analoga a quella che si presenta nella Dinamica analitica, di determinare tutti i tipi di coordinate curvilinee, per cui l'equazione di SCHRÖDINGER, nel caso più generale di n variabili, sia integrabile per separazione di variabili.

Questo problema fu già ravvisato da ROBERTSON (1) nel 1927, considerando senz'altro coordinate curvilinee ortogonali e dimostrando chi i coefficienti della forma quadratica che definisce la varietà riemanniana corrispondente devono essere della forma assegnata da STÄCKEL per gli analoghi problemi della Dinamica.

Successivamente EISENHART ( ), partendo dal presupposto che i coefficienti dell'equazione di SCHRÖDINGER (sempre in coordinate curvilinee ortogonali), devono essere del tipo di STÄCKEL, stabilì le condizioni alle quali devono soddisfare quei coefficienti perchè sia possibile la separazione delle variabili e determinò esplicitamente le loro espressioni.

Riprendendo la questione. di attuale interesse per i cultori della Fisica teorica, in questa nota mi sono proposto di stabilire intanto direttamente le condizioni che devono essere verificate, affinchè l'equazione di SCHRÖDINGER, scritta in coordinate curvilinee generali (non ortogonali), ammetta la separazione delle variabili, ed ho dimostrato che se nei coefficienti di questa equazione nessuna coordinata è ignorabile, questo sistema di coordinate

(1) Habilitationsschrift Halle.

(2) L. P. EINSENHART, *Separable systems of Stäckel*, « Annales of Mathematics ». vol. 35, n. 2.

curvilinee deve essere necessariamente ortogonale. Ma ho dimostrato altresì che è ancora possibile la separazione delle variabili in coordinate curvilinee non tutte ortogonali, purchè vi siano delle coordinate ignorabili. Questo caso, di cui è manifesta l'importanza quando intervengono delle coordinate cicliche, è naturalmente sfuggito ai precedenti autori essendosi essi limitati a considerare solo coordinate ortogonali.

Basandomi quindi sui risultati da me conseguiti nei lavori relativi alla trasformazione delle equazioni della Dinamica e all'integrazione di queste equazioni per separazione di variabili, ho esaurito in questa nota la questione proposta nel caso di coordinate curvilinee ortogonali, riducendo l'integrazione dell'equazione di SCHRÖDINGER alla risoluzione di equazioni di RICCATI, e in particolare, a quadrature. Il caso in cui nell'equazione di SCHRÖDINGER vi sono coordinate ignorabili, e quindi la separazione delle variabili si può ottenere in coordinate curvilinee non tutte ortogonali, sarà studiato in altra nota.

2. L'equazione delle onde di SCHRÖDINGER è notoriamente

$$\Delta_2 U + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - V)U = 0\,, \tag{1}$$

dove E è l'energia totale del corpuscolo ed m la sua massa che si suppongono costanti; h è inoltre la costante di PLANCK, V l'energia potenziale ed U è lo scalare incognito del campo. Con riferimento ad una varietà riemanniana V_n il cui quadrato dell'elemento lineare è

$$ds^2 = \sum_{1}^{n}{}_{ij}\, a_{ij}dx_i dx_j \tag{2}$$

il laplaciano $\Delta_2 U$ della funzione U, risulta

$$\Delta_2 U = \operatorname{div} \operatorname{grad} U$$

dove il gradiente di U va inteso calcolato tangenzialmente alla varietà metrica V_n e la corrispondente divergenza va calcolata nel sistema di coordinate generali (x_i).

Ponendo

$$U = e^W \tag{3}$$

si ha

$$\operatorname{grad} U = e^W \operatorname{grad} W\,;\quad \Delta_2 U = e^W[\Delta_2 W + (\operatorname{grad} W)^2]$$

e l'equazione (1) porge

$$\Delta_2 W + (\operatorname{grad} W)^2 + k^2(E - V) = 0\,, \tag{4}$$

dove si è indicata con k^2 la costante $8\pi^2 m/h^2$.

Si ha ora

$$\text{grad } W = \sum_1^n{}_i \frac{\partial W}{\partial x_i} \text{ grad } x_i ;$$

(5)
$$(\text{grad } W)^2 = \sum_1^n{}_{ij} a^{ij} \frac{\partial W}{\partial x_i} \frac{\partial W}{\partial x_j}$$

essendo

$$a^{ij} = \text{grad } x_i \times \text{grad } x_j$$

l' elemento reciproco di a_{ij} nel discriminante della forma quadratica (2), Si ricava inoltre, indicando con $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ il punto che descrive la varietà metrica definita dalla (2) ([3]),

$$\Delta_2 W = \text{div grad } W = \sum_1^n{}_i \frac{\partial \text{ grad } W}{\partial x_i} \times \text{grad } x_i = \sum_1^n{}_{ij} a^{ij} \frac{\partial \text{ grad } W}{\partial x_i} \times$$
$$\times \frac{\partial P}{\partial x_i} = \sum_1^n{}_{ij} a^{ij} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} - \text{grad } W \times \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

cioè

$$\Delta_2 W = \sum_1^n{}_{ij} a^{ij} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_1^n{}_{hk} a^{hk} \frac{\partial W}{\partial x_h} \gamma_{ij, k} \right)$$

dove

(6)
$$\gamma_{ij, k} = \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j} \times \frac{\partial P}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \right),$$

rappresenta il simbolo di CHRISTOFFEL di 1ª specie.

Ponendo ancora per semplicità

(7)
$$\Gamma^h = \sum_1^u{}_{ij} a^{ij} \sum_1^n{}_k a^{hk} \gamma_{ij, k}$$

risulta

$$\Delta_2 W = \sum_1^n{}_{ij} a^{ij} \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_1^n{}_h \Gamma^h \frac{\partial W}{\partial x_h}$$

e, in virtù di questa e della (5), l' equazione (4) diventa

(8)
$$\sum_1^n{}_{ij} a^{ij} \frac{\partial W}{\partial x_i} \frac{\partial W}{\partial x_j} + \sum_1^n{}_{ij} a^{ij} \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_1^n{}_h \Gamma^h \frac{\partial W}{\partial x_h} + k^2(E - V) = 0 .$$

Ciò premesso, integrare la (1), o ciò che è lo stesso la (8), per separazioni di variabili, equivale a trovare una funzione W che la soddisfi e che sia della forma

(9)
$$W = \sum_1^n{}_i W_i(x_i) ;$$

([3]) Cfr. P. BURGATTI, T. BOGGIO, C. BURALI-FORTI, *Geometria Differenziale* Cap. VII, dal n. 15 al n. 19 (Zanichelli, Bologna, 1930).

Questo sarà possibile soltanto in corrispondenza a particolari sistemi di coordinate curvilinee (x_i) e il problema consiste allora nel trovare questi sistemi di coordinate, ovvero nel determinare tutte le varietà riemanniane V_n, o i coefficienti a_{ij} della forma quadratica (2), per cui le corrispondenti equazioni (8), che discendono dall'equazione di SCHRÖDINGER, siano integrabili per separazione di variabili.

3. Se l'equazione (8) si può soddisfare con una funzione W della forma (9), ponendo

$$p_i = \frac{dW_i}{dx_i}, \quad p_i' = \frac{dp_i}{dx_i} = \frac{d^2 W_i}{dx_i^2}, \quad (i = 1, 2, \dots, n); \tag{10}$$

si ha da essa

$$S \equiv \sum_{1}^{n}{}_{ij}\, a^{ij} p_i p_j + \sum_{1}^{n}{}_{i}\, a^{ii} p_i' - \sum_{1}^{n}{}_{h}\, \Gamma^h p_h - k^2 V = -k^2 E. \tag{11}$$

Il primo membro di questa equazione si è indicato con S, mentre il secondo membro è una costante. La S dipende dalle x_i, dalle p_i e dalle p_i', le quali ultime sono da considerare ciascuna funzione della corrispondente coordinata a norma delle (10). Derivando allora rispetto a una generica coordinata x_r $(r = 1, 2, \dots, n)$, e osservando che

$$\frac{d}{dx_r} = \frac{\partial}{\partial x_r} + p_r' \frac{\partial}{\partial p_r} + p''_r \frac{\partial}{\partial p_r'}$$

si ha

$$\frac{\partial S}{\partial x_r} + \frac{\partial S}{\partial p_r} p_r' + \frac{\partial S}{\partial p_r'} p''_r = 0,$$

ed essendo $\dfrac{\partial S}{\partial p_r'} = a^{rr}$, si ricava

$$p''_r = -\left(\frac{\partial S}{\partial x_r} + \frac{\partial S}{\partial p_r} p'_r\right) / a^{rr}, \quad (r = 1, 2, \dots, n). \tag{12}$$

Per l'integrabilità di questa equazione, derivando rispetto ad un'altra coordinata x_s (con $s \neq r$), si deve avere identicamente

$$\frac{dp''_r}{dx_s} \equiv -\frac{d}{dx_s}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_r} + \frac{\partial S}{\partial p_r} p_r'\right) / a^{rr}\right] = 0, \quad \text{per } s \neq r,$$

cioè

$$\frac{\partial}{\partial x_s}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_r} + \frac{\partial S}{\partial p_r} p_r'\right) / a^{rr}\right] + \frac{\partial}{\partial p_s}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_r} + \frac{\partial S}{\partial p_r} p_r'\right) / a^{rr}\right] \cdot p_s' +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial p_s'}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_r} + \frac{\partial S}{\partial p_r} p_r'\right) / a^{rr}\right] \cdot p''_s = 0.$$

Osservando che

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x_r \partial p_s'} = \frac{\partial a^{ss}}{\partial x_r}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial p_r \partial p_s'} = 0,$$

ed eliminando la p_s'' per mezzo della (12), si ottiene

$$(13) \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial x_r \partial x_s} + \frac{\partial^2 S}{\partial x_s \partial p_r} p_r' + \frac{\partial^2 S}{\partial x_r \partial p_s} p_s' + \frac{\partial^2 S}{\partial p_r \partial p_s} p_r' p_s' -$$

$$- \frac{\partial \log a^{rr}}{\partial x_s} \left(\frac{\partial S}{\partial x_r} + \frac{\partial S}{\partial p_r} p_r' \right) - \frac{\partial \log a^{ss}}{\partial x_r} \left(\frac{\partial S}{\partial x_s} + \frac{\partial S}{\partial p_s} p_s' \right) = 0, \quad (s \neq r).$$

Questa equazione dovrà essere soddisfatta identicamente, qualunque siano i valori delle p e delle p'. Segue che deve essere intanto nullo il termine di 2° grado nelle p', cioè

$$(14) \quad \frac{\partial^2 S}{\partial p_r \partial p_s} p_r' p_s' \equiv a^{rs} p_r' p_s' = 0, \quad (r, s = 1, 2, \dots, n; \quad r \neq s).$$

Ora, *se nessuna delle* p *è costante*, la precedente condizione richiede che sia

$$(15) \quad a^{rs} \equiv \operatorname{grad} x_r \times \operatorname{grad} x_s = 0, \qquad (r, s = 1, 2, \dots, n; \ (r \neq s).$$

Abbiamo così il teorema: *Affinchè l'equazione* (1) *di Schrödinger in un sistema di coordinate curvilinee* $x_1, x_2, \dots, x_n$, *sia integrabile con una funzione* $U = e^{\sum_1^n i W_i(x_i)}$, *in cui nessuna delle* $W_i(x_i)$ *si riduca ad una funzione lineare della relativa coordinata, le ipersuperficie coordinate* $x_1 = \text{cost.}, x_2 = \text{cost.}, \dots, x_n = \text{cost.}$, *della corrispondente varietà metrica definita dalla* (2), *devono necessariamente formare una* n^pla^ *di ipersuperficie ortogonali.*

4. Ma la condizione (14) si può anche soddisfare supponendo alcune delle p costanti, per esempio $p_1, p_2, \dots, p_m$, $(m < n)$; si può supporre cioè che $W_1(x_1), W_2(x_2), \dots, W_m(x_m)$, siano funzioni lineari rispettivamente di $x_1, x_2, \dots, x_m$. In tal caso si può porre

$$a^{ij} \neq 0, \quad \text{per} \quad i, j = 1, 2, \dots, m, \quad \text{con} \quad j \neq i;$$
$$\text{ed} \quad a^{rs} = 0, \quad \text{per} \quad r, s = m+1, \dots, n, \quad \text{con} \quad r \neq s.$$

Si avrà allora $\frac{dW_i}{dx_i} = c_i$ (costante), per $i = 1, 2 \dots, m$, e quindi, a meno di una costante additiva inessenziale sarà

$$W = \sum_1^m {}_i c_i x_i + \sum_{m+1}^n {}_r W_r(x_r).$$

Essendo in questo caso $p_l' = 0$, $p_l'' = 0$, per $l = 1, 2, \dots, m$, la (12) porge

$$\frac{\partial S}{\partial x_l} = 0, \quad \text{per} \quad l = 1, 2, \dots, m$$

e poichè questa dovrà essere verificata identicamente, avuto riguardo all'espressione (11) di S segue che sarà

$$\frac{\partial a^{ij}}{\partial x_l} = 0, \quad \frac{\partial \Gamma^h}{\partial x_l} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x_l} = 0, \qquad (i, j, h = 1, 2, \dots, n;\ l = 1, 2, \dots, m),$$

le quali mostrano che $x_1, x_2, \dots, x_m$ saranno coordinate ignorabili nei coefficienti della forma quadratica (2) e nella funzione V. Possiamo allora enunciare il teorema:

Condizione necessaria affinchè l'equazione di Schrödinger sia integrabile per separazione di variabili in un sistema di coordinate curvilinee non completamente ortogonali, è che i coefficienti dell'equazione e la funzione potenziale V, *ammettano uno stesso numero di coordinate ignorabili.*

5. La determinazione dei coefficienti a_{ij} e della funzione V nel caso considerato nel n° precedente sarà effettuata in un'altra nota di prossima pubblicazione. Qui intendo ora espletare il calcolo nel caso in cui la (14) si soddisfa mediante la posizione (15), in cui cioè la forma quadratica (2) è ortogonale, cioè del tipo

$$ds^2 = \sum_1^n{}_i\, a_{ii} dx_i^2 . \tag{16}$$

Dalla (11) si ha che l'espressione di S diventa in questo caso

$$S = \sum_1^n{}_i\, a^{ii}(p_i^2 + p_i') - \sum_1^n{}_h\, \Gamma^h p_h - k^2 V \tag{17}$$

con

$$\Gamma^h = \sum_1^n{}_i\, a^{ii} a^{hh} \gamma_{ii,h} . \tag{18}$$

Sviluppando quindi la (13) si ha che i termini bilineari in $p_r p'_r$ e in $p_s p'_s$, si elidono. Uguagliando poi a zero i coefficienti dei termini rispettivamente di: 2° grado nelle p, lineari nelle p, lineari nelle p', e infine quelli indipendenti dalle p e p', si hanno le seguenti equazioni

$$\frac{\partial^2 a^{ii}}{\partial x_r \partial x_s} - \frac{\partial \log a^{rr}}{\partial x_s}\frac{\partial a^{ii}}{\partial x_r} - \frac{\partial \log a^{ss}}{\partial x_r}\frac{\partial a^{ii}}{\partial x_s} = 0, \tag{19}$$

$$(i,\ r,\ s = 1,\ 2, \dots, n;\ r \neq s),$$

$$\frac{\partial \Gamma^h}{\partial x_r \partial x_s} - \frac{\partial \log a^{rr}}{\partial x_s}\frac{\partial \Gamma^h}{\partial x_r} - \frac{\partial \log a^{ss}}{\partial x_r}\frac{\partial \Gamma^h}{\partial x_s} = 0, \quad (h = 1, 2, \dots, n), \tag{20}$$

$$\frac{\partial^2 a^{rr}}{\partial x_r \partial x_s} - \frac{\partial \log a^{rr}}{\partial x_s}\frac{\partial a^{rr}}{\partial x_r} - \frac{\partial \log a^{ss}}{\partial x_r}\frac{\partial a^{rr}}{\partial x_s} - a^{rr}\frac{\partial}{\partial x_s}(\sum_1^n{}_i\, a^{ii}\gamma_{ii,\,r}) = 0, \tag{21}$$

$$\frac{\partial^2 a^{ss}}{\partial x_r \partial x_s} - \frac{\partial \log a^{rr}}{\partial x_s}\frac{\partial a^{ss}}{\partial x_r} - \frac{\partial \log a^{ss}}{\partial x_r}\frac{\partial s^{ss}}{\partial x_s} - a^{ss}\frac{\partial}{\partial x_r}(\sum_1^n{}_i\, a^{ii}\gamma_{ii,\,s}) = 0, \tag{22}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_r \partial x_s} - \frac{\partial \log a^{rr}}{\partial x_s}\frac{\partial V}{\partial x_r} - \frac{\partial \log a^{ss}}{\partial x_r}\frac{\partial V}{\partial x_s} = 0, \quad (r \neq s). \tag{23}$$

Poichè la (18) deve sussistere anche per $i = r$, e per $i = s$, $(r \neq s)$, dalla (21) e dalla (22) segue che deve essere

$$\frac{\partial}{\partial x_s}(\sum_1^n{}_i\, a^{ii}\gamma_{ii,\,r}) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x_r}(\sum_1^n{}_i\, a^{ii}\gamma_{ii,\,s}) = 0, \quad (r \neq s), \tag{24}$$

la seconda delle quali coincide con la prima scambiando gli indici r, s. Basta allora considerare la prima. Osservando che nel caso in considerazione è $a_{ir} = 0$, per $i \neq r$ ed $a_{ii} = 1/a^{ii}$, essa porge

$$\frac{\partial^2 \log a^{rr}}{\partial x_r \partial x_s} - \frac{1}{2}\sum_1^n{}_i \frac{\partial^2 \log a^{ii}}{\partial x_r \partial x_s} = 0, \quad (r \neq s)\,. \tag{25}$$

Osserviamo ancora che ponendo per semplicità

$$G_h = \sum_1^n{}_i\, a^{ii}\gamma_{ii,\,h}\,, \tag{26}$$

si ha dalla (18): $\Gamma^h = a^{hh}G_h$. Allora, tenendo conto che a^{hh} soddisfa alla (19), (per $i = k$), e che per $h \neq r \neq s$, si ha per la (24), $\frac{\partial G_h}{\partial x_r} = 0$, $\frac{\partial G_h}{\partial x_s} = 0$, si riconosce facilmente che per $h \neq r \neq s$, la (20) è conseguenza della (19) e della (24).

Per $h = r$, e per $h = s$, $(r \neq s)$, la (20) risulta ancora conseguenza della (19) ove si faccia $i = r$, oppure $i = s$, tenendo inoltre presente le (24).

Concludendo non resta da considerare che la condizione (19) per tutti i valori dell'indice i da 1 ed n, nonchè le condizioni (25). Le (19) coincidono con le condizioni alle quali devono soddisfare gli elementi reciproci dei coefficienti della forma quadratica ortogonale (16), affinchè le equazioni delle geodetiche della varietà riemanniana corrispondente siano integrabili per separazione di variabili, o, se si vuole, affinchè un problema dinamico di energia cinetica $T = \frac{1}{2}\sum_1^n{}_i\, a_{ii}x_i'^2$, sia pur esso integrabile per separazione di variabili [4].

I cofficienti $a_{ii} = 1 / a^{ii}$ del nostro problema appartengono dunque a quella classe di forme quadratiche ortogonali che definiscono i problemi detti di STÄCKEL; ma essi devono ora verificare in più le condizioni (25). Una volta determinati questi coefficienti le (23) forniranno la funzione potenziale V.

6. Scambiando nella (25) gli indici r, s, e sottraendo quindi membro a membro, si ricava

$$\frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_s} \log \frac{a^{rr}}{a_{ss}} = 0, \quad (r \neq s). \tag{27}$$

Inoltre, poichè la (25) equivale anche alla

$$\frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_s} \log \frac{a^{rr}}{a^{ss}} - \sum_{\substack{1 \\ i \neq r \neq s}}^{n}{}_i \frac{\partial^2 \log a^{ii}}{\partial x_r \partial x_s} = 0,$$

segue

$$\sum_{\substack{1 \\ i \neq r \neq s}}^{n}{}_i \frac{\partial^2 \log a^{ii}}{\partial x_r \partial x^s} = 0. \tag{28}$$

Ponendo

$$a_{rr} = 1 / a^{rr} = \varkappa_r(x_r) \cdot \lambda_r, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n), \tag{29}$$

con $\varkappa_r$ funzione arbitraria della sola x_r, e λ_r funzione da determinare, la (27) porge

$$\frac{\partial^2 \log \lambda_r}{\partial x_r \partial x_s} = \frac{\partial^2 \log \lambda_s}{\partial x_r \partial x_s}. \tag{30}$$

L'equazione (30) si soddisfa assumendo

$$\lambda_r = \prod_{1}^{n}{}'_j (\psi_j - \psi_r), \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

dove ciascuna ψ è funzione arbitraria del solo parametro che ha lo stesso indice della ψ, e nella quale l'apice nel segno di prodotto indica che è escluso il valore r per l'indice j.

La (29) porge allora

$$a_{ii} = 1 / a^{ii} = \varkappa_i(x_i) \prod_{1}^{n}{}'_j (\psi_j - \psi_i); \tag{31}$$

[4] Cfr. C. AGOSTINELLI, *Sopra l'integrazione per separazione di variabili dell'equazione dinamica di Hamilton-Jacobi*, Parte III, § 2, » Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino », Serie 2ª, Tomo 69, Parte I, a. 1937. Cfr. anche: T. LEVI-CIVITA, *Sulla integrazione della equazione di Hamilton-Jacobi per separazione di variabili*, « Math. Ann. », B. LIX, 1904, pp. 383-397.

Con questi valori dei coefficienti a_{ii}, si ha

$$\frac{\partial^2 \log a^{ii}}{\partial x_r \partial x_s} = 0\,, \quad \text{per} \quad r \neq s \neq i\,, \tag{31}$$

e la (28) risulta identicamente verificata. Inoltre, osservando che la (19) si può scrivere anche nel modo seguente

$$\frac{\partial^2 \log a_{ii}}{\partial x_r \partial x_s} - \frac{\partial \log a_{ii}}{\partial x_r}\frac{\partial \log a_{ii}}{\partial x_s} + \frac{\partial \log a_{rr}}{\partial x_s}\frac{\partial \log a_{ii}}{\partial x_r} +$$

$$+ \frac{\partial \log a_{ss}}{\partial x_r}\frac{\partial \log a_{ii}}{\partial x_s} = 0, \quad (r \neq s)\,,$$

si ha che anche questa è identicamente soddisfatta per ogni valore dell'indice i. Tutte le condizioni sono dunque verificate e la forma quadratica ortogonale che si ottiene coi coefficienti (31) risulta

$$ds^2 = \sum_1^n{}_i \, [\varkappa_i(x_i) \prod_1^n{}'_j \, (\psi_j - \psi_i)] dx_i^2 \tag{32}$$

la quale coincide con quella che si riscontra nella teoria della trasformazione delle equazioni della Dinamica, quando si cercano i *sistemi dinamici corrispondenti* nel senso di PAINLEVÉ ([5]).

Per quanto riguarda ora la determinazione della funzione potenziale V, che dovrà verificare le condizioni (23), non c'è altro da osservare che quelle condizioni sono le medesime alle quali soddisfa il potenziale delle forze nei problemi dinamici di STÄCKEL. In base a risultati noti si ha quindi

$$V = \sum_1^n{}_i \, B_i(x_i) a^{ii} \equiv \sum_1^n{}_i \, B_i(x_i) / a_{ii}\,, \tag{33}$$

dove B_i è funzione arbitraria della sola coordinata x_i. Tenendo conto delle (19), si verifica subito che la (33) soddisfa identicamente alle equazioni (23).

7. Riprendiamo ora l'equazione (11) nella quale va posto $a^{ij} = 0$, per $j \neq i$.

Osserviamo intanto che dalla (18) si deduce

$$\Gamma^h = a^{hh} \sum_1^n{}_i \, a^{ii} \gamma_{ii\,,\,h} = \frac{1}{2} a^{hh} \left(a^{hh} \frac{\partial a_{hh}}{\partial x_h} - \sum_{\substack{1 \\ i \neq h}}^n{}_i \, a^{ii} \frac{\partial a_{ii}}{\partial x_h} \right) =$$

([5]) Cfr. C. AGOSTINELLI, *Sui sistemi dinamici corrispondenti*, Parte II, n. 3, (24) « Memorie del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », vol. XXIII, — XIV della Serie III — fasc. V, a. 1937, nonchè la Memoria originale di T. LEVI-CIVITA, *Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche*, « Annali di Matematica » Serie II, Tomo XXIV, a. 1896.

$$= \frac{1}{2} a^{hh} \left(\frac{\partial \log a_{hh}}{\partial x_h} - \sum_{\substack{1 \\ i \neq h}}^{n}{}_i \frac{\partial \log a_{ii}}{\partial x_h} \right),$$

cioè, avendo riguardo in valori (31) dei coefficienti a_{ii}, si ha

$$\Gamma^h = \frac{1}{2} a^{hh} \frac{\varkappa'_h(x_h)}{\varkappa_h(x_h)} .$$

Cambiando allora l'indice h in i, e ricordando le (10), la (11) porge

$$(34) \quad \sum_1^n{}_i\, a^{ii} \left[\left(\frac{dW_i}{dx_i} \right)^2 + \frac{d^2 W}{dx_i^2} - \frac{\varkappa_i'}{2\varkappa_i} \frac{dW_i}{dx_i} - k^2 B_i(x_i) \right] = -k^2 E \quad \text{(costante)}.$$

Osserviamo ancora che se si considera il determinante di Stäckel di ordine n formato da n^2 funzioni $\varphi_{ji}(x_i)$, ciascuna dipendente da una sola coordinata e precisamente da quella x_i il cui indice coincide col secondo indice della funzione, le equazioni (19) risultano identicamente verificate assumendo i coefficienti $a^{ii} (i = 1, 2, \ldots, n)$, uguali agli elementi reciproci φ^{ji} degli elementi φ_{ji} di una riga j^{ma} qualsiasi del detto determinante (6). Possiamo porre per esempio

$$(35) \qquad a^{ii} = \varphi^{ni}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Allora, supposto di aver determinato (come si vedrà nel n° successivo), gli elementi φ_{ji} del determinante di Stäckel relativo al nostro caso, per note proprietà dei determinanti la (34) si soddisfa identicamente ponendo

$$(36) \qquad \left(\frac{dW_i}{dx_i} \right)^2 + \frac{d^2 W_i}{dx_i^2} - \frac{\varkappa_i'}{2x_i} \frac{dW_i}{dx_i} - k^2 B_i(x_i) =$$

$$= -k^2 E \varphi_{ni}(x_i) + \sum_1^{n-1}{}_j \alpha_j \varphi_{ji}(x_i), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dove le α_j sono $n - 1$ costanti arbitrarie. Il problema è così ridotto a determinare le funzioni $W_i(x_i)$ soddisfacenti alle n equazioni differenziali ordinarie (36), che sono del 2° ordine e non lineari. Ponendo

$$(37) \qquad \frac{dW_i}{dx_i} = X_i ,$$

le (36) si riducono alle seguenti n equazioni di Riccati

$$(38) \qquad \frac{dX_i}{dx_i} + X_i^2 - \frac{\varkappa'_i}{2\varkappa_i} X_i = k^2 (B_i - E\varphi_{ni}) + \sum_1^{n-1}{}_j \alpha_i \varphi_{ji}$$

(6) Cfr. C. Agostinelli, *loco citato* in (4), Parte II n. 18 e Parte III n. 4.

nelle n funzioni incognite X_i. Si sa che se nell'equazione di RICCATI si conosce un integrale particolare di essa si sa trovare l'integrale generale con quadrature ([7]). Essendo allora $f_i(x_i)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, n funzioni arbitrarie, ciascuna dipendente da una sola coordinata, se si scelgono le funzioni $B_i(x_i)$ che definiscono la funzione potenziale V, nel modo seguente:

$$k^2 B_i(x_i) = k^2 E\varphi_{ni} - \sum_1^{n-1}{}_j \alpha_j \varphi_{ji} + f_i' + f_i^2 - \frac{\varkappa'_i}{2\varkappa_i} f_i, \tag{39}$$

si ha che un integrale particolare della (38) è $\bar{X}_i = f_i$. Ponendo

$$X_i = \bar{X}_i + Y_i(x_i) = f_i + Y_i(x_i), \tag{40}$$

si ha per la Y_i l'equazione differenziale

$$Y_i' + Y_i^2 + \left(2f_i - \frac{\varkappa'_i}{2\varkappa_i}\right) Y_i = 0,$$

che si integra immediatamente dividendo ambo i membri per Y_i^2, e si ottiene

$$Y_i = \frac{\sqrt{\varkappa_i}\, e^{-2\int f_i(x_i)dx_i}}{C_i + \int \sqrt{\varkappa_i}\, e^{-2\int f_i(x_i)dx_i}\, dx_i},$$

con C_i costanti arbitrarie. Per la (37) e la (40), con n quadrature si ottengono infine le funzioni $W_i(x_i)$.

È opportuno osservare che coi valori (39) delle funzioni B_i, dalla (33), ove va posto $a^{ii} = \varphi^{ni}$, si ottiene per la funzione potenziale V l'espressione

$$V = \sum_1^n{}_i \varphi^{ni} \left[E\varphi_{ni} - \sum_1^{n-1}{}_j \alpha_j \varphi_{ji} + f_i' + f_i^2 - \frac{\varkappa_i'}{2\varkappa_i} f_i\right]$$

cioè

$$V = E + \sum_1^n{}_i \varphi^{ni} \left(f_i' + f_i^2 - \frac{\varkappa'_i}{2\varkappa_i} f_i\right)$$

che è la stessa che si avrebbe ponendo le costanti α_j, $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$, tutte uguali a zero. Si può perciò omettere tanto nell'equazione (38), come nella (39) la $\sum_1^{n-1}{}_j \alpha_j \varphi_{ji}$.

8. Per completare la questione in esame non resta che da determinare le funzioni φ_{ji} in modo che risultino verificate le relazioni

([7]) É. GOURSAT, *Cours d'analise mathématique*, T. II, p. 322, (Paris, Gauthier-Villars, 1933).

(35), essendo i coefficienti $a^{ii} = 1/a_{ii}$, definiti dalle (31). Per questo osserviamo che gli n integrali quadratici delle geodetiche, relativi alla forma quadratica (14), o se si vuole relativi ai sistemi dinamici non sollecitati da forze attive e di energia cinetica

$$T = \frac{1}{2}\sum_1^n{}_r\, a_{rr}\dot{x}_r^2 = \frac{1}{2}\sum_1^n{}_r [\chi_r(x_r)\prod_1^n{}'_s(\psi_s - \psi_r)]\dot{x}_r^2\,,$$

sono come si sa contenuti tutti nell'integrale [cfr. le Memorie citate in [5].

$$(41)\qquad \sum_1^n{}_r [(\psi_1 + c)(\psi_2 + c)\dots(\psi_{r-1} + c)(\psi_{r+1} + c)\dots$$
$$\dots(\psi_n + c)\chi_r\prod_1^n{}'_s(\psi_s - \psi_r)]\dot{x}_r^2 = \text{cost.}\,,$$

dove c è una costante arbitraria. Il primo membro dell'integrale (41) è di grado $n-1$ in c, ed essi si ottengono uguagliando a costante i coefficienti delle successive potenze di c. Introducendo i momenti

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_r} = \chi_r(x_r)\prod{}'_s(\psi_s - \psi_r)\dot{x}_r$$

la (41) diventa

$$(42)\qquad \sum_1^n{}_r (\psi_1 + c)(\psi_2 + c)\dots(\psi_{r-1} + c)(\psi_{r+1} + c)\dots$$
$$\dots(\psi_n + c)\frac{p_r^2}{\chi_r\prod'_s(\psi_s - \psi_r)} = \text{cost}\,.$$

Se si pone

$$(\psi_1 + c)(\psi_2 + c)\dots(\psi_{r-1} + c)(\psi_{r+1} + c)\dots(\psi_n + c) =$$
$$A_{0r} + A_{1r}c + A_{2r}c^2 + \dots + A_{n-1,\,r}c^{n-1}$$

e si moltiplicano ambo i membri di questa per $\psi_r + c$, si ha

$$(43)\qquad \prod_1^n{}_s(\psi_s + c) = (\psi_r + c)(A_{0r} + A_{1r}c + \dots + A_{n-1,\,r}c^{n-1}).$$

Indicando quindi con $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ rispettivamente la somma, la somma dei prodotti a due a due, la somma dei prodotti a tre a tre, delle funzioni $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$, e così via fino al prodotto S_n di tutte queste funzioni, dalla (43) si ricavano le seguenti formule per il calcolo delle funzioni $A_{0r}, A_{1r}, \dots, A_{n-1,r}$:

$$
(44) \qquad \begin{aligned}
A_{n-1,r} &= 1 \\
A_{n-2,r} &= S_1 - \psi_r \\
A_{n-3,r} &= S_2 - S_1\psi_r + \psi_r^2 \\
&\dots\dots\dots\dots \\
A_{n-k,r} &= S_{k-1} - S_{k-2}\cdot\psi_r + S_{k-3}\cdot\psi_r^2 - \dots - (-1)^k\psi_r^{k-1} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
A_{1r} &= S_{n-2} - S_{n-3}\cdot\psi_r + S_{n-4}\psi_r^2 - \dots - (-1)^{n-1}\psi_r^{n-2} \\
A_{0r} &= S_{n-1} - S_{n-2}\psi_r + S_{n-3}\psi_r^2 - \dots - (-1)^n\psi_r^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Dopo ciò l'integrale (42) si può scrivere

$$\sum_1^n{}_r\,(A_{0r} + cA_{1r} + c^2A_{2r} + \dots + c^{n-1}A_{n-1,r})\frac{p_r^2}{\varkappa_r\prod_1^n{}_s'(\psi_s - \psi_r)} = \text{cost},$$

che si scinde negli n integrali richiesti

$$(45) \qquad \sum_1^n{}_r\frac{A_{k-1,r}\cdot p_r^2}{\varkappa_r\prod_1^n{}_s'(\psi_s - \psi_r)} = \beta_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

dove le β_k sono costanti arbitrarie. L'ultimo di questi integrali, che si ha per $k = n$, con $A_{n-1,r} = 1$, è l'integrale dell'energia.

Per avere ora gli elementi del determinante di Stäckel basta ricordare che nei problemi dinamici di Stäckel (in assenza di forze), la corrispondente equazione di Jacobi è

$$\sum_1^n{}_r\,\varphi^{nr}p_r^2 = \beta_n$$

che è identicamente soddisfatta ponendo

$$p_r^2 = \beta_n\varphi_{nr} + \sum_1^{n-}{}_k\,\beta_k\varphi_{kr} = \sum_1^n{}_k\,\beta_k\varphi_{kr}, \qquad (r = 1, 2, \dots, n).$$

Risolvendo questo sistema rispetto alla β_k, si ricava

$$\sum_1^n{}_r\,\varphi^{kr}p_r^2 = \beta_k, \qquad (k = 1, 2, \dots, n)$$

e confrontando con le (45) si ha infine

$$\varphi^{kr} = \frac{A_{k-1,r}}{\varkappa_r\prod_s'(\psi_s - \psi_r)}, \qquad (k, r = 1, 2, \dots, n).$$

Si hanno così tutti gli elementi reciproci φ^{kr}; prendendo a loro volta i reciproci si hanno gli elementi φ_{kr} del determinante di Stäckel che vanno sostituiti nelle equazioni (38). Con ciò il problema della determinazione di tutti i tipi di equazioni di Schrödinger, in coordinate curvilinee ortogonali, integrabili per separazione di variabili, risulta completamente risolto.