Nicola Ginatempo

Sull'integrazione delle formule di Serret-Frenet.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.1, p. 112–115.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_1_112_0>

Sull' integrazione delle formule di Serret - Frenet.

Nota di NICOLA GINATEMPO (a Messina)

Sunto. - *Si perfeziona un risultato di* T. POESCHL *riconducendo l'integrazione delle formule di* SERRET-FRENET *a quella di una equazione differenziale del 2° ordine lineare a coefficienti variabili e omogenea, ma di forma canonica e si dà un significato intrinseco al coefficiente variabile.*

Summary. - *The author improves a* T. POESCHL'S *result; he reconducts the integration of the* SERRET-FRENET'S *formulas to that of a differential linear and homogeneous equation with variables coefficients, but in canonical form; and he gives a intrinsic signification to the variable coefficient.*

1. È ben noto che l'integrazione delle formule di SERRET-FRENET può essere ricondotta all'integrazione di una equazione di RICCATI (1). T. POESCHL (2) ha mostrato come si possa ricondurre tale equazione di RICCATI a una equazione differenziale lineare ed omogenea di secondo ordine con coefficenti variabili, ma ciò era sostanzialmente già noto (3). Anzi la equazione differenziale è bene ottenerla già ridotta alla forma canonica

$$V'' + k(s)V = 0 \tag{1}$$

in cui gli apici indicano derivazione successiva rispetto all'arco s e il coefficiente variabile $k(s)$ ha un significato intrinseco che non credo sia stato messo in luce.

È quello che mi propongo di fare quì.

2. Si consideri l'equazione di RICCATI della forma

$$u' = pu + q(u^2 - 1) \tag{2}$$

con p e q note funzioni di s e u funzione incognita di s; si ponga

$$P = -(p + q'q^{-1}).$$

(1) BIANCHI L., *Lezioni di Geom. Differ.*, V. I° p. 15 e s.
(2) POESCHL T., Rend. C. Mat. Palermo, s II° t I° p. 38.
(3) GOURSAT G., *Anal. Infin.*, T. III° pag. 385.

Con la sostituzione

$$u = -q^{-1}(V'V^{-1} - \frac{1}{2}P) \tag{3}$$

la (2) può essere trasformata nell'equazione lineare del secondo ordine omogenea di forma canonica (1) in cui

$$k(s) = -q^2 - \frac{1}{2}P' - \frac{1}{4}P^2 \ . \tag{4}$$

Inversamente la (1) si può trasformare con la sostituzione

$$V = e^{-\int (qu - \frac{1}{2}P)ds}$$

nella equazione (2) di RICCATI.

3. Il coefficiente variabile $k(s)$, dato dalla (4) non è altro che l'invariante schwarziano della (1); cioè se V_1 e V_2 sono due qualunque integrali particolari della (1) e si pone

$$\frac{V_1}{V_2} = f(s)$$

si trova

$$k(s) = \frac{1}{2}\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{4}\frac{(f'')^2}{(f')^2} \tag{5}$$

ed il secondo membro non è altro che la derivata schwarziana della funzione f che dicesi anche schwarziano di f. Del resto i legami che passano tra le equazioni di RICCATI e la teoria degli schwarziani sono noti ([4]).

4. Ciò posto vogliamo quì tornare sul problema della determinazione di una curva gobba dello spazio Euclideo ordinario nel gruppo metrico a partire dalle sue equazioni intrinseche

$$\rho = \rho(s) \qquad T = T(s) .$$

È noto ([5]) che la determinazione della curva, secondo un metodo dovuto a DARBOUX, dipende in ultima analisi dall'integrazione dell'equazione di RICCATI.

$$u' = \frac{-i}{\rho}u + \frac{i}{2T}(u^2 - 1) \tag{6}$$

([4]) CALAPSO R., *Sul rapporto anarmonico*, Es. Mat. Catania 1938.
([5]) l. c. in ([1]) p. 17.

che è del tipo (2), con

$$p = \frac{-i}{\rho}\,, \quad q = \frac{i}{2T} \tag{7}$$

con $i = \sqrt{-1}$.

Per la (3) che qui diviene

$$u = 2iT' \cdot V' \cdot V^{-1} - iT' + T \cdot \rho^{-1} \tag{7}$$

si riconduce la (6) alla forma canonica (1) dove, però, per le (7), il coefficente $k(s)$ dato dalla (4), è

$$k(s) = \frac{1}{4T^2} + \frac{1}{4\rho^2} + \frac{T'^2}{4T^2} - \frac{iT'}{2\rho T} + \frac{i\rho'}{2\rho^2} - \frac{T''}{2T}\,. \tag{8}$$

Osserviamo che questa funzione, che chiamiamo *schwarziano* della data curva C, è espressa solamente in funzione delle date curvature della C.

5. Le eliche cilindriche del cilindro circolare retto sono date dalle equazioni intrinseche

$$\rho(s) = \frac{1}{2a} \qquad T(s) = \frac{1}{2b}$$

con a e b costanti tali che $a^2 + b^2 \neq 0$; ne segue che

$$T' = 0 \qquad T'' = 0 \qquad \rho' = 0$$

e perciò la (8) diviene quì

$$k(s) = a^2 + b^2 = \text{cost.}$$

Poniamo, per comodità,

$$a^2 + b^2 = m^2$$

e più precisamente

$$\sqrt{a^2 + b^2} = m$$

l'equazione differenziale (1) è allora

$$V'' + m^2 V = 0$$

il cui integrale generale è

$$V = c_1 \operatorname{sen}(ms + c)$$

ed in conseguenza per la (3)

$$u = \frac{1}{b}\left[imctg(ms + c) + a\right]. \tag{9}$$

È facile ottenere dalla (9) le equazioni parametriche dell'elica cilindrica che è stata detta [6] di prima specie perchè geodetica di un cilindro non isotropo. Ma se $a^2 + b^2 = 0$ e ad esempio $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{-1}{2i}$ le equazioni intrinseohe $\rho = 1$ $T = -i$ assegnano l'elica di seconda specie [7] detta elica di Lyon e risulta $k(s) = 0$ mentre la (1) si riduce a $V'' = 0$ il cui integrale generale è $V = c_1 s + c$ e perciò la (7) diviene quì

$$u = -i + \frac{2}{s + h} \text{ con } h = \frac{c}{c_1}. \tag{10}$$

Ora dalla (10) si risale proprio all'elica di 2ª specie di equazioni canoniche

$$x = -\frac{s^3}{6} + s,\ y = \frac{s^2}{2},\ z = i\frac{s^3}{6}$$

ottenendo i tre sistemi di integrali occorrenti con i valori

$$h = -i, \qquad h = +1 - i, \qquad h = 0.$$

Ci interessa far rilevare che le eliche di prima specie hanno lo schwarziano costante mentre le eliche di 2ª specie, geodetiche di un cilindro isotropo [8], hanno lo schwarziano nullo.

Crediamo sia parecchio interessante far conoscere che le curve di equazioni intrinseche

$$\frac{1}{\rho} = f'(s); \ \frac{1}{T} = \pm if'(s)$$

in cui $f'(s)$ è la derivata di una arbitraria funzione olomorfa $f(s)$, hanno per schwarziano proprio la funzione $k(s)$ data dalla (5) e cioè lo schwarziano della funzione $f(s)$.

(6) Calapso M. T., *Sulle curve a flessione costante*, R. Acc. Lincei S. XXXII, 441, (1957).

(7) G. Scheffers, *Einfürung in der Theorie der Kurwen*, Leipzig 1910, 278-300.

(8) [Lo studio di queste curve è sviluppato in una nota, in corso di stampa a Messina, del dott. Savasta C.] [Savasta C., *Sulle eliche cilindriche* «Atti S. Pel. Sc. III». f. IV, 339, (56-57)].