BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MARIO ITALIANI

Sulle congruenze di piani dello spazio proiettivo S_4.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.1, p. 105–111.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_1_105_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1958.

Sulle congruenze di piani dello spazio proiettivo S_4.

Nota di MARIO ITALIANI (a Modena)

Sunto. - *Si studiano e classificano i sistemi* ∞^2 *(analitici) di piani dello spazio proiettivo* S_4. *La classificazione è fondata sulla considerazione dei fuochi del primo e secondo ordine e delle relative varietà focali, introdotte da* C. SEGRE.

Summary. - *Analytical doubly infinite systems of planes in projective* S_4 *space are studied and classified. Classification is founded upon the consideration of first and second order foci and the related focal varieties, introduced by* C. SEGRE.

1. I sistemi doppiamente infiniti (o congruenze) di rette sono stati oggetto di numerosissime ricerche che recentemente si sono soprattutto orientate verso le questioni di carattere proiettivo differenziale. Su tale argomento, e con speciale riguardo al caso di sistemi appartenenti allo spazio ordinario, esiste pertanto una vasta letteratura cui si è aggiunto da qualche anno anche il noto trattato di FINIKOV (1).

Tra le questioni di carattere proiettivo differenziale relative alle congruenze di rette che presentano particolare interesse si può annoverare quella della deformazione proiettiva che trae origine, per analogia, dalla deformazione proiettiva di superficie di FUBINI.

La nozione di deformazione proiettiva di congruenze è stata introdotta da E. CARTAN per le congruenze dello spazio ordinario nel 1920 (2) e lo stesso Autore ha dimostrato che le congruenze proiettivamente deformabili dipendono da una funzione arbitraria di due variabili.

L'argomento è stato ripreso e sviluppato recentemente da E. ČECH (3) il quale ha tra l'altro introdotto altri tipi di trasfor-

(1) S. FINIKOV, *Teorija kongruencij*, Casa Editrice Gostechisdat, Mosca 1950.

(2) E. CARTAN, *Sur le problème génér l de la deformation*, C. R. Congrès Strasbourg 1920, 397-406.

(3) E. ČECH, *Déformation ponctuelle des congruences de droites*, « Czechoslovak Mathematical Journal », 5 (80) 1955, 234-273. E. ČECH, *Deformazioni proiettive di congruenze e questioni connesse*, (C.I.M.E. - 5° ciclo 1955). E. ČECH, *Géométrie projective différentielle des correspondances entre deux espaces*, « Czech. Math. Jour. », 2 (77) 1952, 167-189. L. MURACCHINI,

mazioni tra congruenze da lui dette deformazioni puntuali, planari, focali e asintotiche. Le deformazioni puntuali si riducono, nel caso dello spazio ordinario, alle trasformazioni puntuali che risultano inviluppo di omografie.

Credo pertanto che possa presentare qualche interesse lo studio delle deformazioni puntuali di congruenze di piani in S_4 in quanto fra l'altro tale studio è la premessa necessaria per la trattazione del problema delle trasformazioni puntuali fra S_4 inviluppo di ∞^2 omografie.

Per quanto mi risulta però i sistemi doppiamente infiniti di piani in S_4 non sono stati oggetto finora di studi particolareggiati, almeno dal punto di vista che qui interessa, e la loro struttura è scarsamente conosciuta. Alcuni risultati su tali argomenti sono contenuti in due lavori di C. SEGRE (4): il primo, di carattere molto generale, è dedicato allo studio delle varietà luogo di spazi ed in esso sono esaminate questioni relative ai fuochi del primo ordine; nel secondo vengono definiti i fuochi del secondo ordine e studiate alcune loro proprietà.

Ho ritenuto quindi opportuno studiare dapprima le proprietà proiettivo differenziali delle congruenze di piani in S_4 riprometendomi di esaminare in seguito il problema della deformazione puntuale.

Nella presente Nota esporrò i risultati cui sono pervenuto rinviando per le dimostrazioni e per maggiori dettagli ad un mio lavoro dal titolo: *Sulle congruenze di piani dello spazio proiettivo* S_4 in corso di pubblicazione negli « Atti della Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna ».

2. La classificazione delle congruenze di rette in S_3 è essenzialmente basata, come è noto, sulla nozione di fuoco e su quella di superficie sviluppabile contenuta nella congruenza; per i sistemi doppiamente infiniti di piani in S_4 si definiscono elementi analoghi che possono essere utilizzati allo stesso scopo.

Consideriamo pertanto entro uno spazio proiettivo S_4 una congruenza di piani che supponiano descritta da un piano individuato

Sulle trasformazioni puntuali inviluppi di omografie, « Boll. Unione Mat. Ital. » (3) 8 (1953), 390-398. A. ŠVEC, *Deformation projective des congruences de droites dans* S_n, « Czech. Math. Jour. » 5 (8) 1955, 546-558.

(4) C. SEGRE, *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*, « Rendiconti Circolo Mat. Palermo », 30 (1910), 87-121; C. SEGRE, *Sui fochi di 2° ordine dei sistemi infiniti di piani, e sulle curve iperspaziali con una doppia infinità di piani plurisecanti*, « Rend. Lincei », 5 (30) 1921, 67-71.

da tre punti $A_1 A_2 A_3$ le cui coordinate omogenee sono funzioni analitiche di due parametri indipendenti u, v.

Indichiamo con π il piano della congruenza corrispondente ai valori u, v dei parametri e con π' il piano corrispondente ai valori $u + \Delta u$, $v + \Delta v$; se il punto comune a π e π' tende ad un punto determinato P quando Δu e Δv tendono a zero, diremo che P è fuoco del primo ordine per il piano π.

Sul generico piano della congruenza esistono ∞^1 fuochi del primo ordine i quali costituiscono una conica, in generale irriducibile, detta conica focale; tale conica è indeterminata se e solo se i piani della congruenza appartengono ad uno stesso S_3, ipotesi questa che escluderemo per il seguito.

Indichiamo con γ la conica focale del piano π e con γ' quella del piano π'. I punti di γ che appartengono, a meno di quantità del secondo ordine in Δu, Δv, anche alla conica γ' si diranno fuochi del secondo ordine per il piano π.

Diremo poi che un sistema semplicemente infinito di piani è sviluppabile quando ogni piano che gli appartiene è segato dal piano infinitamente vicino del sistema secondo una retta.

In generale una congruenza di piani in S_4 non contiene sistemi sviluppabili, ma si dimostra che sussiste il seguente teorema:

Data una congruenza di piani in S_4, *condizione necessaria e sufficiente affinchè per il suo piano generico passi un sistema semplicemente infinito sviluppabile è che la conica focale di ogni piano sia degenere.*

3. Dal teorema precedente risulta chiaramente come la classificazione delle congruenze per mezzo dello studio della conica focale sia riconducibile a quella che si ottiene assumendo come criterio di classificazione il numero dei sistemi sviluppabili passanti per un piano generico. Ponendoci da questo secondo punto di vista prenderemo dapprima in esame le congruenze dotate di sistemi sviluppabili distinguendo i quattro casi seguenti:

α) per il piano generico della congruenza passa un solo sistema semplicemente infinito sviluppabile;

β) per il piano generico della congruenza passano due sistemi semplicemente infiniti sviluppabili distinti;

γ) per il piano generico della congruenza passano due sistemi semplicemente infiniti sviluppabili coincidenti;

δ) per il piano generico della congruenza passano infiniti sistemi sviluppabili.

4. Nel caso α) la conica focale del generico piano della congruenza si spezza in due rette distinte: la prima è intersezione di π con il piano infinitamente vicino appartenente al sistema sviluppabile passante per π mentre la seconda è luogo dei punti di intersezione di π con gli altri piani infinitamente vicini della congruenza.

I piani della congruenza possono essere ordinati in ∞^1 sistemi sviluppabili il che significa che *la congruenza è costituita dai piani osculatori alle curve di un sistema semplicemente infinito tracciate sopra una superficie di* S_4

In particolare le curve del sistema possono appartenere ad un S_3 oppure essere le generatrici di una superficie rigata non sviluppabile.

In questa ultima ipotesi ciascuno dei sistemi semplicemente infiniti sviluppabili è costituito da ∞^1 piani passanti per una generatrice. Tali piani possono anche appartenere ad un fascio ma va escluso il caso in cui tale fascio è costituito dai piani tangenti alla superficie nei punti della generatrice considerata, perchè la congruenza rientrerebbe allora fra quelle studiate in γ).

5. Nel caso β) la conica focale del generico piano π della congruenza si spezza ancora in due rette distinte ciascuna delle quali è intersezione di π con il piano infinitamente vicino appartenente ad uno dei sistemi sviluppabili passanti per π.

Si dimostra allora che *la congruenza è costituita dai piani tangenti ad una superficie* Σ *di* S_4 *priva di asintotiche ed i sistemi sviluppabili che le appartengono sono formati dai piani tangenti a* Σ *nei punti di una curva appartenente al doppio sistema coniugato di* Σ.

In particolare la superficie Σ può ridursi ad una curva o ad un punto. Nella prima ipotesi la congruenza è costituita da ∞^1 sistemi ciascuno dei quali formato da ∞^1 piani passanti per una tangente alla curva; tali piani possono appartenere ad un fascio, ma vanno esclusi i fasci contenenti il piano osculatore alla curva perchè in tal caso la congruenza rientrerebbe nel tipo considerato in γ).

Nella seconda ipotesi, i piani della congruenza hanno tutti in comune un punto e la congruenza stessa si ottiene proiettando da esso le rette di una congruenza non parabolica appartenente ad un S_3.

6. Nel caso γ), che si può pensare come limite del precedente, la conica focale del generico piano π della congruenza è degenere in una retta doppia e si ha che *la congruenza è costituita dai piani tangenti ad una superficie di* S_4 *dotata di una famiglia di* *asintotiche mentre i sistemi sviluppabili sono formati dai piani tangenti alla superficie nei punti di una linea asintotica.*

In particolare la superficie può ridursi ad una curva o ad un punto. Nella prima ipotesi la congruenza è costituita da ∞^1 fasci passanti per una tangente alla curva e contenenti il piano osculatore alla curva stessa; nella seconda ipotesi la congruenza si ottiene proiettando da un punto fisso una congruenza parabolica di rette appartenente ad un S_3.

Nel caso δ) la conica focale è ancora degenere in una retta doppia e *la congruenza è costituita da tutti i piani passanti per tale retta.* Ovviamente tutti i punti della retta doppia sono anche fuochi del secondo ordine.

7. In ciascuno dei casi α), β), γ) ora esaminati esiste sulla conica focale del generico piano π della congruenza un numero, in generale finito, di fuochi del secondo ordine.

Uno di tali punti si trova in corrispondenza di ogni sistema sviluppabile passante per π e risulta intersezione della retta focale relativa al sistema sviluppabile con il piano dello stesso sistema che è infinitamente vicino del secondo ordine al piano π.

Nel caso β) si hanno pertanto due fuochi del secondo ordine che nel caso γ) coincidono; nel caso α), oltre al fuoco in corrispondenza dell'unico sistema sviluppabile passante per π, ne esistono altri tre appartenenti alla retta focale che è luogo di intersezioni di π con i piani infinitamente vicini del primo ordine.

Prendiamo ora in esame la ipotesi che sulla conica focale di π, che supponiamo ancora degenere, esistano infiniti fuochi del secondo ordine.

La retta che contiene infiniti fuochi di tale tipo descrive, al variare dei parametri u, v, una superficie anzichè una V_3 (5); si presentano numerosi casi e si ottengono i risultati sotto riportati.

I. - Supponiamo che la conica focale di π sia degenere in due rette distinte una delle quali luogo di fuochi del secondo ordine; si hanno tre casi:

a) Se la congruenza contiene una sola famiglia di sistemi sviluppabili e se la retta cui appartengono infiniti fuochi del secondo ordine è la retta focale relativa al sistema sviluppabile passante per π, la superficie descritta da tale retta è una rigata non sviluppabile e ciascuno dei sistemi sviluppabili che costituiscono la congruenza è formato da ∞^1 piani passanti per una generatrice. Permane la riserva fatta nel n. 4.

b) Se la congruenza contiene una sola famiglia di sistemi

(5) Si veda la seconda delle Note citate in (4).

sviluppabili e se la retta focale cui appartengono infiniti fuochi del secondo ordine non è quella relativa al sistema sviluppabile passante per π, la superficie luogo di tale retta è un piano e la congruenza è costituita dai piani osculatori ad un sistema di curve di S_3 tracciate sopra una superficie di S_4 e tali che i piani stessi seghino secondo rette il piano descritto dalla retta focale.

c) Se la congruenza contiene due famiglie di sistemi sviluppabili, la retta che contiene infiniti fuochi del secondo ordine descrive una rigata sviluppabile ed i sistemi sviluppabili che costituiscono una delle famiglie contenute nella congruenza sono formati ciascuno da ∞^1 piani passanti per una generatrice. Permane la riserva fatta nel n. 5

II. - Supponiamo ora che la conica focale di π sia degenere in due rette distinte, ciascuna delle quali luogo di fuochi del secondo ordine; si hanno due casi:

a) Se la congruenza contiene una sola famiglia di sistemi sviluppabili, la retta focale relativa al sistema sviluppabile passante per π descrive una rigata non sviluppabile con direttrice piana, mentre l'altra retta focale descrive il piano di tale direttrice.

Ciascuno dei sistemi sviluppabili è costituito da un fascio di piani passanti per una generatrice e seganti il piano della direttrice secondo rette. Rimane in vigore la riserva fatta al n. 4.

b) Se la congruenza contiene due famiglie di sistemi sviluppabili le due rette focali descrivono due coni con lo stesso vertice e la congruenza può ritenersi descritta da un piano passante per un punto fisso e per due altri punti ciascuno dei quali descrive una curva. In particolare i due coni di cui sopra possono coincidere oppure ridursi a piani.

III. - Supponiamo infine che la conica focale di π sia degenere in una retta doppia contenente infiniti fuochi del secondo ordine.

Se la retta focale non è fissa, nel qual caso, come si è visto, la congruenza è costituita da ∞^2 piani per una retta, essa può descrivere una rigata non sviluppabile cui sono tangenti i piani della congruenza, oppure una rigata sviluppabile. In questa ultima ipotesi la congruenza è costituita da ∞^1 fasci aventi per sostegno le generatritci e contenenti il piano osculatore allo spigolo di regresso.

8. Poniamoci ora nel caso più generale e supponiamo quindi che la conica focale del generico piano della congruenza sia irriducibile. La congruenza non contiene sistemi semplicemente infiniti sviluppabili e pertanto i criteri usati in precedenza per lo studio della struttura della congruenza non possono essere utiliz-

zati. Si potranno allora prendere in considerazione i fuochi del secondo ordine che in generale sono in numero di cinque su ciascun piano, ma possono dare luogo a vari casi di coincidenza o in particolare essere infiniti.

In questa ultima ipotesi è stato dimostrato (6) che la congruenza è costituita dai piani che segano secondo coniche una superficie del quarto ordine di S_4 proiezione della superficie di VERONESE oppure una superficie rigata del terzo ordine di S_4.

Se ci si limita ai casi in cui i fuochi del secondo ordine sono in numero finito, si osserva che ciascuno di tali punti descrive, al variare dei parametri u, v, una superficie, che può essere chiamata *falda focale della congruenza* tracciata sulla varietà luogo delle coniche focali.

Le falde focali possono non essere tutte distinte o anche ridursi, tutte o in parte, a curve anch'esse distinte o coincidenti. È invece escluso che una delle falde focali si riduca ad un punto perchè in tal caso tutti i piani della congruenza passerebbero per quel punto e la congruenza sarebbe dotata di due famiglie di sistemi sviluppabili.

Le falde focali, in quanto luogo di fuochi del primo ordine, godono della proprietà che il piano tangente in un punto P generico è segato dal piano della congruenza per cui P è fuoco secondo una retta. Pertanto i piani della congruenza inviluppano sopra una falda focale sistemi semplicemente infiniti di curve.

Si consideri ora una superficie arbitraria di S_4 e su di essa un sistema semplicemente infinito, pure arbitrario, di curve. Si dimostra che scegliendo in ogni punto P della superficie un piano appartenente al fascio individuato dal piano ivi osculatore alla curva del sistema passante per P e dal piano ivi tangente alla superficie si ottiene una congruenza che ammette la superficie stessa come falda focale.

In altre parole si ha il seguente teorema:

Fissata una superficie arbitraria di S_4 *ed in ogni suo punto un* E_2 *che le appartenga, la congruenza che si ottiene facendo passare un piano per ciascuno di tali* E_2 *ammette la superficie considerata come falda focale.*

È da rilevare che la più generale congruenza di piani in S_4 può essere ottenuta nel modo ora detto; infatti nella rappresentazione adottata intervengono quattro funzioni arbitrarie di due variabili, tante cioè quante ne occorrono per assegnare una generica congruenza di piani in S_4.

(6) Si veda la seconda delle Note citate in (4).