Bollettino
Unione Matematica Italiana

Giovanni Crupi

Sui fronti d'onda nei corpi girevoli intorno ad un asse fisso.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.1, p. 100–104.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_1_100_0>

Sui fronti d'onda nei corpi girevoli intorno ad un asse fisso.

Nota di GIOVANNI CRUPI (a Messina)

Sunto. - *Scopo della Nota è di studiare la propagazione di onde elettromagnetiche in un dielettrico rotante.*

Summary. - *The aim of this note is the calculation of the velocity of propagation of electromagnetic waves when the medium is a rotating dielectric. The classic expression of Fresnel-Fizeau is generalized.*

Scopo del presente lavoro è quello di affrontare lo studio dei fronti d'onda elettromagnetici in un dielettrico animato da moto rotatorio uniforme intorno ad un asse fisso.

Il caso particolare in cui il dielettrico sia animato da moto traslatorio uniforme è stato già considerato in una Nota lincea [1].

Il risultato a cui pervengo è che la velocità di avanzamento della superficie σ_t, delimitante la regione perturbata all'istante t, è espressa dalla formula

$$a = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right) \omega r \cos\theta$$

dove c rappresenta la velocità della luce nel vuoto, r la minima distanza del generico punto P di σ_t dall'asse di rotazione, ω la velocità angolare del corpo, θ l'angolo che il versore n della normale al fronte d'onda nel generico punto P forma con la stessa velocità di P.

1. La ricerca sarà impostata sul seguente sistema di MAXWELL-MINKOWSKI, approssimato ai termini di primo ordine in β,

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{B}} = -c \operatorname{rot} \boldsymbol{E} \\ \dot{\boldsymbol{D}} = c \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \end{cases} \qquad\qquad \text{(III)}\quad \begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \\ \operatorname{div} \boldsymbol{D} = 0 \end{cases}$$

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} \boldsymbol{E} = \dfrac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon} - \dfrac{\lambda}{\varepsilon\mu} \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B} \\[2ex] \boldsymbol{H} = \dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu} + \dfrac{\lambda}{\varepsilon\mu} \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{D} \end{cases} \qquad\qquad \cdot = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \lambda = \frac{\varepsilon\mu - 1}{c},$$

[1] E. CLAUSER, *Velocità della luce nei corpi isotropi in moto*, « Rend. Lincei », Vol. XVII, fasc. 6, (1954).

dove $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{v}$, ε e μ rappresentano rispettivamente l'intensità elettrica, l'intensità magnetica, lo spostamento elettrico, l'induzione magnetica, la velocità del generico punto del corpo rotante, la costante dielettrica e la permeabilità magnetica.

Come è noto, le equazioni di MAXWELL-MINKOWSKI valgono rigorosamente nei corpi animati da moto traslatorio uniforme, mentre si possono applicare con approssimazione nei mezzi mobili comunque, se le variazioni sostanziali delle velocità si mantengono piccole ([2]).

Scegliamo il sistema inerziale di riferimento $S(Ox_1x_2x_3t)$ con Ox_3 coincidente con l'asse fisso di rotazione ed indichiamo con ω la velocità angolare vettoriale del corpo.

La velocità del generico punto del corpo è data dalla classica formula cinematica

$$\boldsymbol{v} = \omega \wedge \boldsymbol{r} \tag{1}$$

da cui si deduce che il campo delle velocità è solenoidale

$$div\, \boldsymbol{v} = 0. \tag{2}$$

A questo punto riteniamo utile precisare i termini del problema.

Si considera un corpo girevole intorno ad un asse fisso con velocità angolare costante e si pensa che, per $t < 0$, esso sia esente da campi elettrici variabili. All'istante $t = 0$ si suppone di produrre una perturbazione elettromagnetica in una sua porzione finita di contorno σ_0; questa regione perturbata si propaga dentro il corpo ed avanza, simultaneamente, rispetto al sistema inerziale: l'oggetto della nostra ricerca è la determinazione delle velocità di propagazione del fronte d'onda rispetto al corpo mobile e di avanzamento rispetto al sistema inerziale.

Al generico istante t la situazione fisica generale sarà rappresentata da due distinte soluzioni del sistema (I), (II), (III): una caratterizza la perturbazione all'interno della superficie σ_t, delimitante la regione perturbata all'istante t, e l'altra, che nel nostro caso è identicamente nulla, caratterizza il fenomeno nella parte residua del corpo.

([2]) M. VON LAUE, *La Théorie de la Relativité*, Tome I, p. 181 GAUTHIER-VILLARS (1924).

A. SOMMERFELD, *Vorlesungen über theoretische Physik*, p. 181 Bd. III, (1948).

Il fatto che, per $t < 0$, il corpo si pensi privo di campi elettrici variabili non toglie nulla alla generalità del problema, perchè i risultati a cui perverremo resterebbero sostanzialmente immutati anche se prima dell'istante $t = 0$ il corpo fosse già sede di una propagazione elettromagnetica.

2. La (2) esprime che la velocità v della generica particella del corpo rotante è una funzione continua di x_1, x_2, x_3 assieme alle sue derivate. Ammettiamo, come si fa usualmente, che attraverso il fronte d'onda σ_t le grandezze $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$ siano continue, mentre siano discontinue le loro derivate.

Eliminando $\boldsymbol{E}$ ed $\boldsymbol{H}$ dalle (I), in virtù delle (II), si ottiene il seguente sistema in $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{D}$

$$(3) \qquad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{B}} + \dfrac{c}{\varepsilon} \operatorname{rot} \boldsymbol{D} - \dfrac{\lambda c}{\varepsilon\mu} \operatorname{rot} (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}) = 0 \\ \dot{\boldsymbol{D}} - \dfrac{c}{\mu} \operatorname{rot} \boldsymbol{B} - \dfrac{\lambda c}{\varepsilon\mu} \operatorname{rot} (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{D}) = 0. \end{cases}$$

Tenendo presente che $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{D}$ sono solenoidali, valgono le identità

$$\operatorname{rot} (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}) \equiv (\boldsymbol{B} \operatorname{grad})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \operatorname{grad})\boldsymbol{B}$$

$$\operatorname{rot} (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{D}) \equiv (\boldsymbol{D} \operatorname{grad})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \operatorname{grad})\boldsymbol{D}$$

e quindi il sistema (3) assume la forma

$$(3') \qquad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{B}} + \dfrac{c}{\varepsilon} \operatorname{rot} \boldsymbol{D} - \dfrac{\lambda c}{\varepsilon\mu} (\boldsymbol{B} \operatorname{grad})\, \boldsymbol{v} + \dfrac{\lambda c}{\varepsilon\mu} (\boldsymbol{v} \operatorname{grad})\, \boldsymbol{B} = 0 \\ \dot{\boldsymbol{D}} - \dfrac{c}{\mu} \operatorname{rot} \boldsymbol{B} - \dfrac{\lambda c}{\varepsilon\mu} (\boldsymbol{D} \operatorname{grad})\, \boldsymbol{v} + \dfrac{\lambda c}{\varepsilon\mu} (\boldsymbol{v} \operatorname{grad})\, \boldsymbol{D} = 0. \end{cases}$$

Poichè il vettore $\boldsymbol{v}$, variabile col posto, in virtù della (1), si suppone ovunque continuo assieme alle sue derivate, le equazioni (3') conducono, formalmente, per i vettori $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{d}$, caratterizzanti le discontinuità delle derivate di $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{D}$ attraverso il fronte d'onda σ_t, alle stesse condizioni di compatibilità dinamica a cui condurrebbero se $\boldsymbol{v}$ fosse costante.

Quindi, con procedimento che qui ometto, per ragioni di brevità, si trova che la velocità di avanzamento del fronte d'onda

$$a = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right) v \cos\theta$$

ha *la stessa struttura formale* di quella ottenuta, con diversa impostazione, da E. CLAUSER, il quale, nella Nota citata, ha considerato i fronti d'onda nei dielettrici animati da moto traslatorio uniforme.

Indipendentemente da E. CLAUSER, ma simultaneamente, G. CARINI (3), fondandosi su un lavoro del Prof. G. LAMPARIELLO (4), ha trovato la (4) come velocità di fase delle onde piane armoniche, propagantisi nei dielettrici mobili con velocità costante.

Nel caso dei corpi girevoli intorno ad un asse fisso, che si considera nel presente lavoro, $\boldsymbol{v}$ non è più costante come nei lavori di CLAUSER e di CARINI, ma è una funzione del posto ed, in particolare, il suo modulo ($v = \omega r$) è una funzione lineare della distanza del generico punto P dall'asse di rotazione.

Pertanto, nel caso rotante, la velocità di avanzamento del fronte d'onda acquista la forma esplicita

$$a = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} + \left(1 - \frac{1}{\mu\varepsilon}\right)\omega r \cos\theta, \tag{4'}$$

dove r è la distanza del generico punto P del fronte d'onda σ_t dall'asse di rotazione e θ è l'angolo che $\boldsymbol{v}$ forma col versore $\boldsymbol{n}$ della normale al fronte d'onda.

Dalla (4') si ottiene che la velocità di propagazione del fronte d'onda rispetto al corpo girevole è data da

$$V = |\, a - v_n \,| = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - \frac{\omega}{\varepsilon\mu}\, r \cos\theta. \tag{5}$$

La (4') estende ai corpi rotanti la formula che esprime quantitativamente l'effetto FIZEAU-FRESNEL sul parziale trascinamento della luce da parte dei corpi in moto. Essa esprime che la velocità di avanzamento dei fronti d'onda elettromagnetici, nel caso dei corpi girevoli intorno ad un asse fisso, risulta dalla sovrapposizione di quella che si avrebbe se il corpo fosse in quiete e di un contributo nuovo $\left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right)\omega r \cos\theta$, caratterizzante il parziale

(3) G. CARINI, *Intorno alle omografie elettrica e magnetica associate alle onde nei corpi in moto*, « Rend. Lincei », ser. VIII, vol. XVII, fasc. 6, 1954.

(4) G. LAMPARIELLO, *L'equazione generale delle onde elettromagnetiche dei corpi in moto*, « Rend. Lincei », ser. VIII, vol. XVII, fasc. 5, 1954.

trascinamento da parte del corpo rotante: questo contributo aumenta linearmente con la distanza dall'asse di rotazione.

Nel caso limite in cui $\omega = 0$, dalle (4') e (5) si ottiene $a = V = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, e ciò è conforme al fatto che nei mezzi in quiete cade la distinzione tra velocità di avanzamento e di propagazione.

3. Dalle (III) si ricava che i vettori $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{d}$ caratteristici delle discontinuità delle derivate di $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{D}$ sono trasversali

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{b} = 0, \qquad \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{d} = 0,$$

come nei mezzi in quiete [5].

Siffatta trasversalità non sussiste più per i vettori $\boldsymbol{h}$ ed $\boldsymbol{e}$, caratteristici delle discontinuità delle derivate di $\boldsymbol{H}$ ed $\boldsymbol{E}$. Infatti, operando con l' operatore div su ambo i membri delle (II) e tenendo conto delle (III), si ha

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{H} = \dfrac{\lambda}{\varepsilon\mu} \boldsymbol{D} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} - \dfrac{\lambda}{\varepsilon\mu} \boldsymbol{v} \operatorname{rot} \boldsymbol{D} \\ \operatorname{div} \boldsymbol{E} = -\dfrac{\lambda}{\varepsilon\mu} \boldsymbol{B} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} + \dfrac{\lambda}{\varepsilon\mu} \boldsymbol{v} \operatorname{rot} \boldsymbol{B}. \end{cases}$$

Da queste, ricordando che $\boldsymbol{v}(P)$ è continua assieme alle sue derivate, con i metodi usuali, si ottengono facilmente le seguenti relazioni

$$\begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{h} = -\dfrac{\lambda}{\varepsilon\mu} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e} = \dfrac{\lambda}{\varepsilon\mu} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{b}, \end{cases}$$

le quali, conformemente a quanto abbiamo affermato, esprimono che, in generale, $\boldsymbol{h}$ ed $\boldsymbol{e}$ non sono trasversali.

(5) T. LEVI-CIVITA, *Caractéristiques des systèmes différentiels et propagations des ondes*, p. 84, Paris, Alcan, 1932.