Bollettino Unione Matematica Italiana

UMI

Recensioni.

* Gregorio Ricci Cubastro, Opere, Edizioni Cremonese, Roma, 1957 (Angelo Tonolo)
* Convegno Internazionale sulle equazioni lineari alle derivate parziali, Edizioni Cremonese, Roma, 1955 (Aldo Ghizzetti)
* Salvatore Cherubino, Calcolo delle matrici, Edizioni Cremonese, Roma, 1957 (Roberto Conti)
* Pavel S. Aleksandrov, Topologia combinatorio, Einaudi, Torino, 1957 (Guido Zappa)
* C. Carathéodory, Mass und Integral und ihre Algebraisierung, Birkäuser, Basel und Stuttgart, 1956 (Tulliio Viola)
* D. Pedoe, Circles, Pergamon Press, London, New York, Paris, Los Angeles, 1957 (Guido Zappa)
* L. W. Kantorowitsch, W. I. Krylow, Näherungsmethoden der höheren Analysis, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956 (Aldo Ghizzetti)
* G. Hamel, Mechanik der Kontinua, B. G. Teubner, Stuttgart, 1956 (Dario Graffi)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.4, p. 698–714.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_4_698_0>

RECENSIONI

GREGORIO RICCI CURBASTRO, *Opere*, a cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Vol. I, 1956, pp. VI + 441, Vol. II, 1957, pp. 586, Edizioni Cremonese, Roma.

Le Note e Memorie del Ricci, inserite nei due Volumi, sono in numero di 55 e vanno dall'anno 1877 all'anno 1926. Esse figurano nel loro ordine cronologico. Alla fine del secondo Volume si trova un raffronto fra le locuzioni e le notazioni adoperate dal Ricci con quelle più recenti. Queste sono tratte, per la massima parte, dal libro dello Schouten: *Ricci Calculus* (2ª Ed. Springer Verlag, 1954).

Il Volume I inizia con la penetrante Commemorazione fatta del Ricci dal Suo grande allievo Tullio Levi-Civita il 3 gennaio 1926 all'Accademia Nezionale dei Lincei. Seguono 24 lavori scritti in un periodo di quasi vent'anni (1877-1895). Dopo una Memoria sopra un sistema di due equazioni differenziali lineari di cui una è quella dei fattori integranti dell'altra e cinque Note di carattere Fisico-matematico, di cui quattro riassuntive sul modo di agire delle forze ponderomotrici ed elettromotrici fra due conduttori filiformi e la quinta originale, ove si dimostra l'equivalenza fra correnti galvaniche stazionarie e una distribuzione di magneti permanenti con una giudiziosa trasformazione d'integrali, il Ricci prende il Suo decisivo orientamento nell'agone scientifico con la Memoria del 1884 sulle forme differenziali quadratiche e con quella del 1886 sugli invarianti e parametri differenziali. Nella prima, completata con una successiva Nota lincea, viene stabilita una teoria completa e razionale delle quadriche differenziali fondata su concetti e sviluppata con metodi analitici, fra i quali spicca quello di classe di una tale forma. Sono ritrovate le condizioni, già stabilite anteriormente da Lipschitz, perchè una forma sia di classe zero e assegnate quelle perchè sia di classe uno, con la effettiva loro riducibilità. Nella Memoria del 1886 viene data dapprima la costruzione degli invarianti differenziali del second'ordine per le quadriche di classe uno — quelle di classe zero non hanno tali invarianti —. Traendo profitto del fatto che per tali forme i simboli di Riemann si identificano con i minori del second'ordine di un determinante simmetrico, viene provato che la quadrica avente per coefficienti gli elementi di questo determinante è covariante alla data. Allora gli invarianti differenziali del second'ordine di questa, sono gli invarianti algebrici assoluti delle due forme. L'idea di ricondurre la determinazione degli invarianti differenziali delle quadriche nel suo campo naturale, che è quello algebrico dell'eliminazione, come fecero già, prima del Ricci, il Casorati per le forme binarie e il Christoffel per le quadriche generali, fu con felicissima intuizione trasportata dal Ricci alla costruzione dei parametri differenziali. Limitandomi a segnalare il caso d'una sola funzione e alla costruzione dei relativi parametri differenziali di secondo, terzo, ..., m-esimo ordine, le forme associate alla quadrica assegnata hanno per coefficienti quelle espressioni che più tardi Egli chiamerà derivate covarianti di secondo, terzo, ..., m-esimo ordine rispetto alla quadrica. Nella Memoria del Beltrami: « Sulla teorica generale dei parametri differenziali » di altissimo valore scientifico, è sviluppata una larga e notevole estensione della teoria di Lamé dei parametri differenziali, ma ciò che sorprende è la via indiretta ivi tenuta — variazione prima di certi integrali in conformità all'indirizzo di Jacobi — per dimostrare il carattere d'invarianza dei parametri del second'ordine. Nella Memoria del Ricci si trova invece una visione unitaria di tale teoria, ed il metodo adoperato per dimostrare l'invarianza dei parametri, Lo porterà ad ottenere, non solo una catena di parametri differenziali, di cui il primo ed il più importante anello è dato dal Δ_2, ma addirittura alla scoperta di quei metodi che costituiscono il Calcolo differenziale assoluto, come da Lui stesso venne esplicitamente affermato.

Di vigorosa costruzione è pure la Memoria del 1887 sui sistemi di integrali indipendenti di una equazione lineare e omogenea a derivate parziali del prim'ordine con n variabili indipendenti, ove sono assegnate le condizioni necessarie e sufficienti affinchè essa ammetta $n-1$ integrali ortogonali fra loro due a due in una varietà riemanniana ad n dimensioni; verificate queste condizioni, viene precisato il grado d'indeterminazione di questi integrali e dato un modo per ottenerli. È, come si vede, una generalizzazione dei sistemi n-upli ortogonali di linee in uno spazio euclideo il cui studio è sviluppato in una bella Memoria del Darboux del 1878. Nel caso delle varietà a tre dimensioni, il Ricci ottiene dei risultati che contengono, come caso particolare, la nota equazione differenziale alla quale soddisfa il parametro d'una famiglia di Lamé, quando il quadrato dell'elemento lineare della V_3 è euclideo e pitagorico, nella forma assegnatale da Weingarten. Su questa equazione Egli ritorna più tardi, scrivendola subito in coordinate generali, essendo allora in possesso dei metodi del Calcolo assoluto.

Il germe di questo Calcolo si trova nella Memoria ora menzionata del 1886, perchè è qui che il Ricci s'imbatte per la prima volta con le derivate covarianti d'una funzione rispetto ad una quadrica. Esse attrassero fortemente la Sua attenzione da venire considerate come qualche cosa « plus essentielle, plus simple et en même temps plus complète que toutes les dérivées partielles » come Egli scrive nella Prefazione della Memoria, usando per esse le parole di Lamé per i parametri differenziali. La tecnica dell'algoritmo, da Lui chiamato nel 1893 Calcolo differenziale assoluto, con le prime applicazioni alla Fisica matematica, alla Geometria differenziale, alla ricerca degli invarianti differenziali, è tutta contenuta in quattro lavori che vanno dal 1888 al 1892. Fra queste, spicca per generalità, genialità di concezione, eleganza di procedimenti, quella nella quale si determinano gli invarianti differenziali di ordine qualsiasi μ che si hanno associando ad una forma quadratica differenziale φ quanti si vogliano tensori covarianti e contravarianti. Nel caso che essi siano tutti covarianti, al quale ci possiamo sempre ridurre, la determinazione si effettua risolvendo un problema di eliminazione algebrica, e precisamente a trovare gli invarianti algebrici del sistema di forme che si ottiene associando alla quadrica φ e alle forme costruite con i tensori proposti, quelle ottenute con μ successive derivazioni covarianti secondo φ e inoltre, per $\mu > 1$ e φ non di classe zero, quelle altre forme date dal tensore di Riemann e da quelle derivate secondo φ fino all'ordine $\mu - 2$.

Sia ancora segnalata la ricerca delle condizioni di compatibilità per le componenti del tensore di deformazione, supposto il mezzo ad n dimensioni immerso in una varietà riemanniana V_n. Queste condizioni, che per i mezzi continui dello spazio ordinario riferito a coordinate cartesiane ortogonali, si riducono, naturalmente, a quelle del Saint-Venant, sarebbero state le definitive, quallora il Ricci avesse osservato — cosa che fece l'anno successivo in una lettera al Collega Prof. Padova —, che certe somme formate con le derivate covarianti del tensore di Riemann, sono nulle. Queste somme eguagliate a zero, sono le identità che il Bianchi pubblicò nel 1902 (1).

Successivamente il Ricci applicò i Suoi metodi a problemi attinenti alle varietà a due dimensioni. Le prime ricerche hanno inizio con lo studio delle congruenze di linee tracciate nella V_2 prendendo a base, nell'indirizzo del Beltrami, le loro equazioni differenziali anzichè quelle in termini finiti, con i loro sistemi covarianti e contravarianti, ora chiamati momenti e parametri, o campo di vettori covarianti e contravarianti. I fasci di congruenze di linee, che già erano apparsi in ricerche precedenti di qualche geometra, senza riceverne cospicuo rilievo, qui figurano invece in modo sistematico con i loro tensori covarianti e contravarianti. Gli invarianti differenziali assoluti comuni alla forma che dà il ds^2 della V_2 e alle forme covarianti della congruenza, o del fascio, ricevano la loro interpretazione geometrica. Limitiamoci a segnalare l'invariante, da Lui chiamato anisotermia del fascio, il cui annullarsi caratterizza i fasci formati da congruenze isoterme. Siano segnalate nel Volume: la trattazione dei due problemi relativi all'applicabilità delle superficie, la determinazione di tutti i ds^2 riducibili alla forma di Liouville, che ha tanto interesse in quistioni geometriche e meccaniche, la Memoria ove vengono esposti i principi generali della teoria delle superficie, prendendo come punto di partenza le loro equazioni intrinseche e applicati poi allo studio di quelle del second'ordine quando sia data una espressione del quadrato del loro elemento lineare. Il Volume si chiude con lo studio delle ipersuperficie ad un numero qualesivoglia di dimensioni, determinando dapprima le condizioni necessarie e sufficienti perchè una quadrica differenziale ad n variabili rappresenti il quadrato dell'elemento lineare di una ipersuperficie ad n dimensioni immersa in uno spazio lineare ad $n+1$ dimensioni, e stabilendo poi, sotto forma intrinseca, le equazioni di Gauss e di Codazzi.

Il Volume II contiene 31 lavori che vanno dal 1896 al 1926. Esso comincia con la poderosa Memoria sui sistemi di congruenze ortogonali di linee in una V_n, ove si trova sviluppato un algoritmo che il Ricci chiamò Geometria intrinseca, seguendo una locuzione adoperata prima dal Cesaro. Tale Geometria, legata ad una n-upla ortogonale di congruenze di linee, generalizza notevolmente la teoria del triedro mobile del Darboux e viene da Lui eretta come vero strumento di Calcolo. L'applicazione dei metodi del Calcolo assoluto è resa possibile da una forma speciale data alle equazioni differenziali della congruenza, le quali figurano con i loro campi di vettori, covarianti e contravarianti. In verità, l'idea di studiare le linee, non sulle loro equazioni in termini finiti, ma sulle loro equazioni differenziali, si trovava già qua e là nella Geometria differenziale, come, ad es., nella Nota del Beltrami del 1872 «Di un sistema di formole per lo studio delle linee e delle superficie ortogonali» ove s'incontrano risultati, in coordinate cartesiane e per linee tracciate nello spazio ordinario, che sono contenuti fra quelli che il Ricci ottiene in questa Memoria. Sono qui introdotti quegli invarianti, da Lui chiamati coefficienti di rotazione della n-upla di congruenze per un loro significato cinematico e denotati con la lettera γ a tre indici latini, che sono tanto utili e vantaggiosi per rilevare i caratteri geometrici più salienti delle linee della congruenza. Essi tengono il posto in questo riferimento, che con linguaggio moderno si chiamerebbe anolonomo, dei simboli di Christoffel. Si può infatti istituire con essi una operazione di derivazione perfettamente analoga a quella di Christoffel e costruire altri invarianti, denotati dal Ricci con la lettera

(1) Qualche anno fa, lo Schouten gentilmente mi comunicava che queste identità si trovano pure nella Memoria del Voss del 1880: *Zur Theorie der Transformation quadratischer Differentialausdrücke und der Krümmung höherer Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. B. XVI.

γ a quattro indici, intimamente legati ai simboli di Riemann della varietà. Da queste $\gamma_{hk,il}$, Egli ottiene ancora nuovi invarianti, indicati con la γ a due indici, che hanno un ruolo essenziale nelle curvature della varietà e sono legati, nelle V_3, al tensore doppio simmetrico di Ricci che tiene il posto del tensore quadruplo di Riemann per le V_n. Si trova definito l'importante concetto di sistema canonico ortogonale di congruenze rispetto ad una data congruenza, ed assegnata una interpretazione cinematica, o geometrica, a certi risultati che Egli aveva ottenuto nella Memoria del 1887 sugli integrali ortogonali in V_n di una equazione a derivate parziali del primo ordine con un numero n di variabili indipendenti. Termina la Memoria uno studio dettagliato delle ipersuperficie ad n dimensioni immerse in una varietà euclidea ad $n+1$ dimensioni.

Ogni gruppo di equazioni ottenuto con i canoni del Calcolo assoluto, può essere trasformato facendo intervenire i concetti e i metodi della Geometria intrinseca. Succede talvolta che il primitivo sistema di equazioni, che lasciava poca speranza di essere abbordato con risultati conclusivi, si trasformi in un sistema equivalente la cui inattesa semplicità porti alla risoluzione definitiva della quistione. Una applicazione di questi principî si trova nella Memoria del 1899 sui gruppi continui di moti rigidi in una V_n. Le ricerche qui sviluppate sono connesse con quelle del Lie sul problema di Riemann-Helmoltz e con quelle del Bianchi sugli spazi a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti. Uno studio completo della quistione viene fatto per le V_3, ove la determinazione di quelle che ammettono un gruppo di movimenti transitivi o non transitivi viene ottenuta facendo intervenire le congruenze e le curvature principali delle varietà.

I concetti di congruenze e curvature principali per le V_n, già contenuti in ricerche di Christoffel, Lipschitz, Souvoroff, Beez, Schur, sono inquadrati dal Ricci in una teoria generale esposta in una Nota del 1904 che consente di dare ad essi una forma semplice e armonica. Sia segnalato il procedimento, esposto alla fine d'una Nota lincea del 1910, con il quale sono ottenute le congruenze e le curvature principali d'una V_n, riducendo a forma canonica, mediante sostituzioni ortogonali, la quadrica che ha per coefficienti le γ_{hk} relativi ad una n-upla di congruenze della varietà.

Il Volume contiene la celebre Monografia « Méthodes de Calcul différentiel et leurs applications » scritta in collaborazione del Levi-Civita. Questa Monografia è così conosciuta nell'ambiente matematico che ne riteniamo superflua una recensione. Vi sono esposti: l'algoritmo del Calcolo assoluto, quello della Geometria intrinseca, applicazioni alla ricerca degli invarianti differenziali, alla Geometria differenziale delle varietà riemanniane, alla Meccanica, alla Fisica matematica.

Al problema dell'immersione il Ricci ha dedicato due ricerche. Una è contenuta nella Nota che chiude il Volume I, della quale abbiamo accennato, esposta, con più ampio sviluppo, anche nella Memoria con la quale si apre il Volume II, l'altra si trova in una Nota lincea, ove viene trattato il caso generale di una V_n immersa in una V_{n+m}. Le formule ottenute si prestano molto bene a deduzioni geometriche relative a concetti di curvatura nelle varietà riemanniane ad un numero qualunque di dimensioni.

Il problema di Hadamard di determinare le V_n che contengono varietà geodetiche, viene ricondotto dal Ricci, a mezzo delle formule stabilite nella ricerca precedente, a quello di ottenere tutti i ds^2 delle varietà geodetiche per i quali un certo sistema di equazioni ai differenziali totali risulta integrabile. La teoria delle congruenze e delle curvature principali quadra perfettamente per risolvere la quistione. Limitiamoci a segnalare l'espressivo teorema che se una V_3 contiene delle famiglie di infinite superficie geodetiche, le traiettorie ortogonali di una qualunque di queste famiglie, costituiscono per le V_3 una congruenza principale. Questo risultato verrà poi esteso alle V_n che contengono delle famiglie d'infinite famiglie geodetiche ed applicato più tardi per risolvere una quistione sulla riducibilità delle quadriche e, in particolare, per caratterizzare i ds^2 della statica einsteiniana.

Seguono i lavori che vanno dal 1905 in poi. Di minore portata speculativa, sempre però meritevoli di adeguata investigazione, sono quelli che si riferiscono alla determinazione delle V_n che godono di proprietà intrinseche prestabilite. Viene stabilito un metodo generale per trovarle ed applicato, per le V_3, a caratterizzare quelle, ove è possibile tracciare una terna di congruenze ognuna delle quali è normale e isotropa; si trova che sono solo e soltanto quelle rappresentabili conformemente sulle varietà euclidee. In altre due Note si determinano le V_3 che hanno geodetiche le linee delle congruenze principali. Esse si ripartiscono in due classi, in una delle quali trovano posto le V_3 nelle quali le terne principali hanno costanti le rotazioni. Questo risultato Lo porta, naturalmente, a caratterizzare tutte le varietà tridimensionali ove è possibile tracciare una terna di congruenze a rotazioni costanti, ciò che il Ricci fece in una Nota successiva. Sono problemi, come si vede, ben definiti, di enunciato semplice, ma la loro impostazione con i mezzi ordinari darebbe luogo ad equazioni assai complesse.

Il problema della riducibilità delle quadriche, intimamente connesso con quello della determinazione dei loro invarianti differenziali, ha fatto oggetto di ricerca anche negli ultimi anni della Sua vita. Per le quadriche ternarie, un sistema completo d'invarianti differenziali del second'ordine è fornito dalle curvature principali delle V_3 il cui ds^2 si identifica con la forma assegnata. Per le quadriche generali, la quistione viene risolta applicando il metodo da Lui esposto in una Memoria del 1907 per determinare un sistema completo di invarianti di ordine qualunque comuni a più forme. Nel caso degli invarianti del second'ordine, le forme sono: la quadrica data e quella quadrilineare di Riemann.

La quistione di caratterizzare intrinsecamente le forme quadratiche differenziali ad n variabili che si possono trasformare nella somma di una quadrica che contiene soltanto i differenziali di $n-1$ variabili e di un termine quadratico nel differenziale della n-esima variabile y, viene risolto mediante applicazione di un metodo generale per riconoscere quando una forma quadratica è algebricamente o assolutamente riducibile (2). Questo metodo conduce a determinare le condizioni necessarie e sufficienti affinchè, dato un sistema di equazioni ai differenziali totali in n variabili, si possa ad esso soddisfare considerando le n variabili come funzioni di altre $h<n$ nuove variabili e, soddisfatte queste condizioni, assegnare un procedimento per trovare le funzioni. La quistione è stata oggetto di un lavoro pubblicato nello stesso anno della Nota precedente. Nel caso che il coefficiente del termine quadratico non contenga la y, trova immediata applicazione alla caratterizzazione dei ds^2 della statica einsteiniana.

L'ultimo contributo del Ricci alla teoria delle varietà riemanniane fu comunicato al Congresso internazionale dei matematici di Toronto del 1924 e si riferisce allo studio di una V_{n-m} di V_n che viene fatto inserendola in un insieme $\infty^m V_{n-m}$ di V_n rappresentate da $n-m$ congruenze ortogonali di linee che le generano, o mediante m congruenze costituenti con quelle una n-upla ortogonale. È, come si vede, un ritorno all'idea di inserire una linea di V_n nell'insieme ∞^{n-1} linee costituenti con essa una n-upla ortogo-

(2) Secondo Ricci una quadrica differenziale ad n variabili è *algebricamente riducibile* se mediante una trasformazione puntuale può ridursi a contenere soltanto i differenziali di $n-1$ variabili; è *assolutamente riducibile* se inoltre nei coefficienti della forma ridotta figurano solo queste varabili.

nale qualora si voglia studiare la linea stessa, idea che è stata sviluppata nella Memoria con la quale s'inizia questo Volume.

Con riferimento alle Note e Memorie, esso si chiude con una Nota postuma, ove viene esposto un procedimento atto a determinare tutte le soluzioni di una equazione differenziale ordinaria o di un sistema di tali equazioni.

Nel 1890 il Ricci ebbe la cattedra di Analisi algebrica. Trovò subito la necessità di porre a base del Suo Corso una completa trattazione della teoria dei numeri reali. In una estesa Memoria del 1897 tale teoria è fondata sulle ripartizioni di Dedekind e sviluppata nei più minuti particolari. Anche i fondamenti del Calcolo infinitesimale attrassero la Sua attenzione «Le teorie del Calcolo infinitesimale ricevono chiarezza meravigliosa da un unico fondamentale concetto: il concetto generalizzato di successione». Così Egli si esprime nella Prefazione del Suo Corso — Lezioni di Analisi infinitesimale — interrotta per morte inattesa. Nel Volume si trovano solo due Note in quest'ordine di idee: una si riferisce al teorema fondamentale del Calcolo integrale sulle somme di infinitesimi il cui numero va sempre crescendo e che tendono a zero uniformemente, nell'altra si dà una condizione necessaria e sufficiente perchè una successione — intesa nel senso da Lui precisato — tenda verso un limite finito o, se infinito, sia determinato di segno.

La seconda Parte del Volume contiene la teoria matematica dell'elasticità, che viene svolta applicando i metodi del Calcolo assoluto. Nel Capitolo I si sviluppano i principi generali delle deformazioni infinitesime. Riferito lo spazio ad un sistema di coordinate curvilinee, ed assunta come fondamentale la quadrica differenziale che dà il quadrato del suo elemento lineare in queste variabili, si ottiene subito una formula generale dalla quale si traggono contemporaneamente gli allungamenti degli elementi lineari e gli scorrimenti di due elementi lineari passanti per uno stesso punto. Le direzioni e le dilatazioni principali sono ottenute riducendo a forma canonica le componenti del tensore di deformazione. Seguono: le espressioni generali degli invarianti di deformazione, lo studio del cono di scorrimento, la nota scomposizione della deformazione infinitesima, le condizioni di rigidità. Sono poi determinate, in coordinate generali, le condizioni necessarie e sufficienti perchè una quadrica differenziale possa riguardarsi come quadrica di deformazione. Chiude il Capitolo un breve studio sulle deformazioni termiche.

Il Capitolo II s'inizia con la determinazione del potenziale elastico. Sono assegnate le forme di esso quando esiste nel mezzo un piano di simmetria, oppure un asse di periodo due, tre, quattro e sei, quelle relative ai sistemi cristallini e ai mezzi isotropi. Il Capitolo si chiude con le condizioni alle quali devono soddisfare le due costanti che figurano nel potenziale isotropo.

Il Capitolo III si apre con la deduzione diretta delle equazioni dell'equilibrio elastico. Esse erano già state date dal Ricci nel 1888 in una delle prime applicazioni che Egli fece dei Suoi metodi,, partendo dalle equazioni dell'equilibrio in coordinate cartesiane e costruendo poi un tensore le cui componenti, in tali coordinate, si identificano con i primi membri delle equazioni cartesiane. Qui invece le equazioni indefinite e al contorno sono dedotte ponendo a base il principio delle velocità virtuali e applicando poi delle giudiziose trasformazioni di integrali. Segue la dimostrazione dell'unicità della soluzione, a meno di moti rigidi, il teorema di reciprocità del Betti, la distribuzione delle pressioni all'interno del corpo e le relazioni fra le pressioni e le componenti di deformazione. Chiude il Capitolo lo studio dell'ellissoide di elasticità.

Il Capitolo IV, che è l'ultimo, comincia con la deduzione delle equazioni del moto elastico, applicando il principio di D'Alembert. Fa seguito la scomposizione del movimento in moti elementari e il teorema di Saint-

Venant sulla forza viva di un mezzo vibrante. La soluzione generale delle equazioni del moto è ottenuta nell'ipotesi che essa sia sviluppabile in serie di Mac-Laurin, determinando i coefficienti mediante le condizioni iniziali di Cauchy. Riferito il corpo a coordinate cartesiane ortogonali, viene dimostrato il teorema di Clebsch sulla decomposizione del moto in uno trasversale e l'altro longitudinale, supponendo nulle le forze esterne ed il mezzo omogeneo, isotropo e indefinito. Lo studio del moto vibratorio viene allora ricondotto all'integrazione dell'equazione di D'Alembert in quattro variabili, della quale se ne dà l'integrale sotto la forma di Poisson; da essa si trae che ogni perturbazione elastica provocata in un punto del mezzo si scinde in due, una priva di rotazione, l'altezza puramente vorticosa. Seguono delle applicazioni alle onde piane e sferiche, longitudinali e trasversali, alle interferenze luminose, alla polarizzazione ellittica e circolare. Sono esaminati i casi di onde trasversali emananti da uno o due centri luminosi, dimostrata la possibilità della propagazione per onde piane nei mezzi anisotropi e ricavata l'equazione delle velocità. Il Capitolo si chiude con lo studio dei mezzi di Green ed in particolare dei mezzi uniassici e biassici.

I ricercatori che vorranno rivolgere lo sguardo verso i fondamenti dell'Analisi tensoriale, dovranno meditare sui risultati e sui metodi impiegati per conseguirli esposti nelle pagine di questi due volumi. Allora apparirà loro grandiosa la figura del creatore di essi — Gregorio Ricci Curbastro — al quale ben si addice l'oraziano « exegi monumentum aere perennius ».

ANGELO TONOLO

Convegno internazionale sulle equazioni lineari alle derivate parziali, promosso dalla Università degli Studi di Trieste (Trieste 25-28 Agosto 1954), Edizioni Cremonese, Roma 1955, pag. XIII+231, prezzo L. 3000.

In questo volume, edito dalla Unione Matematica Italiana con il contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche, sono riportate le conferenze tenute nel Convegno internazione sopra indicato, che ha visti riuniti molti fra i più illustri cultori della materia e che ha lasciato in tutti i partecipanti il più vivo ricordo, sia per il suo brillante successo scientifico, sia per l'atmosfera cordiale e suggestiva che il Prof. Gaetano Fichera, organizzatore del Convegno, aveva saputo creare.

Dopo un'introduzione del Prof. Giovanni Sansone ed un breve articolo nel quale sono riportate le principali notizie relative al Convegno, il volume contiene i testi di tredici conferenze dedicate a svariati problemi della teoria delle equazioni alle derivate parziali. Fra di esse figura una conferenza di F. Tricomi, a carattere storico-didattico, nella quale l'Autore espone i criteri che l'hanno guidato nella redazione di un libro sulle equazioni a derivate parziali e rifà la storia dell'equazione $yz_{xx}+z_{yy}=0$ che porta il suo nome. Le altre dodici conferenze sono a carattere tecnico e possono, grosso modo, dividersi in tre gruppi. Un primo gruppo riguarda le *equazioni di tipo iperbolico* o *di tipo misto* e comprende le quattro conferenze di S. Agmon (Israele), R. Courant (USA), J. B. Diaz (USA), A. Weinstein (USA). Un secondo gruppo si riferisce alle *equazioni ellittico-paraboliche in generale*; in esso trovano posto le sei conferenze di L. Bers (USA), G. Cimmino, G. Fichera, C. Miranda, L. Nirenberg (USA), G. L. Tautz (Germania). Nel terzo gruppo, riguardante *equazioni ellittiche particolari*, abbiamo due conferenze: di Å. Pleijel (Svezia) e di J. L. Synge

(Irlanda). Accenneremo ora brevemente, per ciascun gruppo, agli argomenti essenziali trattati nelle corrispondenti conferenze.

1° Gruppo - S. Agmon espone i risultati da Lui ottenuti nello studio di due problemi al contorno per l'equazione di Tricomi e per l'equazione più generale $zu_{xx} + u_{zz} + a(x, z)u = b(x, z)$.

R. Courant si occupa della definizione di iperbolicità di un sistema di equazioni a derivate parziali e sviluppa varie considerazioni sul corrispondente problema di Cauchy, intese, fra l'altro, a dare metodi di calcolo numerico approssimato delle soluzioni.

J. B. Diaz espone vari risultati ottenuti da Lui e da altri ricercatori dell'Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics dell'University of Maryland. Si tratta di una modificazione del metodo di Riemann per la risoluzione del problema di Cauchy per l'equazione $u_{xy} + au_x + bu_y = 0$; di complementi ai metodi di Le Roux e di Bergman per costruire, mediante integrazioni definite, soluzioni dell'equazione $u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0$ a partire da una nota $u(x, y, \alpha)$ dipendente da un parametro; di una nuova teoria approssimata per il flusso transonico di un gas politropico, costituente una generalizzazione di quella che conduce al *gas Tricomi*; della risoluzione di un problema singolare di Cauchy per l'equazione $u_{xx} + u_{yy} - - u_{tt} - \frac{k}{t} u_t - h(x, y, t)u = 0$ ed infine di un metodo per ottenere limitazioni inferiori e superiori per certi funzionali quadratici.

A. Weinstein prende in considerazione l'equazione di Euler-Poisson-Darboux $u_{yy} + \frac{k}{y} u_y = \sum_{i=1}^{m} u_{x_i x_i}$, per valori qualsiansi di k e m, e studia per essa il problema di Cauchy (singolare) coi dati u, u_y sull'iperpiano $y = 0$. Successivamente considera la stessa equazione con $m = 1$ e studia per essa il problema $u(x, 0) = f(x)$, $u(x, x) = 0$, mostrandone il collegamento col problema di irraggiamento per l'equazione delle onde.

2° Gruppo - L. Bers e L. Nirenberg hanno tenuto in collaborazione due conferenze. La prima è essenzialmente dedicata a sistemi lineari del tipo

$$(1) \qquad u_x = a_{11}v_x + a_{12}v_y + b_{11}u + b_{12}v + c_1 , \quad -u_y = a_{21}v_x + a_{22}v_y + b_{21}u + b_{22}v + c_2 ,$$

ove i coefficienti si suppongono soltanto misurabili e limitati ed il sistema *uniformemente ellittico*, nel senso che $4a_{12}a_{21} - (a_{11} + a_{22})^2 \geq p > 0$. Per le soluzioni di (1) (da intendersi in un certo senso generalizzato) vien dato un teorema di rappresentazione che permette di ricavare varie proprietà qualitative delle soluzioni stesse e di dimostrare un teorema di esistenza e di unicità per un certo problema di Dirichlet. Lo stesso problema viene poi considerato per un sistema quasi lineare

$$(2) \qquad u_x = a_{11}v_x + a_{12}v_y + c_1 , \quad -u_y = a_{21}v_x + a_{22}v_y + c_2 ,$$

con i coefficienti $a_{11}, \ldots, c_2$ funzioni continue di x, y, u, v, dando per esso un teorema di esistenza. Considerato poi il sistema (2) con $c_1 \equiv c_2 \equiv 0$, viene esposto un teorema di Z. Schapiro che estende, alle rappresentazioni definite da soluzioni del sistema stesso, il classico teorema di Riemann sulla rappresentazione conforme. Vengono infine stabiliti vari confronti con la teoria delle funzioni quasi analitiche.

Nella seconda conferenza di Bers e Nirenberg sono considerate equazioni uniformemente ellittiche nell'incognita $\Phi(x, y)$ che possono essere: (A) lineari con coefficienti misurabili e limitati; (B) quasi lineari con coefficienti continui; (C) non lineari, $F(x, y, \Phi, \Phi_x, \Phi_y, \Phi_{xx}, \Phi_{xy}, \Phi_{yy}) = 0$, con F dotata di derivate prime. Per tali equazioni sono considerati i problemi di Dirichlet e di Neumann. Basandosi su un lemma che fornisce alcune maggiorazioni a priori per le soluzioni di (A), si perviene, per detti problemi, a teoremi di esistenza e di unicità per (A) e (C), di esistenza per (B). Sono dati anche vari altri teoremi concernenti notevoli proprietà di soluzioni di equazioni (A).

G. Cimmino ricorda, nella sua conferenza, le sue ricerche sui problemi al contorno con condizioni alla frontiera di tipo generalizzato (valori assunti *in media*). Limitandosi, per semplicità, alle funzioni armoniche, Egli cita vari esempi di spazi hilbertiani di tali funzioni, utili da considerarsi nelle predette ricerche. Accenna infine ai risultati ottenuti da B. Pini, nello stesso indirizzo, per equazioni più generali, ellittiche o paraboliche.

La conferenza di G. Fichera si inizia con l'esposizione di un principio generale di Analisi funzionale che assegna la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza della soluzione di una certa equazione in cui l'incognita è un funzionale lineare e continuo in uno spazio di Banach. Successivamente si considerano, per un'equazione lineare del 2° ordine di tipo ellittico in un numero qualsiasi di variabili indipendenti, i problemi di Dirichlet, di Neumann ed un problema misto ed, applicando il sopraddetto principio generale, si dimostrano i relativi teoremi di esistenza e di unicità. Lo stesso principio è poi anche sfruttato per lo studio dei problemi al contorno relativi ad equazioni paraboliche del 2° ordine. Per tutte queste applicazioni del principio generale è indispensabile la conoscenza di formule di maggiorazione a priori relativamente alle soluzioni del problema che si considera. Per il caso in cui non si disponga di tali formule, viene indicato un altro metodo (basato sugli spazi di Hilbert) per arrivare a dimostrare l'esistenza di soluzioni generalizzate.

La conferenza di C. Miranda tratta anzitutto dei sistemi del tipo

$$a_{i1}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{i2}\frac{\partial u}{\partial y}+b_{i1}\frac{\partial v}{\partial x}+b_{i2}\frac{\partial v}{\partial y}=c_{i1}u+c_{i2}v+f_i\,,\qquad (i=1,\ 2),$$

nell'ipotesi dell'ellitticità [forma quadratica $\Sigma(a_{1i}b_{2k}-a_{2i}b_{1k})\lambda_i\lambda_k$ definita positiva], prospettando un panorama di tutte le ricerche su di essi eseguite. Nel caso particolare

$$\frac{\partial v}{\partial y}=a_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial u}{\partial y}+f_1\,,\qquad -\frac{\partial v}{\partial x}=a_{21}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{22}\frac{\partial u}{\partial y}+f_2\,,$$

tali ricerche vertono sul problema di Dirichlet, sulle applicazioni allo studio degli integrali doppi del Calcolo delle variazioni ed alla teoria della rappresentazione conforme di una superficie su un dominio piano. Nel caso generale si citano i risultati ottenuti per il problema in cui sono assegnati sulla frontiera i valori di una combinazione lineare di u e v. Sono infine accennate le estensioni al caso di più di due variabili indipendenti e segnalati contributi dell'Autore e di G. Stampacchia.

Nella conferenza di G. L. Tautz sono esposte succintamente le ricerche dell'Autore sulle condizioni affinchè un'assegnata famiglia di funzioni possa identificarsi con la totalità delle soluzioni di tutti i possibili problemi di Dirichlet relativi ad un'equazione di 2° ordine di tipo ellittico.

3° Gruppo - La conferenza di Å. Pleijel concerne gli autovalori λ_ν del problema $\Delta u+\lambda u=0$ (in tre variabili) con $u=0$ sulla frontiera di un dato dominio. Si tratta di studiare la funzione $N(t)$ che esprime il numero degli autovalori λ_ν che sono non superiori a t e di darne una espressione asintotica per $t\to+\infty$. Sono esposti i risultati ottenuti in proposito, con i contributi apportati dall'Autore.

Infine J. L. Synge espone un'applicazione del cosiddetto *metodo dell'ipercerchio* al calcolo numerico della soluzione di un particolare problema al contorno misto per l'equazione biarmonica in due variabili.

Da quanto è stato esposto si vede la varietà e l'interesse degli argomenti considerati nel volume. Se si tiene anche conto della cura con cui gli Autori hanno redatti i testi delle varie conferenze e delle numerose citazioni bibliografiche aggiunte a ciascuna di esse, si può affermare che il libro in esame va ben oltre il suo compito di presentatore dei lavori svoltisi nel Convegno; esso costituisce un vero e proprio testo per i cultori della moderna teoria delle equazioni a derivate parziali.

ALDO GHIZZETTI

SALVATORE CHERUBINO, *Calcolo delle matrici,* Monografie Matemamatiche a cura del Consiglio Nazionale delle Ricerche, 4. (Ediz. Cremonese, Roma, 1957), VIII + 322 pp. Lire 4.000.

Il calcolo delle matrici è un algoritmo che permette di realizzare sostanziali economie di pensiero in più di un ramo della matematica e rappresenta uno strumento naturale e spesso insostituibile per una vastissima gamma di applicazioni tecniche.

All'esigenza di avere anche in Italia una trattazione organica su questo argomento, da tempo sentita dai nostri cultori di matematica, venne incontro la Commissione per le Monografie Matematiche del C.N.R. includendo nel piano editoriale della nuova serie la presente Monografia, tra le prime, ed affidandone la redazione a Salvatore Cherubino che al calcolo delle matrici ha dedicato ampia parte della sua attività scientifica e didattica.

La mole cospicua attualmente raggiunta dalla teoria non poteva essere affrontata in blocco se non a svantaggio della chiarezza ed a rischio di tradire gli scopi della collezione di cui fa parte la Monografia riducendo questa ad un voluminoso repertorio. Di qui il problema di compiere una selezione degli argomenti, risolto felicemente dall'Autore, al quale l'uso di un linguaggio e di un simbolismo sintetici e soprattutto la profonda conoscenza della materia hanno consentito di rielaborarla delineandone i tratti essenziali nello spazio veramente modesto di men che 300 pagine.

Un sommario dei paragrafi in cui è diviso il libro varrà a dare una idea della sua struttura: Cap. I - Proprietà formali. § 1. Definizioni e notazioni; § 2. Somma e prodotto; § 3. Riduzione a forma triangolare; § 4. Le equazioni $AX = B$, $YA = C$; § 5. Simmetria ed antisimmetria. Diagonalizzazione; § 6. Normalizzazione. Massimo valore assoluto di un determinante. § 7. Forme quadratiche e forme hermitiane. Matrici definite o semidefinite; § 8. Permutabilità ed ortodiagonalizzabilità; § 9. Brevi nozioni sugli anelli e sui corpi numerici; § 10. Matrici ad elementi polinomi; § 11. Matrici intere; § 12. Nozioni sulle algebre astratte; § 13. Derivazione e integrazione. Prodotto integrale; § 14. Spazio numerico, spazio vettoriale, spazio proiettivo.

Cap. II. - Proprietà di struttura. § 1. Equazioni e radici caratteristiche; § 2. Teoremi di Lappo-Danilevsky e di Frobenius; § 3. Riferimento ortogonale di S_n. Massimi e minimi delle forme quadratiche; § 4. Trasformazione per contragredienza o per similitudine; § 5. Permutabilità con una matrice assegnata; § 6 Inversa, risolvente, formole di Sylvester e di Frobenius. Algebre commutative.

Cap. III. - Approssimazione e limitazione delle radici caratteristiche. § 1. Approssimazione della radice dominante; § 2. Teoremi di Müller, Ostrowski, Lévy-Hadamard e conseguenze; § 3. Rappresentazione dello spettro nel piano complesso; § 4. Matrici e radici caratteristiche di modulo inferiore all'unità.

Cap. IV. - Funzioni di matrici. § 1. Serie di matrici; § 2. Funzioni in un'algebra complessa dotata di modulo (secondo Spampinato); § 3. Funzioni analitiche e funzioni olomorfe in un'algebra di matrici dotata di modulo.

Chiudono il volume un accurato indice sistematico, una estesa bibliografia ed un indice analitico.

Come l'Autore dichiara nella Prefazione il presente trattato trae origine da vari corsi da Lui impartiti nell'Università di Pisa e di tale origine testimoniano la chiarezza e l'ordine dell'esposizione che di questo libro fanno un assai pregevole opera di consultazione, accessibile a qualunque lettore dotato di una buona cultura di analisi algebrica, ed al tempo stesso capace di soddisfare più astratte e raffinate esigenze della ricerca specializzata.

Rimane da augurarsi che in un prossimo futuro a questo volume possa aggiungersene un altro nel quale trovino posto le più importanti tra le molteplici applicazioni della teoria. Fra esse quelle alla geometria degli iperspazi e sulle varietà abeliane reali (argomenti nei quali l'Autore conseguì in passato non pochi risultati), sui sistemi differenziali lineari e, non ultime, quelle all'econometrica alle quali l'Autore si è con successo dedicato negli ultimi anni.

ROBERTO CONTI

PAVEL S. ALEKSANDROV, *Topologia combinatoria,* Traduzione dal russo dl Lucio Lombardo-Radice (Edizioni scientifiche Einaudi, Torino, 1957, pp. XVIII + 750).

È noto come P. S. Aleksandrov sia uno dei più famosi cultori di topologia di tutto il mondo, e come il trattato « Topologie » da lui scritto in collaborazione con H. Hopf sia uno dei testi fondamentali di questo recente, ma importantissimo ramo della scienza matematica. La comparsa della traduzione italiana della « Topologia combinatoria » del grande autore russo è quindi stata salutata con gioia da tutti coloro i quali lamentano che la matematica italiana, in tanti altri campi in prima linea, sia, per quanto riguarda la topologia, rimasta parecchio indietro, ed auspicano che il terreno perduto venga rapidamente ricuperato.

Il manoscritto dell'originale russo di questo trattato era già pronto nel 1941, e la sua pubblicazione, a causa degli eventi bellici, fu potuta attuare solo nel 1946. Sia nei cinque anni intercorrenti tra queste date, sia, ancor più, nel decennio successivo, la topologia combinatoria ha compiuto progressi poderosi: nuovi suoi rami si sono sviluppati rapidamente (p. es. la teoria omotopica, la teoria degli spazi fibrati, etc.) e la stessa parte classica viene spesso presentata oggi in modo diverso, specie per la sempre più accentuata tendenza all'algebrizzazione. Ma è difficile tuttavia penetrare nello spirito di questa bellissima disciplina se, nel leggere le esposizioni più astratte, non si ha presente il substrato intuitivo, che solo percorrendo la strada classica si può adeguatamente conquistare. Pertanto, nonostante il divario di tempo trascorso dal 1941 ad oggi, l'opera di Aleksandrov rimane pur sempre di importanza fondamentale, e la sua lettura è vivamente raccomandata non solo a chi vuole penetrare in questa scienza, ma anche a chi vuole approfondirne le cognizioni.

L'autore si è reso pienamente conto delle difficoltà che il principiante può incontrare prima di riuscire a farsi una mentalità topologica, ed è riuscito a presentare le cose in modo che il lettore venga gradatamente portato, quasi senza che egli se ne accorga, dai fatti più elementari e più intuitivi a quelli più riposti e generali.

Nella prima parte, di carattere introduttivo, dopo un primo capitolo in cui sono esposti i concetti basilari sugli spazi topologici, se ne ha un secondo, in cui viene presentata una dimostrazione di carattere elementare del classico teorema di Jordan asserente che una linea semplice chiusa divide il piano in due domini; e successivamente un terzo, dedicato alla classificazione topologica delle superficie chiuse. Poichè in questi capitoli ci si muove nell'ambito di due sole dimensioni, il lettore è grandemente aiutato dall'intuizione, ma nello stesso tempo comincia a famigliarizzarsi, sia pure in casi molto particolari, con metodi e con concetti che giocheranno un ruolo essenziale, in tutta la loro generalità, nei capitoli seguenti.

La seconda parte consta di altri tre capitoli. Nel cap. IV si studia dettagliatamante il concetto di complesso, che, come è noto, è alla base della topologia combinatoria. Il cap. V è dedicato al lemma di Sperner, e ad alcuni notevolissimi teoremi che ne discendono, quali il teorema delle pavimentazioni, quello dell'invarianza del numero delle dimensioni di uno spazio euclideo, quello dell'invarianza dei punti interni per rappresentazioni topologiche, e quello sull'esistenza dei punti fissi in una rappresentazione continua in sè di un simplesso chiuso. Il cap. VI concerne i fondamenti della teoria della dimensione.

Solo con la terza parte (capitoli da VII a XII) si entra nel cuore della topologia omologica, che forma l'oggetto fondamentale dell'opera. Dopochè, nel cap. VII, vengono introdotti il concetto di catena e l'operazione di passaggio al contorno, si giunge, nel cap. VIII, ai gruppi di Betti (o di omologia) dei poliedri, gruppi che costituiscono, come osserva l'autore, il concetto centrale della topologia combinatoria. Nel capitolo IX si introducono quelli che l'autore chiama gruppi di Betti superiori e che oggi vengono più comunemente denominati gruppi di coomologia, e vengono studiate le relazioni tra i gruppi di omologia in diversi gruppi di coefficienti, e tra i gruppi di omologia e quelli di coomologia. Infine, nel capitolo X si dimostra l'invarianza dei gruppi di Betti di un poliedro rispetto al cambiamento della sua triangolazione, e nei capitoli XI e XII la teoria dei gruppi di omologia viene estesa dai poliedri ai compatti qualsivoglia.

La parte IV (capitoli XIII, XIV e XV) è dedicata principalmente allo studio delle varietà e alle diverse leggi di dualità, e culmina nella dimostrazione della legge di dualità di Alexander-Pontrjagin (cap. XIV).

Infine, la parte quinta (capitoli XVI e XVII) consiste in una rielaborazione di due capitoli della «Topologie» di Aleksandrov e Hopf, dovuti principalmente alla penna di quest'ultimo, e sono dedicati ai classici risultati di Brouwer, Lefschetz e Hopf sulle rappresentazioni continue dei poliedri e sui loro punti fissi.

Chiudono l'opera due appendici, contenenti alcune nozioni basilari sui gruppi abeliani e sulla geometria analitica iperspaziale, necessarie per la comprensione dell'opera.

La forma è sempre molto limpida; il rigore della trattazione è accompagnato da una visione intuitiva; numerose figure facilitano la comprensione degli argomenti. Interessantissime anche le brevi introduzioni anteposte a ciascuna parte e a ciascun capitolo, intese ad inquadrare storicamente gli argomenti, ad indicarne i mutui rapporti, e le loro aperture verso ulteriori progressi. Data la vastità e la complessità dell'opera, l'autore si è reso conto che alcuni lettori avrebbero desiderato approfondire solo qualche parte di essa, e pertanto indica spesso quali punti dei capitoli precedenti sono necessari per comprendere un dato argomento. Queste indicazioni si dimostrano anche oltremodo utili a chi voglia ricavare dal libro materia per un suo corso di lezioni. C'è la possibilità di dar vita, sulla base di quest'opera, a corsi di tono ed impostazione molto differenti: più elementari o più elevati, di indirizzo più combinatorio o più funzionale.

Il traduttore ha saputo rendere in ottima forma italiana un'opera scritta in una lingua tanto diversa dalla nostra e così poco nota tra noi. L'editore ci ha fornito un volume che presenta una veste tipografica veramente pregevole e fine. All'uno e all'altro siamo assai grati, perchè siamo certi che la loro fatica contribuirà notevolmente a far conoscere tra noi la moderna topologia e fornirà un forte impulso al potenziamento dell'attività di ricerca degli studiosi italiani.

GUIDO ZAPPA

C. CARATHÉODORY, *Mass und Integral und ihre Algebraisierung*, Birkhäuser, Basel u. Stuttgart, 1956, pp. 337.

La lettura di questo splendido libro permette di valutare la grande, profonda evoluzione che l'insigne matematico tedesco arrivò a compiere negli ultimi anni di vita, su taluni dei concetti fondamentali, più importanti dell'Analisi. Era da lungo tempo attesa la pubblicazione di una seconda e di una terza parte del trattato del Carathéodory, *Reelle Funktionen*, la cui prima parte era apparsa nel 1939 (1), cioè poco dopo la pubblicazione della memoria *Entwurf für eine Algebraisierung des Integralbegriffs* nei Sitzungsberichte dell'Accademia delle Scienze di Baviera. In quella memoria, originale ed ardita, l'Autore aveva dimostrato la possibilità di svolgere, per sommi capi, una teoria dell'integrazione sostanzialmente equivalente a quella di Lebesgue-Stieltjes, considerando i « campi d'integrazione » non più come insiemi di punti di un certo spazio, ma astrattamente come entità primitive definite dalle sole operazioni di somma (*Vereinigung*), prodotto (*Durchschnitt*) e differenza (*Verbindung*) (2).

La questione più difficile, che l'Autore era riuscito felicemente a superare nella citata memoria, era stata quella di definire le funzioni integrande non già come funzioni di punto, ma come funzioni (dette *Ortsfunktionen*) dei suddetti campi d'integrazione. L'*Entwurf*, per un matematico d'eccezionale potenza creatrice quale il Carathéodory, significava un vasto programma di ricerca nel quale l'Autore stesso, secondo ogni previsione, si sarebbe inoltrato profondamente raggiungendo risultati definitivi e del più alto interesse. Infatti di tali risultati se ne appresero a dovizia, in lavori successivi che l'Autore andò pubblicando dal 1938 al 1944, fra i quali emerse quello degli Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa (3): *Die Homomorphien von Somen und die Multiplikation von Inhaltsfunktionen*. Ed era anche noto che l'Autore aveva continuato assiduamente e con grande successo la ricerca, preparandosi a darne un'esposizione, ampia ed organica, nel seguito del trattato già iniziato, che sopra abbiamo ricordato e sul quale il pubblico matematico avrebbe potuto appunto valutare l'evoluzione concettuale, a un trentennio di distanza dalla prima edizione delle celebri *Vorlesungen über reelle Funktionen*.

Più recentemente però, per le difficoltà di lavoro e di edizione conseguenti alla guerra, e forse anche per il sopraggiunto timore che il fatale decadimento della vecchiaia non gli avrebbe concesso di terminare un'opera di vasta portata, l'Autore ritornò sul suo primitivo progetto e decise infine di raccogliere tutti i suoi studi sull'argomento, in un volume autonomo e di contenuto monografico: tal'è appunto il libro in esame, di cui l'Autore fece a tempo, purtroppo, soltanto a terminare il manoscritto, lasciando la cura della pubblicazione postuma a tre suoi colleghi ed ammiratori, P. Finsler, A. Rosenthal ed R. Steuerwald.

I campi d'integrazione vengono chiamati dall'Autore *somi* (termine da alcuni anni entrato nell'uso di numerosi analisti (4)) e per essi viene all'inizio svolta una teoria assiomatica seguendo H. Stone, cioè una teoria sostanzialmente equivalente ad un'algebra di Boole (Capp. I e II). Seguono le teorie, ampiamente trattate, delle *Ortsfunktionen* (Capp. III e IV), delle *Massfunktionen* (che forniscono i differenziali rispetto ai quali s'intende integrare, Capp. V. VIII, IX e X), la definizione dell'integrale definito e lo studio delle principali proprietà di questo (Capp. VI e VII), come pure delle *Inhaltsfunktionen* (particolari funzioni, esprimibili come integrali, analoghe a quelle introdotte nell'Analisi da H. Hahn, Cap. XI). Il libro si chiude con un'appendice sui somi considerati come elementi di insiemi parzialmente ordinati.

(1) Edit. B. G. Teubner, Lipsia e Berlino.

(2) Il termine *Verbindung*, attribuito a due insiemi di punti A, B, corrisponde non già all'uno o all'altro dei due insiemi $A-B$, $B-A$ comunemente chiamati « differenze », bensì alla somma $(A-B)+(B-A)$ di entrambi. L'introduzione della Verbindung (accanto alla somma e al prodotto), come operazione elementare al posto della comune differenza, semplifica e snellisce notevolmente la teoria.

(3) Vol. 8, 1939 pp. 105-130.

(4) V. per es. G. Aumann, *Reelle Funktionen* (Berlino, Springer 1954); G. Nöbeling, *Grundlagen der Analytischen Topologie* (Berlino, Springer 1954) ecc..

Se non è possibile entrare qui nei dettagli del libro, non ci sembra però fuori luogo l'accennare un po' più da vicino all'idea fondamentale, veramente geniale, da cui prende le mosse l'Autore. Il quale conferma un'ultima volta, in quest'opera che i tre illustri revisori chiamano il suo « canto del cigno », quell'impressione di classicità, cioè di equilibrato senso delle proporzioni e di espressività sobria e cristallinamente chiara, che si ricava dalla grande, infaticabile produzione scientifica di tutta la sua vita. Ma qui *classicità* significa qualcosa di più e cioè ripresa ed approfondimento di concetti attinti alla più pura e più antica tradizione matematica, addirittura alla geometria greca matrice di alta creazione fino all'età moderna. Dalle dichiarazioni stesse dell'Autore (pp. 9-10) risulta infatti che tutta la sua ricerca altro non è che lo svolgimento di questo programma: riportare la definizione dell'integrale e la teoria del medesimo all'originaria teoria euclidea della misura (Euclide I, II e XII libro) la quale, basandosi com'è noto sulle proprietà dell'equivalenza delle figure, cioè anzitutto sull'equiscomponibilità per i poligoni e per taluni poliedri di tipi particolarmente semplici, poi, per tutte le altre figure del piano o dello spazio, sostanzialmente su passaggi a limite eseguiti su successioni di poligoni o di poliedri di tipi semplici, non può considerarsi strettamente equivalente alla moderna teoria della misura degli insiemi di punti. Di qui il capovolgimento del moderno ordine d'idee, cioè la rinuncia ad accettare il punto come elemento fondamentale costitutivo delle grandezze da misurarsi, e la decisione invece d'assumere queste ultime come elementi primitivi, come *Bausteine* combinabili algebricamente, fra di loro, a formare le strutture più complesse. Di qui l'elaborazione accuratissima della teoria assiomatica di questi *Bausteine* o somi, teoria che viene riedificata ex novo per ben tre volte, in modi del tutto indipendenti ma fra loro equivalenti (pp. 9-17, 17-44, 317-322). E l'elaborazione è spinta nei più minuti dettagli, con apparato critico acuto e penetrante, fino a culminare nella dimostrazione di un interessantissimo teorema (pp. 329-333), secondo il quale esistono sistemi (anelli completi) di somi, che non sono isomorfi alla totalità dei sottoinsiemi d'alcun insieme di elementi qualsiasi (5).

Crisi del Cantorismo? Non oseremmo affermarlo. Ma ci piace interpretare l'ordine d'idee dell'Autore, sulla linea collaterale che, dalle lontane divinazioni di Anassagora (6), scende attraverso i secoli, per le profonde e geniali intuizioni filosofiche di Leibniz (7), fino all'intuizionismo moderno (8), ad alimentare di sempre nuove idee suggestive il grande e regale corso della storia delle matematiche.

TULLIO VIOLA

(5) In ultima analisi, il capovolgimento consiste in questo: che i punti, come enti primitivi, devono essere concepiti come privi di parti (Euclide), quindi due punti o sono disgiunti o coincidono; i somi invece devono essere concepiti come possedenti parti (somi, a loro volta), epperò due somi possono non coincidere nè essere disgiunti (*Fremd*). A seconda della teoria assiomatica seguita, viene assunta come idea primitiva quella, per due somi, d'essere disgiunti, oppure d'essere parte uno dell'altro, ecc.. Notevole il fatto paradossale che, in ognuna delle teorie assiomatiche, il soma vuoto è parte di ogni soma pur essendo disgiunto da ogni soma. Naturalmente tutto questo ha un senso, insistiamo, solo da un punto di vista strettamente assiomatico, e in ciò ritroviamo un atteggiamento mentale dell'Autore, che ci è famigliare (V. la teoria assiomatica della misura, nella memoria: *Über das lineare Mass von Punktmengen* ecc. [Nachrichten der K. Gesell. d. Wissensch., Gottinga 1914, pp. 404-426], la teoria assiomatica dei numeri reali nelle *Vorlesungen über reelle Funktionen* [Berlino, B. G. Teubenr 1918 pp. 1-18] ecc.).

(6) V. il commento di F. Enriques e G. de Santillana a un celebre frammento di Anassagora, nella *Storia del Pensiero Scientifico* (vol. I, Bologna 1932 pp. 123-124) e quello di L. Geymonat, nella *Storia e filosofia dell'Analisi Infinitesimale* (Torino 1947 p. 27).

(7) V. i numerosi passi delle Opere di Leibniz, commentati da L. Brunschvicg ne *Les étapes de la philosophie mathématique* (Parigi 1929 pp. 221-222).

(8) Ved. L. E. J. Brouwer, *Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik* (Math. Annalen *93*, 1925 pp. 244-257; *95*, 1926 pp. 453-472; *96*, 1927 pp. 451-488).

D. PEDOE, *Circles*, International series of monographs on pure and applied mathematics, vol. 2, Pergamon Press, London, New York, Paris, Los Angeles, 1957, pp. X + 78.

Questo singolare libretto ha lo scopo di esporre ai principianti alcuni fatti matematici in cui il cerchio gioca un ruolo fondamentale.

Il primo capitolo prende le mosse dal cerchio dei nove punti, e dopo una rapida esposizione delle proprietà dell'inversione e della teoria dei fasci di cerchi, giunge alla geometria del compasso. Nel secondo, di carattere più unitario, si fornisce la rappresentazione dei cerchi del piano coi punti dello spazio euclideo a tre dimensioni facendo corrispondere a ciascun cerchio il punto che abbia per coordinate i tre coefficienti che compaiono nella sua equazione, e, con l'ausilio di tale rappresentazione, si riconducono vari problemi sui sistemi di cerchi nel piano a semplici problemi di geometria spaziale.

Il terzo capitolo studia le trasformazioni di Moebius nel piano di Argand-Gauss; dopo avere mostrato come tali trasformazioni mutano cerchi in cerchi e conservano gli angoli, si prova che esse costituiscono un gruppo, e se ne considera il sottogruppo Γ formato da quelle trasformazioni che mutano in sè l'interno di un dato cerchio ω, allo scopo di giungere al modello di geometria non euclidea iperbolica (dovuto al Poincaré) in cui i punti sono i punti interni ad ω, le rette sono gli archi di cerchi che risultano interni ad ω, con gli estremi su ω stesso, ed ortogonali a questo, e le congruenze sono le trasformazioni di Moebius appartenenti a Γ.

Infine il quarto capitolo è dedicato alle proprietà isoperimetriche del cerchio. Si giunge precisamente a dimostrare, sulla base del procedimento di Steiner, reso corretto con l'ausilio dell'analisi ,che, tra le curve chiuse di lunghezza assegnata, il cerchio è quella di area massima.

Il volumetto è dedicato agli studenti di matematica dei primi anni, ed ha lo scopo di mostrar loro alcune connessioni tra argomenti piuttosto disparati, aprendo loro diverse finestre verso le matematiche superiori. Esso ha senza dubbio il pregio di leggersi con interesse e di suscitare curiosità e stimoli per ulteriori approfondimenti. Si presenta però piuttosto frammentario e slegato. L'autore dice, nella prefazione, che «it is hoped that this book will appeal to those who deprecate the tendency to overspecialization in mathematics». È giusto combattere la sopraspecializzazione, ma non mi sembra che il modo migliore per combatterla sia quello di giustapporre argomenti assai diversi, la cui unica nota comune è quella di avere per substrato una medesima figura geometrica.

GUIDO ZAPPA

L. W. KANTOROWITSCH und W. I. KRYLOW, *Näherungsmethoden der höheren Analysis*, Hochschulbücher für Mathematik, Band 19, Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956, pag. XI + 611 con 68 figure.

È la traduzione in tedesco di opera russa. Si tratta di un grosso volume ove sono esposti numerosi metodi per il calcolo numerico approssimato delle soluzioni dei problemi ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie lineari, dei problemi al contorno per le equazioni lineari a derivate parziali, delle equazioni integrali di Fredholm, ecc. Le equazioni a derivate parziali sono considerate esclusivamente in due variabili indipendenti, le equazioni integrali in una; vi è da aggiungere, per quanto riguarda le prime, che si parla quasi sempre delle classiche equazioni $\Delta u = f$, $\Delta\Delta u = f$, con pochi cenni ad equazioni di tipo ellittico più generali o di tipo diverso.

I fondamenti teorici relativi ai vari argomenti trattati si suppongono di regola noti al lettore, ma vengono sempre brevemente richiamati. Ogni metodo è illustrato da esempi numerici; fra questi se ne trovano alcuni veramente notevoli ed interessanti. È da notare poi che nella descrizione di ogni metodo sono anche segnalati molti piccoli accorgimenti pratici di indubbia utilità.

Si può dire complessivamente che il volume in discorso costituisce una eccellente guida per chi debba occuparsi di analisi numerica ed anche una buona fonte di notizie per studiosi nel campo dell'analisi pura.

Cercheremo ora di dare un'idea del vasto contenuto del libro che è suddiviso in sette capitoli.

Nel Cap. I sono esposti i metodi risolutivi dei problemi al contorno, basati sulla rappresentazione della soluzione per mezzo di sviluppi in serie. Si parla dapprima (§ 1) del metodo di Fourier (o delle soluzioni semplici) che viene illustrato con esempi relativi alle funzioni armoniche o biarmoniche. Successivamente (§ 2) si espone la teoria dei sistemi di infinite equazioni lineari con infinite incognite $x_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik} x_k + b_i$, $(i = 1, 2, ...)$, soprattutto con riferimento al *caso regolare* $\sum_{k=1}^{\infty} |c_{ik}| < 1$, $(i = 1, 2, ...)$. Nel § 3 si tratta degli sviluppi delle soluzioni in serie di funzioni ortogonali o non ortogonali, sfruttando per queste ultime i risultati del precedente § 2. Il § 4 illustra l'uso delle serie doppie. Infine nel § 5 sono raccolti vari interessanti accorgimenti destinati ad accelerare la convergenza di una serie (in particolare di una serie di Fourier).

Nel Cap. II si prendono in considerazione le equazioni integrali di Fredholm e si espongono metodi per il calcolo numerico approssimato delle soluzioni. Nel § 1 si considera quello fondato sull'approssimazione dell'equazione integrale per mezzo di un sistema di equazioni algebriche e lineari (dedotto coll'uso di una qualsiasi formula di quadratura), dando anche la maggiorazione dell'errore. Nel § 2 si parla del metodo delle approssimazioni successive (serie di Neumann, nucleo risolvente, ecc.); sono indicati artifizi vari per l'impiego delle serie al calcolo numerico, facendo uso anche dell'operazione di prolungamento analitico. Il § 3 è dedicato in sostanza al classico metodo di Neumann per la risoluzione del problema di Dirichlet relativo a funzioni armoniche. Nel § 4 si dà un altro metodo di approssimazione del nucleo dato con uno elementare; sono descritti i vari procedimenti con cui ciò può essere realizzato e fra essi è particolarmente interessante uno dovuto a Bateman.

Nel Cap. III viene studiato il metodo delle differenze finite. Nel § 1 dopo aver richiamate le più comuni formule di interpolazione, si determinano gli operatori finiti che approssimano gli operatori differenziali Δ e $\Delta\Delta$. Nel § 2 si fanno applicazioni a problemi ai limiti ed a problemi al contorno e nel § 3 si danno indicazioni per la risoluzione dei sistemi di equazioni lineari che derivano dal metodo in esame, studiando anche questioni di convergenza e di maggiorazione dell'errore.

Il Cap. IV tratta dei metodi variazionali per lo studio dei problemi al contorno. Dopo un § 1 ove sono richiamate le classiche nozioni di Calcolo delle variazioni e le proprietà di minimo relative agli autovalori ed alle autosoluzioni, viene esposto nel § 2 il metodo di Ritz e di Galerkin con applicazioni varie ed esempi. Nel § 3 si dà un altro metodo, chiamato di riduzione ad equazioni differenziali ordinarie. Il § 4 è di carattere prevalentemente teorico ed in esso sono dati molti teoremi sulla convergenza dei metodi esposti e sulla maggiorazione dell'errore.

Il Cap. V è dedicato alla rappresentazione conforme ed è assai difficile riassumerne il vastissimo contenuto. Ci limiteremo pertanto a pochi cenni. Dopo i necessari richiami (§ 1) sono descritti ed ampiamente illustrati sette metodi per il calcolo approssimato della funzione analitica che rappresenta conformemente un dominio limitato semplicemente connesso (o il dominio complementare) su un cerchio. Due di questi metodi sono di carattere variazionale (§§ 2, 3); il terzo è fondato sull'uso di sviluppi in serie di polinomi ortogonali sulla frontiera del dominio o sul dominio stesso (§ 4); il quarto sfrutta opportuni sviluppi in serie di potenze di un parametro figurante nell'equazione della curva frontiera (§§ 5 e 6); il quinto è un metodo grafico dovuto a Melentjew (§ 7); il sesto è collegato alla determinazione della funzione di Green (§ 8); il settimo è fornito da una traduzione del problema in equazione integrale (§ 9). Segue un ultimo § 10 ove si tratta della rappresentazione conforme di un poligono su un semipiano, dando metodi per il calcolo numerico dei parametri che figurano nella classica formula di Christoffel-Schwarz.

Nel Cap. VI sono mostrate le applicazioni della rappresentazione conforme alla risoluzione di classici problemi al contorno per le funzioni armoniche o biarmoniche in alcuni domini tipici. Si tratta di questioni ben note e non ci fermeremo ad illustrarle in dettaglio; ci limiteremo ad osservare che ogni problema è accompagnato da osservazioni interessanti ed utili per il calcolo numerico.

Il Cap. VII è dedicato al metodo alternato di Schwarz per la risoluzione del problema di Dirichlet posto nella somma di due dominii ed all'analogo metodo di Neumann nel caso del prodotto di due dominii. Sono notevoli le applicazioni numeriche che ne vengono fatte.

Per terminare, diremo ancora che figurano nel libro numerose citazioni bibliografiche, in grandissima parte dedicate ad Autori russi. I lavori italiani sono quasi completamente ignorati: sono riportati soltanto due risultati: uno di M. Picone (p. 49) ed uno di F. Tricomi (p. 141).

ALDO GHIZZETTI

G. HAMEL, *Mechanik der Kontinua,* B. G. Teubner, Stuttgart, 1956.

Quest'opera appare, anche in prima lettura, veramente notevole: in poco più di duecento pagine si trovano esposti e opportunamente coordinati, molti risultati sulla meccanica dei corpi deformabili. Essa manifesta perciò le particolari attitudini di George Hamel come trattatista e in special modo (come dice nella prefazione I. Szabò, che ha curato la stampa del libro dopo la morte dell'Autore) la perfetta conoscenza degli argomenti che espone e la possibilità di rielaborarli mediante idee nuove e originali. Naturalmente, in questo volume, non sono considerate tutte le questioni della meccanica dei sistemi continui, però vengono preferite quelle più moderne e che difficilmente si trovano in altri trattati; così il capitolo sui solidi si riferisce quasi totalmente alla teoria della plasticità. Più ampia e più completa è la trattazione dei fluidi a cui è dedicata buona parte del libro; ottima la deduzione delle equazioni fondamentali opportunamente collegata alla termodinamica. A proposito dei fluidi perfetti, assieme ai risultati classici, sul moto irrotazionale dei fluidi incompressibili e sulla teoria dei vortici non mancano le recenti ricerche sulla dinamica dei gas, di importanza fondamentale nella aereodinamica. Circa i fluidi viscosi, è opportuno segnalare il capitolo, interessante specie dal punto di vista matematico, sulle soluzioni esatte delle equazioni di Navier-Stokes, e l'esposizione, necessariamente sommaria, della teoria dello stato limite e di alcune teorie della turbolenza.

Il libro si presenta assai utile per lo studioso, che intende orientarsi, con facilità, nelle più importanti questioni della dinamica dei fluidi e della plasticità.

DARIO GRAFFI