Bollettino Unione Matematica Italiana

Gino Arrighi

I fondamenti della statica in una trattazione logico-deduttiva.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.4, p. 679–688.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_4_679_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1957.

I fondamenti della statica in una trattazione logico-deduttiva.

Nota di GINO ARRIGHI (a Lucca)

Sunto. - *Nel primo paragrafo, mostrato lo spirito della ricerca e poste le definizioni di forza e dei caratteri di equivalenza ed equilibrio, ricavo una serie di teoremi relativi ai caratteri stessi. Nel secondo, introdotta la nozione di intensità, passo alla sua determinazione numerica e nei successivi paragrafi terzo e quarto, attraverso particolarità di composizione, pervengo alla regola del parallelogramma.*

Summary. - *In the first paragraph of my study, after showing the spirit of my research and setting the definitions of strength and of the characters of equivalence and equilibrium, I draw a series of theorems relative of the characters themsalves. In the second paragraph, after introducing the knawledges of intensity, I pass to its numerical determination and in the next paragraphs that is the third and fourth, through some particularities of composition, I arrive at the rule of parallelogram.*

§ 1. - Introduzione - Equivalenza - Equilibrio.

Compatibilmente ad una immediatezza intuitiva, il problema di una postulazione minima nei fondamenti della statica e, subordinatamente, una trattazione logico-deduttiva di questi, quando si tenga conto dei passi concreti compiutisi in altre discipline, quali ad esempio l'aritmetica e la geometria, può dirsi tutt'altro che risolto.

Su questo incide non poco il carattere puramente oggettivo di tale scienza e, d'altra parte, nello svolgimento di questo capitolo della meccanica non si è presi sovente dallo scrupolo inizialmente richiamato presentando quali postulati dei veri e propri teoremi e tacendo postulati od assiomi peraltro essenziali.

Nella prospettiva di una trattazione di postulazione minima, abbiamo condotto già alcune ricerce (¹) che, in queste memorie, andremo rielaborando e integrando opportunamente. Ci eravamo valsi di una definizione fornita da GIORGI (²) che adesso modifichiamo alquanto pur mantenendone integralmente lo spirito che lo informava reputandolo ancora come il più idoneo.

DEFINIZIONE I. - *Forza è qualunque azione fisica agente su un punto materiale avente effetti meccanici eguali a quelli di un ipotetico filo teso con un capo fissato nel punto predetto.*

Questa definizione pone in evidenza i seguenti elementi geometrici di caratterizzazione di una forza: *punto di applicazione, direzione* e *verso*; la retta individuata da punto di applicazione e direzione si dice *retta d'azione.*

Diamo il quadro dei simboli che adotteremo: F, F_1, ... indicano forze; S, S_1, ... indicano *sistemi di forze,* cioè aggregati di forze; T indica un sistema arbitrario; $F_1 + F_2$, ... indica il sistema costituito delle forze F_1 e F_2, ...; $n\,F$ (con n intero assoluto), ... indica il sistema costituito da n forze identiche a F, ..., $S_1 + S_2$, ... indicata il sistema aggregato delle forze costituenti S_1 e S_2, ...; $[G]$ indica un insieme di tutte le forze avente gli stessi elementi geometrici di caratterizzazione; $[P]$ indica un insieme di tutte le forze aventi lo stesso punto di applicazione; (S), ... indica il complesso degli effetti meccanici che, per esservi applicato S, sono

(¹) G. ARRIGHI, *Su un principio fondamentale della statica,* in "Acta" della « Pontificia Academia Scientiarum », Vol. XII - n. 6, 1948. Id., *Sui fondamenti della statica,* in « Atti del III Congresso dell'Unione Matematica Italiana », 1948. Id., *Sulla equazione funzionale* $2\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y)$, in « Bollettino della Unione Matematica Italiana », Anno IV, 1949. Id., *Sul concetto di intensità delle forze,* comunicazione non stampate alla « XLIII Riunione della S. I. P. S. », 1950, dove era esposta una prima trattazione logico-deduttiva. Id., *Il concetto di forza* in « Atti dell'Accademia Lucchese di Scienze, Lettere ed Arti », Tomo VII, 1951.

(²) G. GIORGI, *I postulati della statica,* in "Commentationes" della « Pontificia Academia Scientiarum », Vol. VII, n. 18, 1943.

determinati in un sistema materiale arbitrario ma con possibilità per agirvi S.

DEFINIZIONE. - *Si dice che* S *e* S_1 *sono equivalenti quando* $(T + S) = (T + S_1)$.

TEOREMA I. - *La equivalenza dei sistemi di forze gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.* Segue dal carattere di equabilità della Def. II.

DEFINIZIONE III. - *Si dice che* S *è in equilibrio quando* $(T + S) = (T)$.

Assioma I (di isotropia). Due sistemi equivalenti restano tali dopo aver loro attribuito uno stesso spostamento rigido. Un sistema in equilibrio resta tale dopo avergli attribuito uno spostamento rigido.

TEOREMA II. - *Due sistemi in equilibrio sono equivalenti.*

Da $(T + S) = (T)$ e $(T + S_1) = (T)$, per Teo. I, segue $(T + S) = (T + S_1)$, c. v. d.

TEOREMA III. - *Un sistema equivalente ad un sistema in equilibrio è in equilibrio.*

Da $(T + S) = (T + S_1)$ e $(T + S_1) = (T)$, per Teo. I, segue $(T + S) = (T)$, c. v. d.

TEOREMA IV. - *L'aggregato di sistemi in equilibrio è in equilibrio.*

Da $(T + S) = (T)$ e $(T + S_1) = (T)$, per Def. III e Teo. I, segue $(T + S + S_1) = (T + S_1) = (T)$, c. v. d.

TEOREMA V. - *Se l'aggregato di due sistemi è in equilibrio e tale è uno di essi, pure l'altro è in equilibrio.*

Da $(T + S + S_1) = (T)$ e $(T + S) = (T)$, per Def. III e Teo. I, segue $(T + S_1) = (T + S + S_1) = (T)$, c. v. d.

TEOREMA VI. - *Se gli aggregati di uno stesso sistema con due altri sono in equilibrio, questi sono equivalenti.*

Da $(T + S + S_2) = (T)$ e $(T + S_1 + S_2) = (T)$, per Def. III, segue $(T + S + S_1 + S_2) = (T + S_1)$ e $(T + S + S_1 + S_2) = (T + S)$ per Teo. I è allora $(T + S) = (T + S_1)$, c. v. d.

TEOREMA VII. - *Se due sistemi sono equivalenti e l'aggregato di un terzo con uno di essi è in equilibrio, tale è anche l'aggregato del terzo coll'altro.*

Da $(T + S) = (T + S_1)$ e $(T + S_1 + S_2) = (T)$, per Def. III e Teo. I, segue $(T + S + S_2) = (T + S_1 + S_2) = (T)$, c. v. d.

TEOREMA VIII. - *Se due sistemi sono, ordinatamente, equivalenti* *ad altri due e l'aggregato dei primi è in equilibrio, tale è anche l'aggregato dei secondi.*

Da $(T+S)=(T+S_1)$ e $(T+S_2)=(T+S_3)$ segue $(T+S+S_2)=$ $=(T+S_1+S_2)$ e $(T+S_1+S_2)=(T+S_1+S_3)$; per $(T+S+S_2)=$ $=(T)$ e Teo. I è allora $(T+S_1+S_3)=(T+S+S_2)=(T)$, c. v. d.

TEOREMA IX. - *Se due aggregati di due sistemi sono in equilibrio ed un sistema del primo aggregato è equivalente ad un sistema del secondo aggregato, anche i due rimanenti sono equivalenti.*

Da $(T+S+S_1)=(T)$ e $(T+S_2+S_3)=(T)$ segue $(T+S+$ $+S_1+S_3)=(T+S_3)$ e $(T+S_1+S_2+S_3)=(T+S_1)$; da $(T+S)=$ $=(T+S_2)$ segue $(T+S+S_1+S_3)=(T+S_1+S_2+S_3)$; per Teo. I è allora $(T+S_1)=(T+S_3)$, c. v. d.

TEOREMA X. - *Se due sistemi sono, ordinatamente, equivalenti ad altri due, l'aggregato dei primi è equivalente all'aggregato dei secondi.*

Da $(T+S)=(T+S_1)$ e $(T+S_2)=(T+S_3)$ segue $(T+S+S_2)=$ $=(T+S_1+S_2)$ e $(T+S_1+S_2)=(T+S_1+S_3)$; per Teo. I è allora $(T+S+S_2)=(T+S_1+S_3)$, c. v. d.

Vale osservare che del Teo. X non si fornisce, per ora, l'inverso.

§ 2. - **Intensità.**

ASSIOMA II. - *Due forze (non in equilibrio) equivalenti hanno egual direzione.*

DEFINIZIONE IV. - *Si dice intensità di una forza* F *uno scalare* f, *variabile in tutto* $(0, +\infty)$, *tale che: condizione necessaria e sufficiente per la equivalenza di due sistemi*, $\mathrm{S}_1=\Sigma\,\mathrm{F}_2$ *e* $\mathrm{S}_2=\Sigma\,\mathrm{F}_s$, *di forze di un* [G] *è* $\Sigma\,\mathrm{f}_r=\Sigma\,\mathrm{f}_s$.

TEOREMA XI. - *Condizione necessaria e sufficiente per la non equivalenza di due sistemi*, $\mathrm{S}_1=\Sigma\,\mathrm{F}_2$ *e* $\mathrm{S}_2=\Sigma\,\mathrm{F}_s$, *di forze di un* [G] *e* $\Sigma\,\mathrm{f}_r \neq \Sigma\,\mathrm{f}_s$.

Segue da Def. IV.

TEOREMA XII. - *Condizione necessaria e sufficiente per la equivalenza di due forze*, F_1 *e* F_2, *di un* [G] *è* $\mathrm{f}_1=\mathrm{f}_2$.

Segue da Def. IV per $S_1=F_1$ e $S_2=F_2$.

TEOREMA XIII. - *Condizione necessaria e sufficiente per la non equivalenza di due forze*, F_1 *e* F_2, *di un* [G] *è* $\mathrm{f}_1 \neq \mathrm{f}_2$.

Segue da Teo. XII.

TEOREMA XIV. - *Condizione necessaria e sufficiente perchè una forza* F *sia in equilibrio è* $\mathrm{f} = 0$.

Se F è in equilibrio, i sistemi $F_1 + F$ e F_1, con F_1 dello stesso $[G]$, sono equivalenti e quindi, per Def. IV, $f_1 + f = f_1$ cioè $f = 0$. Viceversa se $f = 0$, per Teo. XII, F è equivalente ad una forza in equilibrio cioè, per Teo. III, è in equilibrio.

TEOREMA XV. - *Condizione necessaria e sufficiente perchè una forza* F *non sia in equilibrio è* $\mathrm{f} \neq 0$.

Segue da Teo. XIV.

TEOREMA XVI. - *Se due sistemi,* $\Sigma \mathrm{F_r}$ *e* $\Sigma \mathrm{F_s}$, *di forze di un* [G] *non sono equivalenti, esiste una forza di* [G] *che aggregate ad uno di essi li rende equivalenti; tale forza non è in equilibrio.*

Per Teo. XI è $\Sigma f_r \neq \Sigma f_s$ onde, per $\Sigma f_r > \Sigma f_s$, segue $\Sigma f_r = = \Sigma f_s + (\Sigma f_r - \Sigma f_s)$ e quindi, per Def. IV, $(T + \Sigma F_r) = (T + + \Sigma F_s + F^*)$ dove F^* è una forza di $[G]$ d'intensità $f^* = \Sigma f_r - - \Sigma f_s$, c. v. d.

Inoltre F^* non è in equilibrio giacchè $f^* = \Sigma f_r - \Sigma f_s > 0$.

Sia F_c una forza non in equilibrio, quindi con $f_c \neq 0$, e, corrispondentemente ad ogni numero razionale assoluto $\frac{m}{n}$ si considerino i sistemi mF_c e nF con F appartenente, con F_c, allo stesso $[G]$.

Potranno presentarsi, e separatamente, i tre casi

$$mf_c = nf + f^* \qquad \text{con} \quad f^* > 0$$
$$mf_c = nf$$
$$mf_c + f^{**} = nf \qquad \text{con} \quad f^{**} > 0$$

non escludendo la possibilità che il secondo non possa verificarsi per alcun numero razionale assoluto.

Se $m'f_c = n'f + f^*$, $m''f_c = n''f$, $m'''f_c + f^{**} = n'''f$ sarà, corrispondente, $\frac{m'}{n'} f_c = f + \frac{f^*}{n'}$, $\frac{m''}{n''} f_c = f$, $\frac{m'''}{n'''} f_c + \frac{f^{**}}{n'''} = f$ e pertanto avremo $\frac{m'}{n'} > \frac{m''}{n''} > \frac{m'''}{n'''}$. Distribuendo i numeri razionali in due classi tali che la prima contenga tutti quelli di tipo $\frac{m'}{n'}$, la seconda contenga tutti quelli di tipo $\frac{m'''}{n'''}$ e ponendo $\frac{m''}{n''}$, quando esista, nell'una o nell'altra, avremo compiuto una sezione nel campo dei numeri razionali assoluti: il numero reale assoluto fornito ci darà la misura delle intensità di F avendo assunto come intensità unitaria quella di F_c. Questa forza, per altro arbitraria purchè non in equilibrio, sarà detta *forza campione*, da considerarsi corrispondente ad un filo teso campione.

Si consideri un vettore-applicato (in un punto) con punto di applicazione, direzione e verso punti dagli elementi geometrici di caratterizzazione di una forza F e con modulo che, in una certa scala, fornisce la misura di f. Il vettore sarà detto *vettore della forza* e, per quanto superiormente detto, può assicurarsi che uno stesso vettore-applicato rappresenta forze fra loro equivalenti. È poi evidente che: condizione necessaria e sufficiente perchè una forza sia in equilibrio è che il suo vettore sia nullo.

§ 3. - Primi casi di composizione - Forze opposte.

TEOREMA XVII. - *Il sistema di due forze (componenti) di un* [G], *non in equilibrio, è equivalente ad una forza (resultante) di* [G] *avente intensità eguale alla somma delle intensità delle componenti.*

Segue da Def. IV.

POSTULATO I. - *Il sistema di due forze (componenti) di un* [P], *non in equilibrio e non equiverse ma di uguale intensità, è equivalente ad una forza (resultante) di* [P].

Le esclusioni di Pos. I sono relative a casi pei quali è già assicurato l'asserto del postulato stesso; è poi evidente che, per Ass. II, quando si possa pensare a multiplicità di resultanti pertinenti al Pos. I esse dovranno avere la stessa retta di azione.

DEFINIZIONE V. - *Si dice che due forze sono opposte quando appartengono ad uno stesso* [P] *ed hanno vettori opposti.*

TEOREMA XVIII. - *Il sistema costituito di due forze opposte è in equilibrio.*

Siano $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ i vettori di due componenti come in Pos. I (quindi con $a = b \neq 0$) e $\overrightarrow{c}$ il vettore di una loro risultante, sarà

$$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{a}, x) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{b}, 2\pi - x) \tag{1}$$

essendo x l'angolo $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$. Dando al sistema una rotaziono di ampiezza π attorno alla perpendicolare comune alle rette d'azione delle componenti, per Ass. I, si perviene ad un sistema di due forze, di vettori $\overrightarrow{a_1} = -\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b_1} = -\overrightarrow{b}$, aventi una resultante di vettore $\overrightarrow{c} = -\overrightarrow{c}$. Conforme alla prima delle (1) è $\overrightarrow{c_1} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{a_1}, x) = \overrightarrow{f}(-\overrightarrow{a}, x)$ onde, confrontando con la seconda delle (1), sarà $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{b}, 2\pi - x) = -\overrightarrow{f}(-\overrightarrow{a}, x)$. Da questa, per $x = \pi$ onde $\overrightarrow{b} = -\overrightarrow{a}$, resulta $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{b}, \pi) = -\overrightarrow{f}(\overrightarrow{b}, \pi)$ cioè c è un vettore nullo, c. v. d.

TEOREMA XIX. - *Una forza equivalente alla sua opposta è in equilibrio.*

Da $(T+F)=(T+F')$, con F' opposta a F, segue $(T+2F)= =(T+F+F')=(T)$ cioè $2F$ è in equilibrio onde, per Def. IV e Teo. XIV, lo è anche F, c. v. d.

TEOREMA XX. - *Il sistema di due forze (componenti) di un* [P] *di verso opposto è equivalente ad una forza (resultante) di* [P] *con intensità eguale alla differenza delle intensità ed equiversa con quella d'intensità maggiore.*

Piano F_1 e F_2 le componenti, con $f_1 > f_2$ (il caso di $f_1 = f_2$ è risolto col Teo. XVIII), e diciamo F_3 una forza di [P] equiversa con F_1 e d'intensità $f_3 = f_1 - f_2$. Poichè F_1, F_2' (opposta di F_2) e F_3 sono equiverse, in considerazione delle loro intensità e per Teo. XVII, sarà $(T+F_3+F_2')=(T+F_1)$ da cui $(T+F_3)=(T+ +F_1+F_2)$ con l'aggregazione di F_2 ad ambo i sistemi, c. v. d.

TEOREMA XXI. - *Due forze equivalenti di un* [P] *hanno vettori eguali.*

Per Ass. II i due vettori debbono avere egual direzione; ma se avessero versi opposti, per Teo. XX, a meno che non siano nulli, le forze non sono equivalenti. Dalla concordanza di verso, per Teo. XII, discende l'asserto.

TEOREMA XXII. - *Se il sistema di due forze di un* [P] *è in equilibrio le due forze sono opposte.*

Da $(T+F_1+F_2)=(T)$ segue $(T+F_1+F_2+F_2')=(T+F_2')$, con F_2' opposta di F, cioè $(T+F_1)=(T+F_2')$. Pertanto i vettori di F_1 e F_2' saranno eguali e, quindi, opposti quelli di F_1 e F_2, c. v. d.

DEFINIZIONE VI. - *Si dice che due insiemi di forze sono opposti quando le forze dell'uno sono, ordinatamente, opposte delle forze dell'altro.*

Indichiamo con S' il sistema opposto di S; ovviamente S è opposto di S'.

TEOREMA XXIII. - *L'aggregato di due sistemi opposti è in equilibrio.*

Con $S=\Sigma F_r$ e $S'=\Sigma F_r'$ si ha, successivamente, $(T)=(T+ +F_1+F_1')=(T+F_1+F_2+F_1'+F_2')= \ldots =(T+\Sigma F_2+\Sigma F_2')$, c. v. d.

TEOREMA XXIV. - *Il sistema opposto di un sistema in equilibrio, è in equilibrio.*

Da $(T+S)=(T)$, per Teo. XXIII, segue $(T+S')=(T+S+ +S')=(T)$, c. v. d.

TEOREMA XXV. - *Se l'aggregato di due sistemi è in equilibrio, ciascuno è equivalente all'opposto dell'altro.*

Da $(T+S+S_1)=(T)$ segue $(T+S_1')=(T+S+S_1+S_1')=$ $=(T+S)$, c. v. d.

Teorema XXVI. - *Se due sistemi sono equivalenti, l'aggregato di uno con l'opposto dell'altro è in equilibrio.*

Da $(T+S)=(T+S_1)$ segue $(T+S+S_1')=(T+S_1+S_1')=(T)$, c. v. d.

Teorema XXVII. - *Se due sistemi sono equivalenti, tali sono anche i loro opposti.*

Da $(T+S)=(T+S_1)$ segue $(T+S+S_1')=(T+S_1+S_1')=(T)$ e, per Teo. XXV, $(T+S_1')=(T+S')$, c. v. d.

Teorema XXVIII. - *Se l'aggregato di due sistemi è equivalente all'aggregato di altri due ed uno dei primi è equivalente ad uno dei secondi, anche i due rimanenti sono equivalenti.*

Da $(T+S+S_2)=(T+S_1+S_3)$ e dalle $(T+S_2')=(T+S_3)$, proveniente dalla $(T+S_2)=(T+S_3)$ per Teo. XXVII, segue segue $(T+S+S_2+S_2')=(T+S_1+S_3+S_3')$ ovvero $(T+S)=$ $=(T+S_1)$, c. v. d.

Vale osservare che con quest'ultimo si è provveduto alla inversione del Teo. X.

§ 4. - Regola del parallelogramma.

Assioma III. - *Detta* f *la intensità della resultante di due forze di un* [P] *di uguale intensità e con rette d'azione formanti un angolo* x, *esiste un angolo* x_1 *tale che esiste finito uno dei due limiti* $\lim\limits_{x \to x_1+0} f$, $\lim\limits_{x \to x_1-0} f$.

Nelle ipotesi e simboli di Pos. I e Ass. III, siano $\overrightarrow{a}$ e $i^{x}\overrightarrow{a}$ i vettori delle forze componenti avendo indicato con i l'operatore rotazione nel piano delle due rette d'azione; la retta d'azione della resultante per Ass. II, sarà la bisettrice dell'angolo predetto di misura x. Per il suo vettore avremo

$$\overrightarrow{c}=2\psi(a,\ x)i^{\frac{x}{2}}\overrightarrow{a}$$

dove è il modulo di $\overrightarrow{a}$ cioè la comune intensiià delle forze. Con considerazione dimensionale, variando l'unità di misura delle intensità, sarà

$$\lambda\overrightarrow{c}=2\psi(\lambda a,\ x)i^{\frac{x}{2}}\lambda\overrightarrow{a}$$

e, facendo $\lambda=\frac{1}{a}$,

$$\overrightarrow{c}=2\varphi(x)i^{\frac{x}{2}}\overrightarrow{a} \tag{2}$$

dove s'è posto $\varphi(x)$ in luogo di $\psi(1, x)$. Oltre le componenti F_1 e F_2, si considerino altre due forze F_3 e F_4 di $[P]$ complanari con le precedenti e di vettori

$$i^y \, a \qquad i^{x+y} \, \overrightarrow{a}.$$

Il sistema $F_3 + F_4$ avrà una risultante di vettore

$$2\varphi(x) i^{\frac{x+2y}{2}} \overrightarrow{a},$$

onde il sistema costituito dalle risultanti di $F_1 + F_2$ e $F_3 + F_4$ avrà a sua volta una risultante di vettore

$$2\varphi(y) i^{\frac{y}{2}} 2\varphi(x) i^{\frac{x}{2}} \, a = 4\varphi(y)\varphi(x) i^{\frac{x+y}{2}} \overrightarrow{a}.$$

Il sistema $F_1 + F_4$ avrà una risultante di vettore

$$2\varphi(y + x) i^{\frac{x+y}{2}} \overrightarrow{a}$$

e il sistema $F_2 + F_3$ avrà una risultante di vettore

$$2\varphi(y - x) i^{\frac{y-x}{2}} i^x \overrightarrow{a} = 2\varphi(y - x) i^{\frac{x+y}{2}} \overrightarrow{a},$$

onde il sistema costituito dalla resultante di $F_1 + F_4$ e $F_2 + F_3$ avrà a sua volta una resultante di vettore

$$2[\varphi(y + x) + \varphi(y - x)] i^{\frac{x+y}{2}} \overrightarrow{a}. \tag{4}$$

Dalla eguaglianza dei vettori (3) e (4), per essere $a \neq 0$, discende la equazione funzionale

$$2\varphi(y)\varphi(x) = \varphi(y + x) + \varphi(y - x).$$

Per Pos. I, Teo. XVII e Teo. XVIII, segue che: $\varphi(O)=1$, $\varphi(\pi)=0$. Per Ass. III, considerando che $f = 2\varphi(x)$, è assicurata la esistenza di un x, per cui esiste finito uno dei limiti $\lim\limits_{x \to x_1+0} \varphi(x)$, $\lim\limits_{x \to x_1+0} \varphi(x)$: questo [3] ci assicura la continuità di $\varphi(x)$ in tutto il campo reale. Delle soluzioni continue

$$\cos(\lambda x), \quad \cosh(\lambda x), \quad \text{con } \lambda \text{ reale},$$

la seconda è da scartarsi per non aversi $\cosh(\lambda\pi) = 0$; cosicchè resterà la prima con h da determinarsi diverso o, ciò che fa lo

(3) Vedi la terza delle note citate in (1) dove si dimostra la sufficienza della condizione alla quale si accenna, condizione ben poco restrittiva. Nella prima delle note citate in (1), per la deduzione delle soluzioni continue, si faceva uso delle derivate seconde generalizzate e di un teorema di SCHWARTZ.

stesso, maggiore di zero. Allora, per aversi $\cos(\lambda\pi)=0$, deve essere $\lambda = k + \frac{1}{2}$ con k intero $\geqq 0$; ma, per Teo. XXII, con $0 \leqq x \leqq \pi$ deve aversi $0 \leqq \left(k + \frac{1}{2}\right)x \leqq \frac{\pi}{1}$, pertanto sarà $k = 0$ e $\varphi(x) = \cos\frac{x}{2}$.

La (2) diverrà

$$\vec{c} = 2\cos\frac{x}{2} i^{\frac{x}{2}} \vec{a}.$$

assicurandoci che

Teorema XXIX. - *La resultante di due forze di un* [P] *aventi eguali intensità ha per vettore la somma dei vettori delle componenti.*

Prendiamo adesso a considerare il problema della composizione di due forze, F_1 e F_2, di un [P] di vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ con $a \neq b$, cominciando dal caso della ortogonalità delle rette di azione. Per Teo. XXIX, poichè $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, segue

$$(T + F_1) = (T + F_3 + F_4) \quad (T + F_2) = (T + F_3 + F_4'),$$

con F_4' opposta di F_4, dove le forze F_3 e F_4 di [P] hanno per vettore, rispettivamente,

$$\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \qquad \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}).$$

Sarà allora $(T + F_1 + F_2) = (T + F_2 + F_4 + F_2 + F_4') = (T + 2F_2) = (T + F)$ dove F, resultante, ha per vettore $\vec{a} + \vec{b}$.

Nel caso della non ortogonalità delle rette d'azione, si ponga $\vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$, con c parallelo a $\vec{a}$ e $\vec{d}$ normale a $\vec{a}$; se F_3 e F_4 sono due forze di [P] di vettori, rispettivamente, $\vec{c}$ e $\vec{d}$, per il ragionamento precedente si avrà $(T + F_2) = (T + F_3 + F_4)$. Detta F_5 una forza di [P] di vettore $\vec{a} + \vec{c}$, per Teo. XVII e Teo. XX, sarà

$$(T + F_5) = (T + F_1 + F_3),$$

e quindi

$$(T + F_1 + F_2) = (T + F_1 + F_3 + F_4) = (T + F_5 + F_4).$$

Ma F_5 e F_4, di vettori $\vec{a} + \vec{c}$ e $\vec{d}$, hanno rette d'azione ortogonali e quindi $F_5 + F_4$ è equivalente ad una forza di [P], per ragionamento precedente, di vettore $\vec{a} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$. Abbiamo così provato che

Teorema XXX. - *(del parallelogramma) La resultante di due forze di un* [P] *ha per vettore la somma dei vettori delle componenti.*