Bollettino Unione Matematica Italiana

Carmelo Totaro

Su un problema al contorno della elettrodinamica dei corpi in moto.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.4, p. 658–663.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_4_658_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Su un problema al contorno della elettrodinamica dei corpi in moto.

Nota di CARMELO TOTARO (a Messina)

Sunto. - *Scopo del lavoro è la discussione della riflessione e rifrazione di onde elettromagnetiche attraverso la superficie piana di separazione di due mezzi dielettrici indefiniti, di cui uno è mobile rispetto all'altro.*

Summary. - *The purpose of the work is the discussion of the reflection and refraction of electromagnetic waves through the plane separaction surface of two indefinite dielectric means, one of which is movable in respect of the other one.*

1. LORENTZ (¹) ha, per primo, dimostrato come è possibile dedurre dalle condizioni al contorno dell'elettrodinamica di MAXWELL le leggi della riflessione e rifrazione per i corpi in quiete.

Nelle classiche opere di BECKER e LAUE (²) è pure trattato il caso della riflessione su uno specchio mobile nel vuoto con velocità normale alla superficie riflettente, utilizzando le formule relativistiche di trasformazione delle grandezze.

Scopo della presente Nota è di studiare i fenomeni della riflessione e della rifrazione per i corpi in moto non più nel vuoto ma nella materia. Precisamente, siano due mezzi dielettrici, isotropi, omogenei ed elettricamente distinti. Indichiamo con σ la superficie di separazione che supponiamo piana. Si dica mezzo 2 quello in cui ha esistenza il campo primario e mezzo 1 l'altro. Il mezzo 2 si suppone in quiete rispetto all'osservatore e l'altro in moto rispetto al primo con velocità v costante e normale a σ (³).

Discostandomi un poco dal metodo seguito da LAUE e BECKER nelle opere citate, studierò il problema, applicando le condizioni al contorno dei corpi in moto.

Si vedrà che è possibile soddisfare alle equazioni indefinite di MAXWELL, di MINKOWSKI e alle dette condizioni al contorno,

(¹) H. A. LORENTZ, «Zeitschrift für Math. u. Phys.» XXII (1877).

(²) R. BECKER, *Teoria della Elettricità*, vol. II, p. 373 § 58, Sansoni ed. Scient., Firenze (1950).

M. VON LAUE, *Die Relativitatstheorie*, vol. I, p. 103. Braunschweig, 1952, Friedr. Vieweg.

(³) Evidentemente, perchè il fenomeno sia fisicamente possibile, uno di questi due mezzi dev'essere un fluido (in particolare il vuoto). Si trascurerà, nella trattazione del problema, il movimento che viene provocato in seno al fluido dal moto dell'altro mezzo.

postulando l'esistenza di un campo riflesso e di uno trasmesso nei mezzi 2 e 1 rispettivamente. Caratterizzerò così la direzione e la frequenza delle onde riflessa e trasmessa e la velocità di fase dell'onda trasmessa. Otterrò infine la generalizzazione delle formule di FRESNEL al caso del problema posto.

2. Le grandezze caratteristiche del fenomeno nel mezzo 2 devono soddisfare alle equazioni di MAXWELL, nel mezzo 1 a quelle di MINKOWSKI ed in corrispondenza alla superficie σ di separazione alle seguenti condizioni al contorno ([4]).

$$(1) \qquad \begin{cases} (\boldsymbol{E}+\beta\wedge\boldsymbol{B})_s^{(2)}-(\boldsymbol{E}+\beta\wedge\boldsymbol{B})_s^{(1)}=0 \\ (\boldsymbol{H}-\beta\wedge\boldsymbol{D})_s^{(2)}-(\boldsymbol{H}-\beta\wedge\boldsymbol{D})_s^{(1)}=0 \end{cases} \qquad \beta=\frac{v}{c}\,.$$

Per la rappresentazione matematica installeremo nel mezzo 2 un sistema di riferimento $S(0xyzt)$ con l'asse x parallelo ed equiverso a v; nel mezzo 1 un sistema $S'(0'x'y'z't')$. Per comodità, conveniamo di scegliere x', y', z' rispettivamente paralleli ed equiversi a x, y, z. La superficie di separazione dei mezzi 2 e 1 è $x=vt$.

3. L'onda piana primaria, riferita al mezzo 2 in cui si propaga, nel caso che il piano d'incidenza xy coincida con il piano di polarizzazione $[\boldsymbol{E}_0(0,\ 0,\ E_0)]$, è rappresentabile così

$$(2) \qquad \begin{cases} E_x=0 \qquad E_y=0 \qquad E_z=E_0\exp\left\{2\pi i\nu_0\left[\frac{n_2}{c}(a_0x+b_0y)-t\right]\right\} \\ H_x=\frac{n_2}{\mu_2}b_0E_z \quad H_y=-\frac{n_2}{\mu_2}a_0E_z \quad H_z=0 \end{cases}$$

ove ν_0 è la frequenza, n_2 l'indice di rifrazione e a_0, b_0, 0 i coseni direttori del raggio primario.

Per l'onda riflessa, di cui si postula l'esistenza, in coordinate del mezzo 2 in cui essa si propaga, si ha analogamente

$$(3) \qquad \begin{cases} E_{rx}=0 \qquad E_{ry}=0 \qquad E_{rz}=E_2\exp\left\{2\pi i\nu_2\left[\frac{n_2}{c}(a_2x+b_2y)-t\right]\right\} \\ H_{rx}=\frac{n_2}{\mu_2}b_2E_{rz} \quad H_{ry}=-\frac{n_2}{\mu_2}a_2E_{rz} \quad H_{rz}=0 \end{cases}$$

ove ν_2 è la frequenza e a_2, b_2, 0 i coseni direttori del raggio riflesso.

([4]) Cfr. p. e. M. VON LAUE, Op. cit., § 17.

4. Esprimerò, in un primo tempo, l'onda trasmessa in termini di coordinate del sistema S' solidale col mezzo 1

$$
(4)\quad \begin{cases} E'_{tx}=0 \qquad E'_{ty}=0 \qquad E'_{tz}=E'_1 \exp\left\{2\pi i\nu'_1\left[\dfrac{n_1}{c}(a'_1x'+b'_1y')-t'\right]\right\} \\ H'_{tx}=\dfrac{n_1}{\mu_1}b'_1E'_{tz} \quad H'_{ty}=-\dfrac{n_1}{\mu_1}a'_1E'_{tz} \quad H'_{tz}=0 \end{cases}
$$

ove ν'_1 è la frequenza e a_1', b_1', 0 sono i coseni direttori relativi all'onda trasmessa.

Per porre in equazioni il problema della determinazione delle costanti a_2, b_2, ν_2, E_2, a'_1, b'_1, ν'_1, E'_1 bisogna prima ridurre la rappresentazione dell'onda trasmessa in termini di coordinate del sistema S al quale sono riferite l'onda incidente e riflessa. Eseguendo la trasformazione si trova [5]

$$
(5)\quad \begin{cases} E_{tx}=0 \qquad E_{ty}=0 \qquad E_{tz}=\alpha(1+\beta n_1 a'_1)E'_{tz} \\ H_{tx}=\dfrac{n_1}{\mu_1}b'_1E'_{tz} \quad H_{ty}=-\alpha\dfrac{n_1}{\mu_1}(a'_1+\beta n_1)E'_{tz} \quad H_{tz}=0 \end{cases}
$$

ove si è posto $\alpha=1/\sqrt{1-\beta^2}$ con $\beta=v/c$.

Applicando la trasformazione di LORENTZ, la fase φ dell'onda trasmessa si trasforma così

$$
(6)\quad \varphi=2\pi\nu'_1\left[\frac{n_1}{c}(a'_1x'+b'_1y')-t'\right]=
$$
$$
=2\pi\alpha(1+\beta n_1 a'_1)\nu'_1\left[\frac{Q}{\alpha(1+\beta n_1 a'_1)c}\left(\frac{\alpha(n_1a'_1+\beta)}{Q}x+\frac{n_1b'_1}{Q}y\right)-t\right]
$$

ove, per brevità, si è posto $Q=\sqrt{\alpha^2(n_1a'_1+\beta)^2+n_1^2b'^2_1}$. Essendo φ un invariante relativistico, si può scrivere

$$
(7)\qquad \varphi=2\pi\nu_1\left[\frac{1}{V_t}(a_1x+b_1y)-t\right]
$$

ove ν_1, V_t e a_1, b_1, 0 sono rispettivamente la frequenza, la velocità di fase e i coseni direttori dell'onda trasmessa valutati dal siste-

[5] Cfr. R. BECKER, Op. cit., p. 391; G. LAMPARIELLO, *Lezioni di Fisica teorica*, cap. IV, § 31. Ferrara ed., Messina (1952).

ma S. Dal confronto di (6) con (7) segue [6]

$$
(8)\qquad \begin{cases}
\nu_1 = \alpha(1 + \beta n_1 a'_1)\nu'_1 \\[2mm]
V_t = \dfrac{\alpha(1 + \beta n_1 a'_1)}{\sqrt{\alpha^2(n_1 a'_1 + \beta)^2 + n_1^2 b'^2_1}}\, c \\[4mm]
a_1 = \dfrac{\alpha(n_1 a'_1 + \beta)}{\sqrt{\alpha^2(n_1 a'_1 + \beta)^2 + n_1^2 b'^2_1}} \qquad b_1 = \dfrac{n_1 b'_1}{\sqrt{\alpha^2(n_1 a'_1 + \beta)^2 + n_1^2 b'^2_1}}\,.
\end{cases}
$$

5. Applicando le (1), si trova che sul piano di separazione dei due mezzi materiali, di equazione $x = vt$, si devono verificare le seguenti condizioni

$$
(9)\qquad \begin{cases}
(1 - \beta n_2 a_0) E_0 \exp\left\{2\pi i \nu_0 \left[\dfrac{n_2}{c} b_0 y + (\beta n_2 a_0 - 1)t\right]\right\} + \\[3mm]
+ (1 - \beta n_2 a_2) E_2 \exp\left\{2\pi i \nu_2 \left[\dfrac{n_2}{c} b_2 y + (\beta n_2 a_2 - 1)t\right]\right\} = \\[3mm]
= \alpha(1 - \beta^2) E_1' \exp\left\{2\pi i \nu_1 \left[\dfrac{1}{V_t} b_1 y + \left(\dfrac{v}{V_t} a_1 - 1\right)t\right]\right\} \\[3mm]
\dfrac{n_2}{\mu_2}(a_0 - \beta n_2) E_0 \exp\{\ldots\} + \dfrac{n_2}{\mu_2}(a_2 - \beta n_2) E_2 \exp\{\ldots\} = \alpha(1 - \beta^2)\dfrac{n_1}{\mu_1} a_1' E_1' \exp\{\ldots\}.
\end{cases}
$$

Poichè queste equazioni devono valere qualunque siano y e t, bisogna porre

$$
(10)\qquad \begin{cases}
\nu_2 b_2 = \nu_0 b_0 \qquad & \nu_2(\beta n_2 a_2 - 1) = \nu_0(\beta n_2 a_0 - 1) \\[2mm]
\dfrac{1}{V_t}\nu_1 b_1 = \dfrac{n_2}{c}\nu_0 b_0 \qquad & \nu_1\left(\dfrac{v}{V_t} a_1 - 1\right) = \nu_0(\beta n_2 a_0 - 1).
\end{cases}
$$

Dalle prime due si ricava [7]

$$
(11)\qquad \begin{cases}
\nu_2 = \dfrac{1 + \beta^2 n_2^2 - 2\beta n_2 a_0}{1 - \beta^2 n_2^2}\,\nu_0 \\[4mm]
a_2 = -\dfrac{(1 + \beta^2 n_2^2) a_0 - 2\beta n_2}{(1 + \beta^2 n_2^2) - 2\beta n_2 a_0} \qquad b_2 = \dfrac{1 - \beta^2 n_2^2}{(1 + \beta^2 n_2^2) - 2\beta n_2 a_0}\, b_0\,.
\end{cases}
$$

(6) Cfr. M. VON LAUE, Op. cit., p. 128.
G. CARINI e E. CLAUSER hanno trovato contemporaneamente la V_t espressa in termini degli elementi che si riferiscono al sistema S: G. CARINI, *Intorno alle omografie elettrica e magnetica associate alle onde piane nei corpi in moto;* E. CLAUSER, *Velocità della luce nei corpi isotropi in moto;* « Rend. Acc. Lincei » vol. XVII, 1954.

(7) Si riconosce che si possono soddisfare tutte le condizioni richieste dal problema anche con $\nu_2 = \nu_0$, $a_2 = a_0$, $b_2 = b_0$. $E_2 = -E_0$, $E_1' = 0$. Ma

Queste formule per $n_2 = 1$ vengono dedotte, per una via un pò diversa da R. BECKER [8]. La prima delle (11) trova riscontro nella esperienza di GALITZIN che riguarda l'effetto DOPPLER che si ottiene per riflessione su uno specchio mobile [9].

Combinando la terza e la quarta delle (10) con le (8), si ottiene

$$\left\{\begin{aligned} &\nu'_1 = \alpha(1 - \beta n_2 a_0)\nu_0 \\ &a'_1 = \frac{\sqrt{R}}{\alpha n_1(1-\beta n_2 a_0)} \qquad b'_1 = \frac{n_2 b_0}{\alpha n_1(1-\beta n_2 a_0)} \end{aligned}\right. \tag{12}$$

ove si è posto

$$R = \alpha^2 n_1^2(1 - \beta n_2 a_0)^2 - n_2^2 b_0^2. \tag{13}$$

La prima delle (12) si può scrivere così $\nu_0 = \nu_1'\sqrt{1-\beta^2}/(1-\beta n_2 a_0)$ ed esprime l'effetto DOPPLER per l'onda trasmessa.

Sostituendo le (12) nelle (8), si trova

$$\left\{\begin{aligned} &\nu_1 = \alpha\,[\beta\sqrt{R} + \alpha(1 - \beta n_2 a_0)]\nu_0 \\ &V_t = \frac{\alpha[\beta\sqrt{R} + \alpha(1 - \beta n_2 a_0)]}{\sqrt{\alpha^2[\sqrt{R} + \alpha\beta(1 - \beta n_2 a_0)]^2 + n_2^2 b_0^2}}\,c \\ &a_1 = \frac{\alpha[\sqrt{R} + \alpha\beta(1 - \beta n_2 a_0)]}{\sqrt{\alpha^2[\sqrt{R} + \alpha\beta(1 - \beta n_2 a_0)]^2 + n_2^2 b_0^2}} \\ &b_1 = \frac{n_2 b_0}{\sqrt{\alpha^2[\sqrt{R} + \alpha\beta(1 - \beta n_2 a_0)]^2 + n_2^2 b_0^2}}. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

La velocità V_t, data dalla seconda delle (14), per una incidenza normale ($a_0 = 1$, $b_0 = 0$) verifica quella trovata da G. LAMPARIELLO [10].

$$V_t = \frac{1 + \beta n_1}{n_1 + \beta}\,c. \tag{15}$$

Nel caso di una incidenza normale si può anche scrivere questa formula elegante per esprimere la frequenza ν_1 dell'onda

questa soluzione è priva di significato fisico perchè comporta l'assenza di campo elettromagnetico in entrambi i mezzi 2 e 1.

(8) R. BECKER, Op. cit., p. 378.

(9) M. VON LAUE, Op. cit., p. 19.

(10) G. LAMPARIELLO, *Una soluzione rigorosa delle equazioni di Minkowski della elettrodinamica dei corpi in moto e sua interpretazione fisica.* « Rend. Acc. Lincei », vol. XVII, p. 105, 1954.

trasmessa per mezzo della frequenza ν_0 dell'onda incidente

$$\nu_1 = \frac{1 - \beta n_2}{1 - \beta} \frac{1 + \beta n_1}{1 + \beta} \nu_0 . \tag{16}$$

Ritorniamo infine al sistema (9) dal quale in virtù delle (10), risulta

$$\left\{ \begin{aligned} E_1' - \alpha(1 - \beta n_2 a_2) E_2 &= \alpha(1 - \beta n_2 a_0) E_0 \\ n_1 \mu_2 a_1' E_1' - \alpha n_2 \mu_1 (a_2 - \beta n_2) E_2 &= \alpha n_2 \mu_1 (a_0 - \beta n_2) E_0 . \end{aligned} \right. \tag{17}$$

Da questo si ha

$$\left\{ \begin{aligned} E_2 &= - \frac{(n_2 \mu_1 a_0 - n_1 \mu_2 a_1') + \beta n_2 (n_1 \mu_2 a_0 a_1' - n_2 \mu_1)}{(n_2 \mu_1 a_2 - n_1 \mu_2 a_1') + \beta n_2 (n_1 \mu_2 a_2 a_1' - n_2 \mu_1)} E_0 \\ E_1' &= \frac{\alpha n_2 \mu_1 (a_2 - a_0)(1 - \beta^2 n_2^2)}{(n_2 \mu_1 a_2 - n_1 \mu_2 a_1') + \beta n_2 (n_1 \mu_2 a_2 a_1' - n_2 \mu_1)} E_0 . \end{aligned} \right. \tag{18}$$

Le (18) sono le formule di Fresnel generalizzate al nostro caso. Naturalmente, queste formule, come tutte le precedenti, per $\beta = 0$ coincidono con quelle classicamente note.