Bollettino
Unione Matematica Italiana

Giovanna Gregorini

Un'osservazione sui coefficienti di Legendre-Stieltjes di una funzione non decrescente.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.4, p. 655–657.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_4_655_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1957.

Un' osservazione sui coefficienti di Legendre-Stieltjes di una funzione non decrescente. (*)

Nota di GIOVANNA GREGORINI (a Roma)

Sunto. - *Si apporta un complemento ad un teorema del* Prof. A. GHIZZETTI *riguardante le condizioni necessarie e sufficienti per i coefficienti di* LEGENDRE-STIELTJES *di una funzione non decrescente.*

Summary - *A theorem of* Prof. A. GHIZZETTI, *concerning the sufficient and necessary conditions for* LEGENDRE-STIELTJES *coefficients of a not decreasing function, is performed.*

In una Nota recente il Prof A. GHIZZETTI (1) ha dato le condizioni necessarie e sufficienti affinchè un'assegnata successione $\{c_k\}$ di numeri reali sia quella dei coefficienti di LEGENDRE-STIELTJES di una $\alpha(x)$ non decrescente. Occorre introdurre accanto a $\{c_k\}$ la successione $\{b_k\}$ definita da (2)

$$(1) \qquad b_k = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \cos k\theta d\alpha(x), \quad (\theta = \arcos x;\ 0 \leq \theta \leq \pi;\ k = 0, 1, 2, \ldots)$$

e successivamente i determinanti

$$(2) \qquad D_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_k \\ b_1 & b_0 & b_1 & \ldots & b_{k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_k & b_{k-1} & b_{k-2} & \ldots & b_0 \end{vmatrix}, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Allora le predette condizioni consistono nel verificarsi di uno dei seguenti due casi:

(I) per un certo intero n, risulta $D_k > 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$; $D_k = 0$ $(k = n, n+1, \ldots)$.

(II) risulta $D_k > 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le applicazioni del Calcolo.

(1) Vedi A. GHIZZETTI, *Sui coefficienti di Legendre-Stieltjes di una funzione non decrescente,* « Rend. Lincei », s. VIII, Vol. XX, pp. 753-758 (1956).

(2) I numeri b_k si esprimono linearmente per mezzo dei c_k; vedi GHIZZETTI, op. cit.

Inoltre il caso (I) si verifica soltanto se si presenta uno di questi quattro sottocasi:

(I_1) n è pari e $\alpha(x)$ è funzione di ripartizione di $\frac{n}{2}$ masse positive concentrate in altrettanti punti interni a $(-1, 1)$;

(I_2) n è pari e $\alpha(x)$ è funzione di ripartizione di $\frac{n}{2}+1$ masse positive, di cui 2 concentrate negli estremi di $(-1, 1)$ e $\frac{n}{2}-1$ in punti interni;

(I_3) n è dispari e $\alpha(x)$ è funzione di ripartizione di $\frac{n+1}{2}$ masse positive, di cui una concentrata nell'estremo sinistro di $(-1, 1)$ e $\frac{n-1}{2}$ in punti interni;

(I_4) n è dispari e $\alpha(x)$ è funzione di ripartizione di $\frac{n+1}{2}$ masse positive, di cui una concentrata nell'estremo destro di $(-1, 1)$ e $\frac{n-1}{2}$ in punti interni.

In questa Nota ci proponiamo di dare un criterio che permetta di distinguere dall'esame dei c_k i quattro precedenti sottocasi. A tale scopo conviene considerare, assieme alla successione $\{b_k\}$, un'altra successione $\{b_k^*\}$ definita da

$$b_k^* = -\Delta^2 b_k = -(b_{k+1} - 2b_k + b_{k-1}), \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

e corrispondentemente i determinanti

$$D_k^* = \begin{vmatrix} b_0^* & b_1^* & b_2^* & \ldots b_k^* \\ b_1^* & b_0^* & b_1^* & \ldots b_{k-1}^* \\ b_2^* & b_1^* & b_0^* & \ldots b_{k-2}^* \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_k^* & b_{k-1}^* & b_{k-2}^* & \ldots b_0^* \end{vmatrix}, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Sussiste allora il seguente:

Teorema: *Nei quattro sottocasi* (I_1), (I_2), (I_3), (I_4) *sono verificate, oltre alle condizioni già menzionate* $D_k > 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$; $D_k = 0$ $(k = n, n+1, n+2, \ldots)$, *rispettivamente le seguenti altre:*

(I_1) *n pari*; $D_k^* > 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$; $D_k^* = 0$ $(k = n, n+1, \ldots)$;

(I_2) *n pari*; $D_k^* > 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n-2)$; $D_k^* = 0$ $(k = n-1, n, \ldots)$;

(I_2) *n dispari*; $D_k^* > 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$; $D_k^* = 0$ $(k = n, n+1, \ldots)$;

(I_4) *n dispari*; $D_k^* > 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n-2)$; $D_k^* = 0$ $(k = n-1, n, \ldots)$.

DIMOSTRAZIONE. – Riferiamoci per esempio al caso (I_1). La $\alpha(x)$ è funzione di ripartizione di $\frac{n}{2}$ masse positive $s_1, s_2, \ldots, s_{\frac{n}{2}}$ concentrate in punti $x_1, x_2, \ldots, x_{\frac{n}{2}}$ tali da aversi $-1 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{\frac{n}{2}} < 1$. A questi valori x_r corrisponderanno dei valori θ_r tali che $\pi > \theta_1 > \theta_2 > \theta_3 > \ldots > \theta_{\frac{n}{2}} > 0$. Dalla (1) si trae pertanto

$$b_k = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} s_r \cdot \cos k\theta_r, \tag{5}$$

e successivamente dalla (3)

$$b_k^* = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} 2s_r \cdot (1 - \cos \theta_r) \cdot \cos k\theta_r. \tag{6_1}$$

La (6_1) mostra che i b_k^* coincidono con i b_k della funzione di ripartizione delle $\frac{n}{2}$ masse positive $2s_r(1 - \cos \theta_r)$ concentrate nei punti interni x_r; tale funzione verifica dunque il caso (I_1) e ne segue la tesi.

Analogamente negli altri tre sottocasi. Con notazioni evidenti si trovano infatti in luogo di (6_1) rispettivamente le

$$b_k^* = \frac{1}{2}(-1)^k \cdot 4s_0 + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}-1} 2s_r \cdot (1 - \cos \theta_r) \cdot \cos k\theta_r. \tag{6_2}$$

$$b_k^* = \frac{1}{2}(-1)^k \cdot 4s_0 + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} 2s_r \cdot (1 - \cos \theta_r) \cdot \cos k\theta_r. \tag{6_3}$$

$$b_k^* = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} 2s_r \cdot (1 - \cos \theta_r) \cdot \cos k\theta_r, \tag{6_4}$$

cosicchè i b_k^* vengono ad apparire come i b_k di una funzione di ripartizione rispettivamente del tipo (I_3) con $n-1$ in luogo di n, (I_3), (I_1) con $n-1$ in luogo di n. Da ciò segue immediatamente la tesi.