Bollettino Unione Matematica Italiana

Gian Carlo Corazza, Carlo Montebello

Sul diagramma di radiazione di un'antenna ad apertura circolare.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.4, p. 652–654.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_4_652_0>

Sul diagramma di radiazione di un'antenna ad apertura circolare.

Nota di GIAN CARLO CORAZZA e CARLO MONTEBELLO (a Roma)

Sunto - *Si ottiene un'espressione del fattore di cortina di un'antenna ad apertura circolare avente una funzione d'illuminazione approssimabile in media con una serie di* BESSEL-FOURIER.

Summary - *An expression for the array factor of a circular aperture antenna having an illumination function which may be approximated in the mean by a* BESSEL-FOURIER, *is derived.*

Introduzione.

In una precedente nota (1) si è mostrato che il fattore di cortina complesso:

$$(1)\qquad \Psi = \int_0^1\int_0^{2\pi} f(\rho,\ \gamma)\ \exp\ [ju\rho\cos(\gamma-\varphi)]\rho d\rho d\gamma,$$

di un'antenna ad apertura circolare, avente una funzione di illuminazione, eventualmente complessa, $f(\rho,\ \gamma) = f_1(\rho)\ f_2(\gamma)$ è dato dalla seguente espressione:

$$(2)\qquad \Psi = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, j^n \exp(jn\varphi) \int_0^1 f_1(\rho) J_n(u\rho)\rho d\rho \int_0^{2\pi} f_2(\gamma) \exp(-jn\gamma) d\gamma,$$

se $f_1(\rho)$ ed $f_2(\gamma)$ sono funzioni limitate.

Nel presente lavoro si utilizza la (2) per calcolare il fattore di cortina relativo ad una funzione di illuminazione che costituisce il termine generico di una serie di BESSEL-FOURIER. Si dimostra inoltre che ogni qualvolta la suddetta serie corrispondente ad una funzione di illuminazione $f(\rho,\ \gamma)$ converge in media verso questa

(1) G. C. CORAZZA e C. MONTEBELLO, *Le trasformate di Hankel e di Fourier nel calcolo di diagrammi di radiazione*, « Bollettino della Unione Matematica Italiana », (3), 12, 436-438 (1957).

In questa nota è indicato il significato dei simboli che compaiono nella (1).

ultima, il fattore di cortina è dato da una serie il cui termine generico è il fattore di cortina relativo al termine che gli corrisponde nella serie di BESSEL-FOURIER suddetta.

Funzione di illuminazione del tipo $J_r(k_{rp}\rho)\exp(jr\varphi)$.

Data una funzione di illuminazione $f(\rho, \gamma)$, sommabile nel rettangolo $0 \leq \rho \leq 1$; $0 \leq \gamma \leq 2\pi$, la serie di BESSEL-FOURIER corrispondente è la seguente:

$$f(\rho, \gamma) \backsim \sum_{1}^{+\infty}{}_p \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r C_{rp} J_r(k_{rp}\rho) \exp(jr\gamma), \tag{3}$$

in cui k_{rp} è la radice p-esima dell'equazione:

$$J_r(x) = 0 \tag{4}$$

ed i coefficienti C_{rp} sono dati da:

$$C_{rp} = \frac{1}{\pi[J_r'(k_{rp})]^2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(\rho, \gamma) \exp(-jr\gamma) J_r(k_{rp}\rho) \rho d\rho d\gamma, \tag{5}$$

come si dimostra tenendo conto delle seguenti relazioni (²):

$$\int_0^1 J_r(k_{rp}\rho) J_r(k_{rs}\rho) \rho d\rho = \begin{cases} 0 \text{ per } p \neq s \\ \frac{1}{2}[J_r'(k_{rp})]^2 \text{ per } p = s \end{cases} \tag{6}$$

nelle quali sia k_{rp} che k_{rs} sono radici della (4).

Si consideri ora il termine generico della (3); ponendo nella (2) $f_1(\rho) = C_{rp} J_r(k_{rp}\rho)$ ed $f_2(\gamma) = \exp(jr\gamma)$ si ottiene:

$$\Psi_{rp} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n j^n C_{rp} \exp(jn\varphi) \int_0^1 J_r(k_{rp}\rho) J_n(u\rho) \rho d\rho \int_0^{2\pi} \exp(jr\gamma) \exp(-jn\gamma) d\gamma =$$
$$= 2\pi j^r C_{rp} \exp(jr\varphi) \int_0^1 J_r(k_{rp}\rho) J_r(u\rho) \rho d\rho. \tag{7}$$

Eseguendo l'integrale di LOMMEL (³) che compare nella (7), essendo k_{rp} una radice della (4), si ha:

$$\Psi_{rp} = 2\pi j^r C_{rp} \exp(jr\varphi) \frac{k_{rp}}{u^2 - k^2_{rp}} J_r'(k_{rp}) J_r(u). \tag{8}$$

(²) N. W. MC LACHLAN, *Bessel Functions for Engineers*, « Oxford University Presse », Oxford 1948, pag. 94 e pag. 96.

(³) N. W. MC LACHLAN, *op. cit.*, pag. 94.

Posto:

$$\Lambda_{rp} = 2\pi j^r C_{rp} J_r'(k_{rp}), \tag{9}$$

la (8) si scrive:

$$\Psi_{rp} = \Lambda_{rp} \frac{J_r(u)}{u^2 - k^2_{rp}} \exp(jr\varphi). \tag{10}$$

La (10) fornisce il fattore di cortina relativo ad una funzione di illuminazione del tipo $J_r(k_{rp}\rho) \exp(jr\gamma)$, costituente il termine generico di una serie di BESSEL–FOURIER.

Funzione di illuminazione approssimabile in media con una serie di Bessel–Fourier.

Se la funzione di illuminazione $f(\rho, \gamma)$ è di norma sommabile nel rettangolo $0 \leq \rho \leq 1$; $0 \leq \gamma \leq 2\pi$, la serie (3) converge in media verso $f(\rho, \gamma)$ e si può scrivere [4] che l'integrale (1) ha un valore eguale a quello che si ottiene sostituendo formalmente alla $f(\rho, \gamma)$, la serie (3) ed integrando termine a termine. Da quanto si è detto in precedenza si deduce allora che in tal caso il fattore di cortina relativo alla funzione di illuminazione $f(\rho, \gamma)$ può essere scritto:

$$\Psi = \sum_{1}^{+\infty}{}_p \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r \Lambda_{rp} \frac{J_r(u)}{u^2 - k^2_{rp}} \exp(jr\varphi). \tag{11}$$

Conclusioni.

La serie (11) fornisce il fattore di cortina – e quindi il diagramma di radiazione – di un'antenna ad apertura circolare la cui funzione di illuminazione sia approssimabile in media mediante una serie di BESSEL–FOURIER. La (11) si rivela di particolare utilità pratica nel caso di funzioni di illuminazione approssimabili in maniera soddisfacente mediante pochi termini della serie (3), cioè tali che quest'ultima converga rapidamente.

Gli autori ringraziano il prof. A. GHIZZETTI per gli utili consigli.

(4) M. PICONE e T. VIOLA, *Lezioni sulla moderna teoria dell'integrazione*, « Einaudi », Torino 1952, pag. 217, teor. XVI.