Bollettino Unione Matematica Italiana

Giuseppe Arnese

Alcune osservazioni sull'integrale secondo Riemann-Stieltjes.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.4, p. 648–651.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_4_648_0>

A cune osservazioni sull'integrale secondo Riemann-Stieltjes.

Nota di Giuseppe Arnese (a Bari)

Sunto. - *Come nelle prime righe della nota.*

1. Oggetto di questa nota é lo studio del comportamento di una massa elementare $\alpha(T)$ (1) nell'intorno (2) dei punti di Weierstrass di una funzione illimitata $f(P)$ definita in un insieme limitato $I \subset S_r$, in relazione ai valori assunti dal massimo e dal minimo integrale, secondo Riemann-Stieltjes, di $f(P)$ su I, rispetto ad α T) (3). Tale studio verrà fatto nel n. 3; nel n. 2 vengono stabiliti due lemmi preliminari; nel n. 4 viene, infine, dimostrato un corollario.

2. Indichiamo con ξ', ξ'' i punti di Weierstrass relativi, rispettivamente, all'estremo inferiore ed a quello superiore di $f(P)$ in I.

Indichiamo poi con $T^{\xi'}$ ($T^{\xi''}$) gli intervalli della generica decomposizione coordinata $\mathfrak{D}$, aventi punti in comune con I e tali che in $I \cdot T^{\xi'}$ ($I \cdot T^{\xi''}$) $f(P)$ sia illimitata inferiormente (superiormente),

Con T^{ξ}, infine, designamo gli intervalli di $\mathfrak{D}$ che sono contemporaneamente dei due tipi suddetti.

Lemma 1. - *Se in un intervallo* R *esiste un punto* P *tale che, per ogni intervallo* T *con* $\mathrm{P} \in \mathrm{T} \subset \mathrm{R}$ *e con un punto estremo in una determinata regione* $\mathrm{R}_s(\mathrm{P})$ (4), *sia* $\alpha(\mathrm{T}) = 0$, *allora si ha* $V_\alpha(\mathrm{R}) = 0$.

La dimostrazione di questo lemma é semplice e coinvolge solo l'additività di $\alpha(T)$; noi, quì, riteniamo di poterla tralasciare.

Lemma 2. - *Se esiste una decomposizione* $\mathfrak{D}^*$ *tale che, per ogni intervallo* $\mathrm{T}^{\xi''}$, $T^{\xi'}$ *di* $\mathfrak{D}^*$, *si abbia*

$$N_\alpha(T^{\xi''}) = 0,\ P_\alpha(T^{\xi'}) = 0 (P_\alpha(T^{\xi''}) = 0,\ N_\alpha(T^{\xi'}) = 0)$$

(1) Cfr. Picone-Viola, *Lezioni sulla teoria moderna dell'integrazione*, Ed. scient. Einaudi, 1952, Cap. II, § 16, p. 51.

A questo trattato, sia per il simbolismo che per la metodologia, mi riferirò continuamente nel seguito.

(2) Il senso di questa locuzione apparirà chiaro nel seguito.

(3) Cfr. Op. cit. nella nota (1) Cap. III, § 21, p. 67.

(4) Cfr. Op. cit. nella nota (1) Cap. II, § 17, p. 55.

risulta

$$\int_I^{\prime} f(P)d\alpha > -\infty \left(\int_I^{\prime\prime} f(P)d\alpha < +\infty \right).$$

DIMOSTRAZIONE. - Sia, per ogni intervallo $T^{\xi''}$, $T^{\xi'}$ di $\mathfrak{D}^*$,

$$N_\alpha(T^{\xi''}) = P_\alpha(T^{\xi'}) = 0 .$$

Poniamo

$$I^{\xi''} = I \cdot \Sigma\, T^{\xi''}, \quad I^{\xi'} = I \cdot \Sigma\, T^{\xi'}, \quad I^* = I \cdot \Sigma_h\, T_h^* ,$$

ove T_h^* sono gli intervalli di $\mathfrak{D}^*$ aventi punti in comune con I e diversi da $T^{\xi''}$, $T^{\xi'}$. Intendiamo esclusi dalle somme suscritte gli intervalli T^{ξ}, per i quali é $V_\alpha(T^{\xi}) = 0$.

Per una generica decomposizione $\mathfrak{D}$ seguente $\mathfrak{D}^*$, consideriamo gli insiemi $I \cdot \Sigma^+ T_k(\mathfrak{D})$, $I \cdot \Sigma^- T_k(\mathfrak{D})$, le somme essendo estese agli intervalli T_k di $\mathfrak{D}$, con $T_k \cdot I \neq \Omega$ e, rispettivamente, $\alpha(T_k) > 0$. $\alpha(T_k) < 0$.

Poniamo, infine,

$$\begin{aligned} m(\mathfrak{D}) &= \text{est. inf. di } f(P) \text{ in } I \cdot \Sigma^+ T_k(\mathfrak{D}) \\ M(\mathfrak{D}) &= \text{est. sup. di } f(P) \text{ in } I \cdot \Sigma^- T_k(\mathfrak{D}) \\ m &= \text{est. inf. di } f(P) \text{ in } I^{\xi''} + I^* \\ M &= \text{est. sup. di } f(P) \text{ in } I^{\xi'} + I^*. \end{aligned}$$

Poiché

$$I \cdot \Sigma^+ T_k(\mathfrak{D}) \subset I^{\xi''} + I^* \quad , \quad I \cdot \Sigma^- T_k(\mathfrak{D}) \subset I^{\xi'} + I^*,$$

si ha

$$m \leq m(\mathfrak{D}) \quad , \quad M(\mathfrak{D}) \leq M .$$

Quindi, per una generica decomposizione $\mathfrak{D}$ seguente $\mathfrak{D}^*$ e per una arbitraria scelta dei punti P_k negli insiemi $I\,T_k \neq \Omega$, si ha:

$$\begin{aligned} \sigma = \Sigma_k f(P_k) \cdot \alpha(T_k) &= \Sigma^+ f(P_k) \cdot \alpha(T_k) + \Sigma^- f(P_k) \cdot \alpha(T_k) \geq \\ \geq m(\mathfrak{D}) \cdot \Sigma^+ \alpha(T_k) + M(\mathfrak{D}) \cdot \Sigma^- \alpha(T_k) &\geq m \cdot \Sigma^+ \alpha(T_k) + M \cdot \Sigma^- \alpha(T_k) = \\ = m \cdot \Sigma^+ |\alpha(T_k)| - M \cdot \Sigma^- |\alpha(T_k)| &\geq H \cdot \Sigma_k |\alpha(T_k)| \geq H \cdot V_\alpha(T), \end{aligned}$$

ove H é un numero, che é lecito supporre negativo, minore dei numeri m, $-M$; T é un intervallo contenente I nel proprio interno.

Quindi

$$\int_I^{\prime} f(P)d\alpha \geq H \cdot V_\alpha(T) > -\infty . \qquad \text{c.d.d.}$$

3. Teorema 1. - *Se* $\overset{\prime}{\int_I} \mathrm{f(P)d}\alpha$, $\overset{\prime\prime}{\int_I} \mathrm{f(P)d}\alpha$ *sono entrambi finiti, esiste una decomposizione* $\mathfrak{D}^*$ *tale che, per ogni decomposizione ad essa seguente* $\mathfrak{D}$, *gli intervalli* $\mathrm{T}^{\xi''}$, $\mathrm{T}^{\xi'}$ *di* $\mathfrak{D}$ *hanno massa* $\alpha(\mathrm{T}^{\xi''}) = \alpha(\mathrm{T}^{\xi'}) = 0$.

E viceversa.

Dimostrazione. - Ragionando per assurdo, qualunque sia la decomposizione $\mathfrak{D}$, esista una decomposizione seguente $\overline{\mathfrak{D}}$ tale che, per almeno un intervallo, per esempio del tipo $T^{\xi''}$, di $\overline{\mathfrak{D}}$, si abbia, per esempio, $\alpha(T^{\xi''}) < 0$. Sarebbe allora possibile, in relazione a $\overline{\mathfrak{D}}$, scegliere i punti P_k negli insiemi $I \cdot T_k \neq \Omega$ in modo che $\Sigma_k f(P_k)\alpha(T_k) < H$, con H prefissato a piacere. Ciò sarebbe contrario alle ipotesi.

Viceversa, se esistesse una decomposizione $\mathfrak{D}^*$ tale che, per ogni decomposizione ad essa seguente $\mathfrak{D}$, gli intervalli $T^{\xi''}$, $T^{\xi'}$ di $\mathfrak{D}$ abbiano massa $\alpha(T^{\xi''}) = \alpha(T^{\xi'}) = 0$, in virtù del lemma 1, per gli intervalli $T^{\xi''}$, $T^{\xi'}$ di $\mathfrak{D}$ si avrebbe $V_\alpha(T^{\xi''}) = V_\alpha(T^{\xi'}) = 0$, e quindi, per il lemma 2, conseguirebbe la tesi. c. d. d.

Teorema 2. - *Se* $\overset{\prime}{\int_I} \mathrm{f(P)d}\alpha = \lambda$ *(finito)*, $\overset{\prime\prime}{\int_I} \mathrm{f(P)d}\alpha = +\infty$, *esiste una decomposizione* $\mathfrak{D}^*$ *tale che, comunque si consideri una decomposizione ad essa seguente* $\mathfrak{D}$, *tutti gli intervalli* $\mathrm{T}^{\xi''}$, $\mathrm{T}^{\xi'}$ *di* $\mathfrak{D}$ *hanno massa* $\alpha(\mathrm{T}^{\xi''}) \geq 0$, $\alpha(\mathrm{T}^{\xi'}) \leq 0$, *rispettivamente* (5).

La dimostrazione é sostanzialmente analoga a quella della prima parte del teorema 1.

Un risultato analogo si ottiene quando $\overset{\prime}{\int_I} f(P)d\alpha = -\infty$ e $\overset{\prime\prime}{\int_I} f(P)d\alpha = \Lambda$ (finito).

Teorema 3. - *Se* $\overset{\prime}{\int_I} \mathrm{f(P)d}\alpha = -\infty$, $\overset{\prime\prime}{\int_I} \mathrm{f(P)d}\alpha = +\infty$, *qualunque sia la decomposizione* $\mathfrak{D}$, *esiste sempre una decomposizione ad essa seguente* $\overline{\mathfrak{D}}$ *tale che sia soddifsatta almeno una delle proprietà seguenti :*

a) *Fra gli intervalli* $\mathrm{T}^{\xi''}$ (*oppure* $\mathrm{T}^{\xi'}$) *di* $\overline{\mathfrak{D}}$ *ve n'è almeno uno con* $\mathrm{P}_\alpha(\mathrm{T}^{\xi''}) > 0$ $(\mathrm{P}_\alpha(\mathrm{T}^{\xi'}) > 0)$ *ed almeno uno con* $\mathrm{N}_\alpha(\mathrm{T}^{\xi''}) > 0$ $(\mathrm{N}_\alpha(\mathrm{T}^{\xi'}) > 0)$.

(5) Non può essere, in virtù del teor. 1, $\alpha(T^{\xi''}) = \alpha(T^{\xi'}) = 0$ per ogni $T^{\xi''}$, $T^{\xi'}$ di ogni $\mathfrak{D}$ seguente a $\mathfrak{D}^*$.

b) *Vi sono almeno due intervalli* $T^{\xi''}$, $T^{\xi'}$ *di* $\mathfrak{D}$ *con* $P_\alpha(T^{\xi''}) > 0$, $P_\alpha(T^{\xi'}) > 0$ (*oppure* $N_\alpha(T^{\xi''}) > 0$, $N_\alpha(T^{\xi'}) > 0$).

DIMOSTRAZIONE. - Esista, per assurdo, una decomposizione $\mathfrak{D}^*$ tale che, per tutti gli intervall $T^{\xi''}$, $T^{\xi'}$ di $\mathfrak{D}^*$, sia $N_\alpha(T^{\xi''}) = P_\alpha(T^{\xi'}) = 0$ oppure $P_\alpha(T^{\xi''}) = N_\alpha(T^{\xi'}) = 0$. Per il lemma 2, allora, si cadrebbe in contraddizione. c. d. d.

OSSERVAZIONE. - Se $f(P)$ è illimitata solo superiormente o inferiormente, deve essere necessariamente soddisfatta solo la proprietà (a).

4. Diamo ora un corollario che costituisce una generalizzazione del teorema fondamentale dell'integrazione secondo RIEMANN-STIELTJIES (6).

COROLLARIO. - *Se* $\overset{\prime}{\int_I} f(P)d\alpha$, $\overset{\prime\prime}{\int_I} f(P)d\alpha$ *sono finiti, posto*

$$s_f(\mathfrak{D}) = \Sigma^+ e_f(I \cdot T_k) \cdot \alpha(T_k) + \Sigma^- E_f(I \cdot T_k) \cdot \alpha(T_k)$$
$$S_f(\mathfrak{D}) = \Sigma^+ E_f(I \cdot T_k) \cdot \alpha(T_k) + \Sigma^- e_f(I \cdot T_k) \cdot \alpha(T_k)$$

si ha

$$\lim_{\mathfrak{D} \to S} s_f(\mathfrak{D}) = \overset{\prime}{\int_I} f(P)dP_\alpha - \overset{\prime\prime}{\int_I} f(P)dN_\alpha = \overset{\prime}{\int_I} f(P)d\alpha$$

$$\lim_{\mathfrak{D} \to S} S_f(\mathfrak{D}) = \overset{\prime\prime}{\int_I} f(P)dP_\alpha - \overset{\prime}{\int_I} f(P)dN_\alpha = \overset{\prime\prime}{\int_I} f(P)d\alpha \quad (7).$$

DIMOSTRAZIONE. - Esiste una decomposizione $\mathfrak{D}^*$ tale che, per tutti gli intervalli $T^{\xi''}$, $T^{\xi'}$ di $\mathfrak{D}^*$, si ha $V_\alpha(T^{\xi''}) = V_\alpha(T^{\xi'}) = 0$ (teor. 1 e lemma 1).

Poniamo $D = \Sigma\, T^{\xi''} + \Sigma\, T^{\xi'}$, $I^* = I \cdot (D - FD)$, $I' = I - I^*$. Si trova facilmente che $\overset{\prime}{\int_I} f(P)d\alpha = \overset{\prime}{\int_{I'}} f(P)d\alpha$, $\overset{\prime\prime}{\int_I} f(P)d\alpha = \overset{\prime\prime}{\int_{I'}} f(P)d\alpha$, $\overset{\prime}{\int_I} f(P)dP_\alpha = \overset{\prime}{\int_{I'}} f(P)dP_\alpha$ ed analoghe; é ovvio, poi, che per ogni decomposizione $\mathfrak{D}$ seguente $\mathfrak{D}^*$, le somme del tipo $s_f(\mathfrak{D})$, $S_f(\mathfrak{D})$ sono le stesse per I e I'. Sfruttando, quindi, il fatto che in I' $f(P)$ é limitata e per essa vale il teorema fondamentale citato, si perviene alle formule scritte. c. d. d.

(6) Cfr. Op. cit. nella nota (1), Cap. III, § 22, p. 70.

(7) Per i simboli che qui intervengono cfr. nota precedente.