BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIUSEPPE PALAMÀ

**Sulla risoluzione completa in numeri
naturali dell'equazione indeterminata**

$x^2 + mx + p = (p + m + 1)y^2$, nei casi $m = 1, 2$.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 12
(1957), n.4, p. 636–647.

Zanichelli

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_4_636_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_4_636_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sulla risoluzione completa in numeri naturali dell'equazione indeterminata $x^2 + mx + p = (p + m + 1)y^2$, nei casi $m = 1, 2$.

Nota di GIUSEPPE PALAMÀ (a Lecce)

Sunto. - È contenuto nel titolo.

Caso particolare dell'equazione indeterminata

$$(1) \quad x^2 + mx + p = (p + m + 1)y^2$$

è il seguente ($m = p = 1$)

$$(2) \quad x^2 + x + 1 = 3y^2$$

di cui si sono occupati vari Autori.

R. OBLÁTH ⁽¹⁾ nel 1950 suppose che la (2) non ha altra soluzione in numeri naturali, con x dispari, della (1, 1).

Successivamente T. NAGELL ⁽²⁾ aggiunse l'altra soluzione

$$x = 313, \quad y = 181.$$

Recentemente A. SCHINZEL e W. SIERPINSKI ⁽³⁾ ne hanno dato tutte le soluzioni in numeri naturali, stabilendo fra le soluzioni una formula ricorrente, e dimostrando che con tale formula si hanno appunto tutte le soluzioni in numeri naturali della (2).

Ora noi ci occupiamo della più generale (1) nei casi $m = 1, m = 2$.

Innanzitutto però osserviamo che ai risultati di SIERPINSKI e SCHINZEL si può pervenire subito con metodi classici che danno

⁽¹⁾ R. OBLÁTH, *Über die diophantische $x^2 - 1 = 2y^2$* , « Acta Mathematica Ac. Sc. Hungaricae », 1, (1950), pag. 114, Satz. 1.

⁽²⁾ L. c., p. 321.

⁽³⁾ A. SCHINZEL et W. SIERPINSKI, *Sur l'équation $x^2 + x + 1 = 3y^2$* , « Colloquium mathematicum », Vol. IV, (1956), fasc. 1, pp. 71-73.

tutte (senza che occorra dimostrarlo) le soluzioni in numeri naturali della (2).

Risolvendo ad esempio difatti la

$$(2') \quad x^2 + x + 1 - 3y^2 = 0$$

rispetto ad x si ha

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{12y^2 - 3}}{2}$$

che, trascurando la radice negativa, e ponendo

$$12y^2 - 3 = 9t^2,$$

cioè

$$(3) \quad (2y)^2 - 3t^2 = 1,$$

dà

$$(4) \quad x = \frac{-1 + 3t}{2}.$$

Ora, da tutte le soluzioni in numeri naturali dell'equazione di PELL-FERMAT (3) si hanno tutte le soluzioni della (2) che ci interessano.

Poichè la soluzione minima della (3) è (1, 1), ponendo

$$(2 + \sqrt{3})^n = 2y_n + t_n \sqrt{3},$$

si ha

$$(2 + \sqrt{3})^{n+2} = 2y_{n+1} + t_{n+1} \sqrt{3} = (2y_n + t_n \sqrt{3})(7 + 4\sqrt{3}),$$

ossia, per la (4)

$$2y_{n+1} + t_{n+1} \sqrt{3} = 8x_n + 14y_n + 4 + \left(\frac{14}{3}x_n + 8y_n + 7/3\right)\sqrt{3},$$

che dà, se si tien presente la (4), le formule ricorrenti

$$x_{n+1} = 7x_n + 12y_n + 3, \quad y_{n+1} = 4x_n + 7y_n + 2,$$

$$x_1 = y_1 = 1,$$

mediante le quali si hanno tutte le soluzioni in numeri naturali della (2) e si ha così il risultato di SIERPIŃSKI e SCHINZEL.

Ma con il procedimento ingegnoso usato da questi Autori, opportunamente trasformato, possono risolversi completamente

equazioni più generali di quella trattata da SIERPINSKI e SCHINZEL, quale è la (1) nei casi detti di $m = 1$, $m = 2$.

2. Il caso $m = 1$.

TEOREMA 1. - *Tutte le soluzioni in numeri naturali della*

$$(1_2) \quad x^2 + x + p = (p + 2)y^2,$$

con p intero non negativo e $p + 2$ non quadrato, sono date dalle formule ricorrenti

$$(2_2) \quad \begin{cases} x_{n+1} = \alpha x_n + (p + 2)\beta y_n + \frac{\alpha - 1}{2} \\ y_{n+1} = \beta x_n + \alpha y_n + \beta/2 \end{cases}$$

per ogni soluzione iniziale $(x_{i,1}, y_{i,1})$ con

$$(2'_2) \quad x_{i,1} \leq \frac{\alpha - 1}{2} + \beta \sqrt{p(p + 2)}, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

essendo

$$x_{1,1} = y_{1,1} = 1,$$

ed α, β soluzione minima, con β pari non nullo, dell'equazione di PELL-FERMAT

$$(3_2) \quad X^2 - (p + 2)Y^2 = 1.$$

Si sa che la (3₂), se $p + 2$ non è quadrato, è sempre possibile ed ammette infinite soluzioni date se γ, δ ne è la minima da

$$(4_2) \quad X + Y\sqrt{p + 2} = (\gamma + \delta\sqrt{p + 2})^s, \quad s = 1, 2, \dots$$

Perciò, se δ non è pari, la soluzione minima di (3₂) con δ pari si ha dalla (4₂) per $s = 2$ ed è

$$\alpha = \gamma^2 + (p + 2)\delta^2, \quad \beta = 2\gamma\delta.$$

Ciò premesso proviamo che sussistono le disuguaglianze

$$(5_2) \quad (p + 2)\beta y < \alpha x + \frac{\alpha - 1}{2},$$

per

$$(6_2) \quad x > \beta \sqrt{p(p + 2)} + \frac{\alpha - 1}{2};$$

e

$$(7_2) \quad \alpha y > \beta x + \beta/2,$$

se x, y è una soluzione di (1₂).

Se difatti si avesse

$$(8_2) \quad (p+2)\beta y \geq \alpha x + \frac{\alpha-1}{2},$$

si avrebbe quadrando

$$(9_2) \quad (p+2)^2\beta^2 y^2 \geq \alpha^2 x^2 + \alpha(\alpha-1)x + \frac{(\alpha-1)^2}{4},$$

e poichè dalla (1₂) si ha

$$(10_2) \quad (p+2)^2\beta^2 y^2 = (p+2)\beta^2 x^2 + (p+2)\beta^2 x + p(p+2)\beta^2,$$

dalle (9₂), (10₂) seguirebbe, essendo

$$(11_2) \quad \alpha^2 - (p+2)\beta^2 = 1,$$

$$\left(x - \frac{\alpha-1}{2}\right)^2 \leq p(p+2)\beta^2$$

ossia

$$(12_2) \quad x \leq \beta \sqrt{p(p+2)} + \frac{\alpha-1}{2}.$$

Ora se si prescinde dalle soluzioni di (1₂) soddisfacenti a (2₂'), che si cercheranno a parte, (se il secondo membro di (2₂') è alto, la ricerca delle $(x_{i,1}, y_{i,1})$, $i=1, \dots, r$, è laboriosa qualunque sia il metodo che vi si adoperi; ma in moltissimi altri casi invece tale ricerca è agevolissima), sarebbe la (12₂) in disaccordo con (6₂), quindi la (8₂) è impossibile e tutte le soluzioni i cui valori di x soddisfano a (6₂) soddisfano anche a (5₂).

Per dimostrare poi la (7₂) si noti che se si avesse

$$\alpha y \leq \beta x + \beta/2,$$

si avrebbe anche

$$\alpha^2 y^2 \leq \beta^2 x^2 + \beta^2 x + \beta^2/4,$$

ma dalla (1₂) segue

$$\beta^2 x^2 + \beta^2 x + \beta^2 p = (p+2)\beta^2 y^2,$$

e quindi dal confronto seguirebbe, per la (11₂),

$$y^2 \leq \frac{\beta^2(-4p+1)}{4}$$

che è impossibile.

Poniamo ora

$$x' = \alpha x - (p+2)\beta y + \frac{\alpha-1}{2}, \quad y' = -\beta x + \alpha y - \beta/2.$$

Per le (5₂), (7₂) è $x' > 0$, $y' > 0$, ammesso che valga la (6₂).
Inoltre si ha

$$(13_2) \quad x - x' = (1-\alpha)x + (p+2)\beta y - \frac{\alpha-1}{2},$$

ossia essendo per la (11₂)

$$\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{\beta} = (p+2)\beta,$$

$$x - x' = \frac{\alpha-1}{2} \left(-2x + 2 \frac{\alpha+1}{\beta} y - 1 \right)$$

che per la (7₂) dà

$$x' < x.$$

Si verifica poi subito che (x', y') è soluzione di (1₂).

Ora supponiamo che le soluzioni di (1₂) soddisfacenti, con il valore della x , a (2₂) siano

$$(x_{1,1}, y_{1,1}) = (1, 1), (x_{2,1}, y_{2,1}), \dots, (x_{r,1}, y_{r,1}).$$

Quindi da una soluzione (x, y) si passa, a mezzo delle (13₂), all'altra (x', y') con $x' < x$. Se la soluzione (x', y') ha

$$x' > \frac{\alpha-1}{2} + \beta\sqrt{p(p+2)},$$

si può, con le stesse (13₂), passare dalla soluzione (x', y') ad una altra soluzione (x'', y'') e così via sino a quando non si perviene ad una soluzione $(x^{(m)}, y^{(m)})$ con

$$x^{(m)} \leq \frac{\alpha-1}{2} + \beta\sqrt{p(p+2)},$$

allora dovrà necessariamente $(x^{(m)}, y^{(m)})$ coincidere con una delle $(x_{i,1}, y_{i,1})$ alla quale, applicando di nuovo le (13₂), si ha un'altra soluzione $(x^{(m+1)}, y^{(m+1)})$ ma con $x^{(m+1)} < 0$.

Cioè se poniamo

$$g(x, y) = (\alpha x - A\beta y + \frac{\alpha - 1}{2}, -\beta x + \alpha y - \beta/2), \quad A = p + 2,$$

se indichiamo cioè con $g(x, y)$ una funzione che trasforma la soluzione (x, y) nell'altra (x', y') , si deve avere necessariamente

$$(14_2) \quad g^{(m)}(x, y) = (x_{i,1}, y_{i,1}), \quad 1 \leq i \leq r.$$

D'altra parte se si pone

$$f(x, y) = (\alpha x + A\beta y + \frac{\alpha - 1}{2}, \beta x + \alpha y + \beta/2), \quad A = p + 2,$$

si verifica subito che

$$f(g(x, y)) = (x, y),$$

e quindi

$$f^{(m)}(g^{(m)}(x, y)) = (x, y),$$

cioè per (14₂)

$$f^{(m)}(x_{i,1}, y_{i,1}) = (x, y).$$

Se infine si pone

$$\alpha x + A\beta y + \frac{\alpha - 1}{2} = X', \quad \beta x + \alpha y + \beta/2 = Y', \quad A = p + 2,$$

si verifica subito che (X', Y') è soluzione di (1₂) e quindi, se (x, y) è soluzione di (1₂), lo è anche $f(x, y)$ con numeri maggiori rispettivamente di x, y .

Risulta perciò, come si doveva dimostrare, che tutte le soluzioni in numeri naturali della (1₂) sono date da

$$(x_{i,1}, y_{i,1}), f(x_{i,1}, y_{i,1}), f^2(x_{i,1}, y_{i,1}), \dots, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

3. Se per es. si fa $p = 3$, si ha che soluzione della (3₂), minima con β pari, è

$$\alpha = 9, \beta = 4,$$

ed è

$$\frac{\alpha - 1}{2} + \beta\sqrt{p(p+2)} = 4 + 4\sqrt{15} = 19,49 \dots$$

Ma le soluzioni della

$$(1_3) \quad x^2 + x + 3 = 5y^2$$

con $x < 19,49 \dots$ sono soltanto $(1, 1)$, $(6, 3)$, pertanto tutte le soluzioni in numeri naturali della (1_3) sono per le (2_2)

$$(1, 1), (33, 15), (601, 269), \dots, \\ (6, 3), (118, 53), (2126, 951), \dots$$

Se invece si suppone $p = 5$, la (1_2) diventa

$$(2_3) \quad x^2 + x + 5 = 7y^2$$

e si hanno due soluzioni con x soddisfacente a (12_2)

$$(1, 1), (145, 55)$$

e poichè la soluzione minima con β pari è ora $\alpha = 127$, $\beta = 48$, si ha che tutte le soluzioni in numeri naturali della (2_3) sono

$$(1, 1), (526, 199), \dots, \\ 145, 55), (36\ 958, 13\ 969), \dots,$$

4. Il caso $m = 2$.

TEOREMA 2. - *Tutte le soluzioni in numeri naturali della*

$$(1_4) \quad x^2 + 2x + p = (p + 3)y^2$$

con p intero > 1 , qualsiasi, ma con $p + 3$ non quadrato, si ottengono a mezzo delle formule ricorrenti

$$(2_4) \quad \begin{cases} x_{n+1} = \alpha x_n + (p + 3)\beta y_n + \alpha - 1, \\ y_{n+1} = \beta x_n + \alpha y_n + \beta \end{cases}$$

per ogni soluzione iniziale $(x_{i,1}, y_{i,1})$, $i = 1, 2, \dots, r$, con

$$(2_4') \quad x_{i,1} \leq \alpha - 1 + \beta \sqrt{p(p+3)}, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

essendo α, β la soluzione minima della

$$X^2 - (p + 3)Y^2 = 1.$$

Innanzitutto si dimostra, in maniera analoga a quella seguita per provare le (5_2) , (7_2) , che, per tutte le soluzioni (x, y) di (1_4) per cui è

$$(3_4) \quad x > \alpha - 1 + \beta \sqrt{p(p+3)},$$

si ha

$$(4_1) \quad p + 3) \beta y < \alpha x + \alpha - 1,$$

e che inoltre è

$$(5_1) \quad \alpha y > \beta(x + 1).$$

Se ora poniamo

$$(6_1) \quad x' = \alpha x - (p + 3) \beta y + \alpha - 1, \quad y' = -\beta x + \alpha y - \beta,$$

per le (4₁), (5₁) è $x' > 0$, $y' > 0$, supposto che valga la (3₁). Inoltre è

$$x - x' = (1 - \alpha)x + (p + 3) \beta y + 1 - \alpha;$$

ma essendo

$$\alpha^2 - (p + 3) \beta^2 = 1,$$

risulta

$$(p + 3) \beta = \frac{\alpha^2 - 1}{\beta},$$

e quindi

$$x - x' = \frac{\alpha - 1}{\beta} [\alpha y - \beta(x + 1) + y]$$

e perciò si ha per la (5₁) $x' < x$.

Si verifica poi subito che (x', y') è anche soluzione di (1₁).

Pertanto da una soluzione (x, y) della (1₁) si passa con la (6₁) ad un'altra (x', y') con $x' < x$ e così via sino a quando non si perviene ad una soluzione $(x^{(m)}, y^{(m)})$ con

$$x^{(m)} \leq \alpha - 1 + \beta \sqrt{p(p + 3)}$$

allora dovrà necessariamente coincidere, $(x^{(m)}, y^{(m)})$, con una delle soluzioni $(x_{i,1}, y_{i,1})$, $1 \leq i \leq r$. Inoltre a mezzo della soluzione $(x^{(m)}, y^{(m)})$, applicando di nuovo le (6₁), non essendo ora soddisfatta la (3₁), si ha una soluzione $(x^{(m+1)}, y^{(m+1)})$ con $x^{(m+1)} < 0$.

Pertanto se poniamo

$$G(x, y) = (\alpha x - B \beta y + \alpha - 1, -\beta x + \alpha y - \beta), \quad B = p + 3,$$

la funzione $G(x, y)$, trasforma la soluzione (x, y) nell'altra (x', y') , e si ha

$$G^{(m)}(x, y) = (x_{i,1}, y_{i,1}), \quad 1 \leq i \leq r.$$

D'altra parte se poniamo

$$F(x, y) = (\alpha x + B \beta y + \alpha - 1, \beta x + \alpha y + \beta),$$

si verifica subito che è

$$F(G(x, y)) = (x, y),$$

e quindi

$$F^{(m)}(G^{(m)}(x, y)) = (x, y),$$

ossia

$$F^{(m)}(x_{i,1}, y_{i,1}) = (x, y), \quad 1 \leq i \leq r.$$

Infine posto

$$\alpha x + B\beta y + \alpha - 1 = X', \quad \beta x + \alpha y + \beta = Y',$$

si verifica subito che (X', Y') è soluzione di (1₄).

Risulta perciò che tutte le soluzioni in numeri naturali della (1₄) sono date da

$$(x_{i,1}, y_{i,1}), F(x_{i,1}, y_{i,1}), F^2(x_{i,1}, y_{i,1}), \dots, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

come appunto dovevasi dimostrare.

Per la ricerca delle soluzioni $(x_{i,1}, y_{i,1})$ va ripetuta qui un'osservazione analoga a quella fatta a proposito del 1° teorema.

5. Se per es. si fa $p = 4$, della

$$(1_5) \quad x^2 + 2x + 4 = 7y^2,$$

essendo $\alpha = 8$, $\beta = 3$, la soluzione minima della

$$X^2 - 7Y^2 = 1,$$

si hanno le seguenti soluzioni non soddisfacenti a (3₄)

$$(1, 1), (4, 2)$$

e le (2₄) danno ad es. le soluzioni della (1₅) che seguono

$$(1, 1), (36, 14), (589, 223), \dots;$$

$$(4, 2), (81, 31), (1306, 494), \dots$$

Se invece si fa $p = 8$, soluzioni in numeri naturali della

$$x^2 + 2x + 8 = 11y^2,$$

sono le seguenti

$$(1, 1), (52, 16), (1057, 319), \dots;$$

$$(12, 4), (261, 79), (5226, 1576), \dots$$

6. A mezzo dei due teoremi stabiliti precedentemente si trovano tutte le soluzioni in numeri naturali d'infinite equazioni indeterminate del tipo

$$X^2 - My^2 = -N.$$

Se difatti si risolve rispetto ad x la

$$x^2 + x + p - (p + 2)y^2 = 0$$

si ha, quale valore positivo della x ,

$$x = \frac{-1 + \sqrt{(p+2)(2y)^2 - (4p-1)}}{2}$$

che, dovendo essere identicamente soddisfatta da $x = x_n$, $y = y_n$, ove x_n , y_n , son dati dalle formule ricorrenti (2₁), indicando con t_n^2 il radicando risulta

$$t_n = 2x_n + 1,$$

e quindi tutte le soluzioni in numeri naturali della

$$t^2 - (p + 2)z^2 = -(4p - 1),$$

in cui p è un intero non negativo qualsiasi, ma con $p + 2$ non quadrato, si ottengono assumendo

$$t = t_n = 2x_n + 1, \quad z = 2y_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

quando x_n , y_n si calcolano a mezzo del 1° teorema.

Se per es. è $p = 3$, soluzioni della

$$t^2 - 5z^2 = -11$$

sono le seguenti

$$(3, 2), (67, 30), (1203, 538), \dots;$$

$$(13, 6), (237, 106), (4253, 1902), \dots$$

In modo analogo avvalendosi del teorema 2° si ha che tutte le soluzioni in numeri naturali della

$$t^2 - (p + 3)y^2 = -(p - 1),$$

p intero > 1 , ma $p + 3$ non quadrato, si hanno per

$$t = t_n = x_n + 1, \quad y = y_n$$

essendo x_n , y_n dati dal teorema 2°.

Se si assume per es. $p = 4$, dell'equazione

$$t^2 - 7y^2 = -3$$

sono soluzioni le seguenti

$$(2, 1), (37, 14), (590, 223), \dots;$$

$$(5, 2), (82, 31), (1307, 494), \dots$$

7. Con un'altra applicazione del 1° teorema si generalizzano dei noti risultati relativi alle soluzioni della seguente equazione, su cui hanno richiamato l'attenzione SIERPINSKI e SCHINZEL (4)

$$(1_7) \quad (z + 1)^3 - z^3 = y^2$$

in cui le basi dei cubi differiscono di una unità (5).

Se r è un intero non negativo qualsiasi, tutte le soluzioni della equazione

$$(2_7) \quad (z + q)^3 - z^3 = q(r^2 + r + 1)y^2, \quad q = 2r + 1,$$

si ottengono assumendo

$$(3_7) \quad z = \frac{x_n - 1}{3} - r, \quad y = y_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

essendo x_n, y_n , dati dal 1° teorema.

Difatti dalla (2₇) si ha subito, quando si faccia

$$3z = x - (3r + 1),$$

$$x^2 + x + 3r^2 + 3r + 1 = 3(r^2 + r + 1)y^2,$$

che è del tipo della (1₂) per $p = 3r^2 + 3r + 1$.

Si noti che nella (2₇) le basi dei cubi differiscono di un intero positivo dispari qualsiasi e che la (2₇) se $r = 0$ si riduce appunto alla (1₇).

La questione che dà luogo alla (2₇) è la seguente: *Si cerchino due interi che differiscano di un numero intero dispari qualsiasi e tali che la differenza dei loro cubi sia multipla di un quadrato.*

Se per es. si fa $r = 3$ si ha l'equazione

$$(4_7) \quad (z + 7)^3 - z^3 = 91y^2.$$

cui corrisponde l'equazione, quando si ponga $3z = x - 3r - 1$

$$x^2 + x + 37 = 39y^2.$$

Ora poichè (25, 4) è la soluzione minima dell'equazione

$$X^2 - 39y^2 = 1$$

(4) L. c. in (3).

(5) « Americ. Math. Monthly », 53, (1946), pp. 464-465.

si ha, a mezzo delle (2₂), (3₇) ad es. la soluzione (61, 31) della (4₇).

Si noti inoltre che con l'applicazione del 1° teorema si possono avere tutte le soluzioni in numeri naturali della (2₇), una volta fissato il valore di r .

8. Infine i due teoremi stabiliti danno facilmente tutte le soluzioni in numeri naturali delle equazioni

$$(1_8) \quad x^2 - x + p = (p + 2)y^2,$$

$$(2_8) \quad x^2 - 2x + p = (p + 3)y^2.$$

Difatti la soluzione positiva della (1₂) è

$$(3_8) \quad x = \frac{-1 + t}{2},$$

se si pone

$$t = \sqrt{(p + 2)(2y)^2 - (4p - 1)}.$$

Ora, se indichiamo con x' l'opposto della radice negativa della (1₂), cioè se poniamo

$$x' = \frac{1 + t}{2},$$

si ha per la (3₈)

$$x' = x + 1.$$

Si verifica subito che se (x, y) è soluzione della (1₂), (x', y') è invece soluzione della (1₈). Pertanto le formule che danno *tutte le soluzioni in numeri naturali della (1₈), a mezzo delle (2₂), sono*

$$x'_{n+1} = x_{n+1} + 1 = \alpha x_n + (p + 2)\beta y_n + \frac{\alpha + 1}{2},$$

$$y'_{n+1} = y_{n+1} = \beta x_n + \alpha y_n + \beta/2,$$

per ogni soluzione iniziale il cui valore di x soddisfa alla (2₂):

$$(x'_{i,1}, y'_{i,1}) = (x_{i,1} + 1, y_{i,1}), \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

In modo analogo si trova che *tutte le soluzioni (x'', y'') in numeri naturali della (2₈) sono date dalle*

$$x''_{n+1} = x_{n+1} + 2 = \alpha x_n + (p + 3)\beta y_n + \alpha + 1,$$

$$y''_{n+1} = y_{n+1} = \beta x_n + \alpha y_n + \beta,$$

per ogni soluzione iniziale il cui valore di x soddisfa a (2₄):

$$(x''_{i,1}, y''_{i,1}) = (x_{i,1} + 2, y_{i,1}), \quad i = 1, 2, \dots, r.$$