# Bollettino Unione Matematica Italiana



Carmelo Totaro


## Una osservazione sulle condizioni al contorno dell'elettrodinamica dei corpi in moto.


*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **12** (1957), n.4, p. 609–611.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_4_609_0>



L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI*

http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1957.

# Una osservazione sulle condizioni al contorno dell'elettrodinamica dei corpi in moto.

Nota di Carmelo Totaro (a Messina)

**Sunto.** - *Le condizioni al contorno per le componenti normali di* $\boldsymbol{B}$ *e* $\boldsymbol{D}$ *nell'elettrodinamica dei corpi in moto sono una conseguenza della continuità delle componenti superficiali di* $\boldsymbol{E}^* = \boldsymbol{E} + \beta \wedge \boldsymbol{B}$ *e* $\boldsymbol{H}^* = \boldsymbol{H} - \beta \wedge \boldsymbol{D}$ *e delle equazioni di* Minkowski.

**Summary.** - *The boundary conditions of the normal components of* $\boldsymbol{B}$ *and* $\boldsymbol{D}$ *into electrodynamics of moving bodies are a conseguence of the continuity of the surface components of* $\boldsymbol{E}^* = \boldsymbol{E} + \beta \wedge \boldsymbol{B}$ *and* $\boldsymbol{H}^* = \boldsymbol{H} - \beta \wedge \boldsymbol{D}$ *through the* Minkowski's *equations.*

**1.** È noto (1) che nell'elettrodinamica dei mezzi in quiete le condizioni $B_n^{(2)} - B_n^{(1)} = 0$, $D_n^{(2)} - D_n^{(1)} = \omega$ ($\omega$ densità superficiale di

(3) Alfvén A., *Cosmical Electrodynamics*, cap. IV, Oxford University Press. 1950.

(4) Carini G., *Condizioni di compatibilità dinamica nella teoria delle onde magneto-idrodinamiche.* « Rend. Ist. Lomb. », Classe di Scienze, Vol. LXXXVII, 1954.

(1) Cfr. ad es. Joos, Theoretical Physics p. 332.

carica) seguono dalle equazioni di MAXWELL combinate con le condizioni

$$\boldsymbol{n} \wedge (\boldsymbol{E}^{(2)} - \boldsymbol{E}^{(1)}) = 0, \qquad \boldsymbol{n} \wedge (\boldsymbol{H}^{(2)} - \boldsymbol{H}^{(1)}) = 0$$

che esprimono la continuità delle componenti superficiali di $\boldsymbol{E}$ ed $\boldsymbol{H}$.

Mostrerò che una affermazione simile si può fare nell'elettrodinamica dei corpi in moto. Cioè dalle equazioni di MINKOWSKI, combinate con le equazioni che esprimono la continuità delle componenti superficiali di $\boldsymbol{E}^* = \boldsymbol{E} + \beta \wedge \boldsymbol{B}$ e di $\boldsymbol{H}^* = \boldsymbol{H} - \beta \wedge \boldsymbol{D}$, seguono le equazioni

$$\left\{ \begin{aligned} & B_n{}^{(2)} - B_n{}^{(1)} = 0 \\ & D_n{}^{(2)} - D_n{}^{(1)} = \omega . \end{aligned} \right. \tag{1}$$

2. Per la dimostrazione osserviamo che le equazioni di MINKOWSKI possono essere scritte nella forma seguente:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E}^* = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \beta \wedge \boldsymbol{B} \tag{2}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H}^* = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} - \operatorname{rot} \beta \wedge \boldsymbol{D} + \frac{1}{c}(\boldsymbol{I} + \rho \boldsymbol{v}) \tag{3}$$

alle quali bisogna associare le equazioni di condizione

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0.$$

Applicando la (2) ai mezzi 2 e 1, facendo la differenza e moltiplicando scalarmente per il versore $\boldsymbol{n}$ della normale alla superficie $\sigma$ di separazione dei due mezzi si ha:

$$\boldsymbol{n} \cdot \operatorname{rot} [\boldsymbol{E}^{*(2)} - \boldsymbol{E}^{*(1)}] = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{B}^{(2)} - \boldsymbol{B}^{(1)}) \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{n} \cdot \operatorname{rot} [\beta \wedge (\boldsymbol{B}^{(2)} - \boldsymbol{B}^{(1)})] \tag{4}$$

ma

$$\boldsymbol{n} \cdot \operatorname{rot} (\boldsymbol{E}^{*(2)} - \boldsymbol{E}^{*(1)}) = \nabla \cdot [\boldsymbol{E}^{*(2)} - \boldsymbol{E}^{*(1)}] \wedge \boldsymbol{n} = 0$$

per la continuità della componente superficiale di $\boldsymbol{E}^*$. Si ha pure

$$\operatorname{rot} [\beta \wedge (\boldsymbol{B}^{(2)} - \boldsymbol{B}^{(1)})] = \nabla \wedge [\beta \wedge (\boldsymbol{B}^{(2)} - \boldsymbol{B}^{(1)})] =$$
$$= [\nabla \cdot (\boldsymbol{B}^{(2)} - \boldsymbol{B}^{(1)})]\beta - (\beta \cdot \nabla)(\boldsymbol{B}^{(2)} - \boldsymbol{B}^{(1)}) = -(\beta \cdot \nabla)(\boldsymbol{B}^{(2)} - \boldsymbol{B}^{(1)}).$$

Tenuto conto di ciò, la (4) diviene

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla\right)(\boldsymbol{B}^{(2)} - \boldsymbol{B}^{(1)}) \cdot \boldsymbol{n}$$

cioè

$$\frac{d}{dt}(B_n^{(2)} - B_n^{(1)}) = 0. \tag{5}$$

Se postuliamo che la costante di integrazione è nulla, possiamo scrivere

$$B_n^{(2)} - B_n^{(1)} = 0. \tag{6}$$

Ciò equivale a postulare l'assenza di magnetismo libero.

**3.** Dalla (3) con procedimento analogo a quello già applicato alla (2) si trova

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n} \cdot \operatorname{rot}[\boldsymbol{H}^{*(2)} - \boldsymbol{H}^{*(1)}] &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{D}^{(2)} - \boldsymbol{D}^{(1)}) \cdot \boldsymbol{n} - \\ - \boldsymbol{n} \cdot \operatorname{rot} \beta \wedge (\boldsymbol{D}^{(2)} - \boldsymbol{D}^{(1)}) &+ \frac{1}{c}(\boldsymbol{I}^{(2)} - \boldsymbol{I}^{(1)}) \cdot \boldsymbol{n} + (\rho^{(2)} - \rho^{(1)})\beta \cdot \boldsymbol{n}. \end{aligned} \tag{7}$$

Ma

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \beta \wedge (\boldsymbol{D}^{(2)} - \boldsymbol{D}^{(1)}) &= \nabla \wedge [\beta \wedge (\boldsymbol{D}^{(2)} - \boldsymbol{D}^{(1)})] = \\ &= [\nabla \cdot (\boldsymbol{D}^{(2)} - \boldsymbol{D}^{(1)})]\beta - (\beta \cdot \nabla)(\boldsymbol{D}^{(2)} - \boldsymbol{D}^{(1)}) = \\ &= (\rho^{(2)} - \rho^{(1)})\beta - (\beta \cdot \nabla)(\boldsymbol{D}^{(2)} - \boldsymbol{D}^{(1)}). \end{aligned} \tag{8}$$

Per la continuità delle componenti superficiali di $\boldsymbol{H}^*$ il primo membro di (7) è nullo. Si può quindi scrivere

$$0 = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla\right)(D_n^{(2)} - D_n^{(1)}) + \frac{1}{c}(I_n^{(2)} - I_n^{(1)}) \tag{9}$$

cioè

$$\frac{d}{dt}(D_n^{(2)} - D_n^{(1)}) = I_n^{(1)} - I_n^{(2)}. \tag{10}$$

Integrando si ottiene

$$D_n^{(2)} - D_n^{(1)} = \int_0^t I_n^{(1)} dt - \int_0^t I_n^{(2)} dt = \omega(P,\ t) \tag{11}$$

che è la seconda delle (1).

Anche per ragioni dimensionali si riconosce che il secondo membro di (11) è una densità superficiale di carica.