# Bollettino Unione Matematica Italiana



Giovanni Crupi


## Sulle onde piane magneto-idrodinamiche propagantisi in una generica direzione.


*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **12** (1957), n.4, p. 604–609.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_4_604_0>

# Sulle onde piane magneto-idrodinamiche propagantisi in una generica direzione.

Nota di GIOVANNI CRUPI (a Messina)

**Sunto.** - *Scopo della Nota è di dimostrare l'esistenza di onde piane magneto-idrodinamiche, la cui direzione di propagazione è diversa, ma non ortogonale, alla direzione del campo magnetico impresso.*

**Summary.** - *It is the aim of this work to demonstrate the existence of magneto-hydrodynamical plane waves which have the direction of propagation different, but not orthogonal, to the direction of impressed magnetic field.*

Il Prof. ALFVÉN, studiando i fenomeni magneto-idrodinamici che nascono quando un fluido incomprimibile, elettricamente conduttore, si muove in un campo magnetico uniforme e costante, ha stabilito l'esistenza di onde piane magneto-idrodinamiche propagantisi nella direzione del campo magnetico esterno.

Mi sono domandato se simili onde esistano anche in una generica direzione $u$, formante un angolo $\theta$ col campo magnetico esterno.

In questa Nota, espongo il procedimento attraverso cui sono riuscito a caratterizzare tali onde. In particolare, dimostro che le grandezze caratteristiche delle onde piane magneto-idrodinamiche, propagantisi nella generica direzione $u$, soddisfano all'equazione

$$m\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\partial t}+\frac{\partial^3\Phi}{\partial y^2\partial t}+\frac{\partial^3\Phi}{\partial z^2\partial t}\right)+V^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=0$$

$\left(m=\frac{c^2}{\mu\sigma},\ V^2=\frac{B_0^{\,2}}{\rho\mu}\right)$, e determino, — in funzione dell'angolo $\theta$, che $u$ forma con $B_0$ ($B_0 =$ induzione del campo magnetico impresso) —, le formule generali che esprimono la velocità di propagazione ed il fattore di attenuazione di queste onde.

(1) ALFVÉN A., « Arkiv für matematik, astronomi, physik », Bd. 29 n. 2, 1942. *Cosmical electrodynamics*, cap. IV, Oxford University Press. 1950.

Per quanto riguarda il sistema di equazioni su cui fondare la ricerca, scelgo il seguente sistema di EULER-MINKOWSKI, già utilizzato in recenti lavori [2],

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\,\mathrm{grad})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F} + \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{1}{c}\,\boldsymbol{I} \wedge \boldsymbol{B} - \mathrm{grad}\, p\right) \\ \dot{\boldsymbol{B}} = -\,c\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} \\ \dot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{I} = c\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} \end{cases} \qquad \left(\cdot \equiv \frac{\partial}{\partial t},\ \lambda = \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}\right)$$

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} \boldsymbol{E} = \dfrac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon} - \dfrac{\lambda}{\varepsilon\mu}\,\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{H} = \dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu} + \dfrac{\lambda}{\varepsilon\mu}\,\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{I} = \sigma\left(\boldsymbol{E} + \dfrac{1}{c}\,\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}\right) \end{cases} \qquad \text{(III)}\quad \begin{cases} \mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0 \\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = 0 \\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0, \end{cases}$$

che si ottiene accoppiando le equazioni dell'idrodinamica di EULER con quelle dell'elettrodinamica dei mezzi in moto di MINKOWSKI, approssimate ai termini di primo ordine in $\beta = \dfrac{v}{c}$ ($v$ = velocità della generica particella, $c$ = velocità della luce nel vuoto). Si è indicato con $\boldsymbol{F}$ la forza non elettromagnetica agente sul fluido, con $p$ la pressione, con $\boldsymbol{I}$ la densità di corrente elettrica, con $\boldsymbol{E}$ l'intensità elettrica del campo, con $\boldsymbol{H}$ l'intensità magnetica, con $\boldsymbol{D}$ lo spostamento elettrico, con $\boldsymbol{B}$ l'induzione magnetica, con $\rho$ la densità del fluido, con $\sigma$ la conducibilità, con $\varepsilon$ la costante dielettrica e con $\mu$ la permeabilità.

Per avere il sistema di EULER-MAXWELL, usato dal Prof. ALFVÉN, basta porre $\lambda = 0$ nelle precedenti equazioni.

**2.** Assumiamo il sistema di riferimento inerziale $S(O, x, y, z, t)$ con l'asse $Oz$ coincidente in direzione e verso con $\boldsymbol{B}_0$. Le grandezze caratteristiche associate alle onde piane propagantisi nella direzione $\boldsymbol{u}(a_1, a_2, a_3 = \cos\theta)$ sono funzioni di $x, y, z, t$, anzi, di

$$\zeta = k\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{u} - \omega t, \tag{1}$$

(2) CARINI G., *Sulle equazioni della magneto-idrodinamica*, « Rend. Lincei », ser. VIII, vol. XXI, fasc. VI (1956). *Sulle soluzioni stazionarie*, « Rend. Lincei », ser. VIII, vol. XXIII, fasc. I (1957).

dove $\boldsymbol{r} = P - O$, $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{u}$ è il vettore di propagazione ed $\omega$ è un parametro prefissato.

Osserviamo che

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{b} \tag{2}$$

dove $\boldsymbol{b}$ è il contributo all'induzione magnetica del campo indotto.

In virtù della (1), e tenendo presente la (2), le (III) si specializzano nelle

$$\frac{d(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u})}{d\zeta} = 0, \quad \frac{d(\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u})}{d\zeta} = 0, \quad \frac{d(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u})}{d\zeta} = 0$$

e da queste, per la natura del problema, si ha

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} = 0, \quad \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u} = 0, \quad \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u} = 0 . \tag{3}$$

Premettiamo, adesso, le identità

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}) \equiv (\boldsymbol{B} \operatorname{grad})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \operatorname{grad})\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B} \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \operatorname{div} \boldsymbol{B}$$

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{D}) \equiv (\boldsymbol{D} \operatorname{grad})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \operatorname{grad})\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D} \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \operatorname{div} \boldsymbol{D}$$

$$\boldsymbol{B} \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{B} \equiv \frac{1}{2} \operatorname{grad} B^2 - (\boldsymbol{B} \operatorname{grad})\boldsymbol{B} ;$$

queste, per le (III), ed osservando che, in virtù delle (1) e (2),

$$(\boldsymbol{B} \operatorname{grad})\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{b} \operatorname{grad})\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{B}_0 \operatorname{grad})\boldsymbol{v} = \left(b_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y} + b_3 \frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{v} + $$

$$+ B_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z} = k(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}) \frac{d\boldsymbol{v}}{d\zeta} + B_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z} = B_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z} ,$$

$$(\boldsymbol{D} \cdot \operatorname{grad})\boldsymbol{v} = 0, \quad (\boldsymbol{v} \cdot \operatorname{gra})\boldsymbol{D} = 0 ,$$

si particolarizzano nelle

$$\left\{ \begin{aligned} &\operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}) \equiv B_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z} \\ &\operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{D}) \equiv 0 \\ &\boldsymbol{B} \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{B} \equiv \frac{1}{2} \operatorname{grad} B^2 - B_0 \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial z} . \end{aligned} \right. \tag{4}$$

Quindi, dalle (I), trascurando $\dot{\boldsymbol{D}}$ ed $\boldsymbol{F}$, eliminando $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{I}$, in virtù delle (II), e tenendo presenti le (4), si deduce il seguente sistema

$$
(5)\qquad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\frac{1}{2\rho\mu}\operatorname{grad} B^2-\frac{B_0}{\rho\mu}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p\\
&\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=-\frac{c}{\varepsilon}\operatorname{rot}\boldsymbol{D}+\frac{c\lambda}{\varepsilon\mu}B_0\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}\\
&\frac{\sigma}{\varepsilon}\left(\boldsymbol{D}+\frac{\lambda_1}{c}\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B}\right)=\frac{c}{\mu}\operatorname{rot}\boldsymbol{B}\qquad\qquad \lambda_1=\frac{\varepsilon\mu-\lambda c}{\mu}\,.
\end{aligned}\right.
$$

Poichè, in virtù della (1), l'operatore grad si riduce a $k\boldsymbol{u}\,\dfrac{d}{d\zeta}$, moltiplicando la prima delle (5) scalarmente per $\boldsymbol{u}$, si ottiene

$$
(6)\qquad \frac{dp}{d\zeta}=-\frac{1}{2\mu}\frac{dB^2}{d\zeta}\,.
$$

Dopo la (6), dalla prima delle (5) si ha

$$
(7)\qquad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=\frac{B_0}{\rho\mu}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial z}
$$

Da quest'ultima si deduce, in virtù della (1), che se la direzione $\boldsymbol{u}$ di propagazione dell'onda si sceglie ortogonale al campo impresso $\boldsymbol{B}_0$ (praticamente all'asse $Oz$) la velocità euleriana risulta indipendente da $t$. Perciò, in direzione ortogonale al campo impresso non ha senso parlare di onde piane magneto-idrodinamiche.

Conveniamo di scegliere $\boldsymbol{u}$ non ortogonale a $\boldsymbol{B}_0$.

Eliminando $\boldsymbol{D}$ dalle ultime due delle (5) si ha

$$
B_0\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}+\frac{c^2}{\mu\sigma}\Delta\boldsymbol{B}-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=0\,,
$$

ed infine, eliminando $\boldsymbol{v}$ da quest'ultima e dalla (7), otteniamo che $\boldsymbol{B}$ soddisfa all'equazione

$$
(8)\qquad m\left(\frac{\partial^3 \boldsymbol{B}}{\partial x^2\partial t}+\frac{\partial^3 \boldsymbol{B}}{\partial y^2\partial t}+\frac{\partial^3 \boldsymbol{B}}{\partial x^2\partial t}\right)+V^2\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2}=0
$$

dove $m=\dfrac{c^2}{\mu\sigma}$ e $V^2=\dfrac{B_0^{\,2}}{\rho\mu}$.

Si dimostra che alla stessa equazione soddisfano anche le altre grandezze.

Poichè i coefficienti della (8) sono indipendenti dal parametro $\lambda$, possiamo concludere che — nel problema in esame — il sistema di EULER-MINKOWSKI e quello di EULER-MAXWELL conducono alla medesima risolvente.

**3.** Per la (2), è ovvio che anche $b$ soddisfa alla (8).

Tentiamo di soddisfare alla (8) con una

$$b = b_0 \mathbf{b} e^{i(kr \cdot u - \omega t)} \tag{9}$$

dove $\omega$ è prefissato e $k$ è da determinarsi opportunamente.

Sostituendo la (9) nella (8) si trova

$$k^2 = \frac{\omega^2}{V^2 \cos^2\theta - m\omega i},$$

e da quest'ultima, con passaggi elementari, si deduce

$$k = \pm \left(\frac{\omega}{W} + \alpha i\right) \tag{10}$$

con

$$W = \frac{(V^4 \cos^4\theta + m^2\omega^2)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2} V^2 \cos^2\theta + \frac{1}{2}\sqrt{V^4 \cos^4\theta + m^2\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{11}$$

$$\alpha = \frac{m\omega^2 (V^4 \cos^4\theta + m^2\omega^2)^{-\frac{1}{2}}}{2\left(\frac{1}{2} V^2 \cos^2\theta + \frac{1}{2}\sqrt{V^4 \cos^4\theta + m^2\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{12}$$

Le (11) e (12) esprimono in funzione di $\theta$, conformemente a quanto abbiamo annunciato nella premessa, la velocità di propagazione dell'onda nella direzione $u$ ed il fattore di attenuazione.

Il doppio segno della (10) indica l'esistenza di due onde nella direzione di $u$, una progressiva in corrispondenza al segno $+$ e l'altra retrograda.

Chiudiamo il lavoro fissando l'attenzione su due casi particolari.

*a)* Si scelga $u$ coincidente in direzione col campo impresso e si trascurino i termini del secondo ordine in $1/\sigma$ $\left(m = \frac{c^2}{\mu\sigma}\right)$.

In tal caso le (11) e (12) si particolarizzano nelle due formule

$$W = \frac{1}{\sqrt{\rho\mu}} B_0 \quad , \quad \alpha = \frac{c^2 \omega^2 \rho^{\frac{3}{2}}}{2\mu^{-\frac{1}{2}} \sigma B_0^3}$$

già stabite da ALFVÉN [3].

*b*) Si faccia tendere $\sigma \to \infty$.

In tal caso la (11) si specializza nella

$$W = \frac{1}{\sqrt{\rho\mu}} \mid B_0 \cos\theta \mid , \tag{11'}$$

la quale mostra che ($\sigma \to \infty$), la formula della velocità di propagazione delle onde piane propagantisi in una generica direzione $u$ coincide con la formula [4]

$$W = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \mid H_{0u} \mid$$

della velocità di propagazione dei fronti d'onda di discontinuità.