# Bollettino Unione Matematica Italiana



Paolo Santoro


## Studio qualitativo del sistema $\dot{x} = ax^2 + bxy + cy^2 + f(x, y)$, $\dot{y} = dx^2 + exy + hy^2 + g(x, y)$ nell'intorno del punto singolare $(0,\ 0)$.


*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **12** (1957), n.4, p. 566–590.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_4_566_0>

**Studio qualitativo del sistema**

**$\dot{x} = ax^2 + bxy + cy^2 + f(x,\ y),\quad \dot{y} = dx^2 + exy + hy^2 + g(x,\ y)$**

**nell'intorno del punto singolare (0, 0).**

Nota di PAOLO SANTORO (a Firenze)

**Sunto.** - *Premessi nei n. 2 e 3 alcuni risultati noti sul sistema indicato nel titolo nel caso che i due polinomi* $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bxy} + \mathrm{cy}^2$ *ed* $\mathrm{dx}^2 + \mathrm{exy} + \mathrm{hx}^2$ *non abbiano divisori a comune, si passa nei n. da 4 a 7 a studiare il comportamento delle caratteristiche nel caso che questi due polinomi abbiano almeno un divisore lineare comune, o come si dice nel caso degenere, nel quale si ha la presenza di una retta di punti singolari per il sistema ridotto. Sotto ipotesi abbastanza generali si stabiliscono anche in questo caso degenere, dei teoremi sul comportamento delle linee caratteristiche.*

**Summary.** - *After having recolled some results on the system as in the title when the two polynomials* $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bxy} + \mathrm{cy}^2$ *and* $\mathrm{dx}^2 + \mathrm{exy} + \mathrm{hy}^2$ *have no common divisors, it is studied the behavior of the characteristics when these two polynomials hawe at least a common real linear divisor that is the degenerate case, in which it is assured the existence of a stright line of singular points for the system without perturbation. Under sufficiently general hypothesis some theorem on the behaviour of the characteristic lines are etablished in the degenerate case too.*

## 1. Introduzione.

Siano $X(x,\ y)$, $Y(x,\ y)$ due funzioni reali definite in un intorno del punto $O \equiv (0,\ 0)$, $0 < x^2 + y^2 \leq r^2$, ivi di classe $C^2$, cioè dotate di derivate seconde continue.

Sia inoltre

$$(1,1)\qquad X(0,\ 0) = 0, \qquad Y(0,\ 0) = 0$$

$$(1,2)\qquad X^2(x,\ y) + Y^2(x,\ y) > 0, \qquad 0 < x^2 + y^2 \leq r^2,$$

cosicchè il punto $O$ è un punto singolare isolato per il sistema autonomo piano

$$(1,3)\qquad \dot{x} = X(x,\ y), \qquad \dot{y} = Y(x,\ y),$$

con $\dot{x} = dx/dt$, $\quad \dot{y} = dy/dt$, $t$ reale.

Potremo scrivere

$$(1,4)\qquad \begin{aligned} X(x,\ y) &= a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{2,0}x^2 + \ldots + a_{0,2}y^2 + f(x,\ y) \\ Y(x,\ y) &= b_{1,0}x + b_{0,1}y + b_{2,0}y^2 + \ldots + b_{0,2}y^2 + g(x,\ y) \end{aligned}$$

con

$$a_{1,0} = \partial X/\partial x\,|_{\substack{x=0\\y=0}}, \quad a_{0,1} = \partial X/\partial y\,|_{\substack{x=0\\y=0}} \qquad \text{ecc.}$$

ed analogamente per i coefficienti $b_{i,k}$.

Se la caratteristica $p$ della matrice

$$\begin{pmatrix} a_{1,0} & a_{0,1} \\ b_{1,0} & b_{0,1} \end{pmatrix} \tag{1,5}$$

è $= 2$ (cfr. G. SANSONE - R. CONTI, *Equazioni differenziali non lineari*, Cap. II e Cap. V, in seguito questa Opera verrà indicata solo con E.D.N.L.) lo studio del sistema è stato sufficientemente approfondito. Ove $p = 1$ il sistema è stato studiato da KEIL [1], da BAROCIO [3] e da GUBAR [4].

Ci proponiamo ora di esaminare il caso in cui sia $p = 0$, cioè sia $a_{1,0} = a_{0,1} = b_{1,0} = b_{0,1} = 0$, e quindi $X(x, y)$ ed $Y(x, y)$ si possano scrivere

$$\begin{aligned} X(x, y) &= ax^2 + bxy + cy^2 + f(x, y), \\ Y(x, y) &= dx^2 + exy + hy^2 + g(x, y). \end{aligned} \tag{1,6}$$

Supporremo che siano soddisfatte le seguenti ipotesi:

i) i coefficienti $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $h$, non siano tutti nulli,

ii) $f(x, y)$ e $g(x, y)$ siano di classe $C^2$ in un cerchio con centro nell'origine e raggio $r > 0$; e siano nulle nell'origine insieme alle loro derivate prime,

iii) sia $f(x, y) = \rho^3\varphi(x, y)$, $g(x, y) = \rho^3\psi(x, y)$, con $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ e $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)$ appartenenti alla classe $C^2$; tale ipotesi comporta anche che sia $|f(x, y)| \leq M(x^2 + y^2)^{1+\mu}$, $|g(x, y)| \leq M(x^2 + y^2)^{1+\mu}$ con $M$ e $\mu$ costanti positive,

iv) sia l'origine un punto singolare isolato per il sistema (1,3), sia cioè:

$$(ax^2+bxy+cy^2+f(x, y))^2 + (dx^2+exy+hy^2+g(x, y))^2 > 0, \quad 0 < x^2+y^2 < r^2.$$

Chiameremo in generale il sistema

$$\dot{x} = ax^2 + bxy + cy^2, \qquad \dot{y} = dx^2 + exy + hy^2, \tag{1,7}$$

*sistema ridotto* rispetto al sistema

$$\dot{x} = ax^2 + bxy + cy^2 + f(x, y), \qquad \dot{y} = dx^2 + exy + hy^2 + g(x, y) \tag{1,8}$$

che diremo *sistema perturbato*.

Distingueremo due casi:

I) i polinomi $ax^2 + bxy + cy^2$ e $dx^2 + exy + hy^2$ non abbiano divisori reali in comune ed i sistemi (1,7) ed (1,8) li diremo *non-degeneri*;

II) i detti polinomi abbiano almeno un fattore reale comune ed i sistemi li diremo *degeneri*.

Nel n. 2 si studia il sistema ridotto non degenere, nel n. 3 il corrispondente sistema perturbato. Nel n. 4 si perviene a quattordici tipi distinti (cioè non ottenibili l'uno dall'altro mediante trasformazioni affini) di sistemi ridotti degeneri; nei numeri successivi si studiano i corrispondenti sistemi perturbati.

Dai nostri risultati si deduce che se *il sistema* (1,8) *soddisfa le ipotesi poste da* i) ad iv) *non è possibile che il punto singolare isolato, O, sia un centro, nè un centro-fuoco, nè un fuoco,* cioè esiste sempre almeno una caratteristica nel piano $(x, y)$, che giunge al punto $O$ con tangente determinata, contrariamente a quanto accade se la matrice (1,5) ha caratteristica $p = 1$ oppure $p = 2$.

## 2. Il sistema ridotto nel caso non degenere.

Studiamo il sistema ridotto:

$$\dot{x} = ax^2 + bxy + cy^2, \quad \dot{y} = dx^2 + exy + hy^2 \tag{2.1}$$

con i coefficienti soddisfacenti le ipotesi i) del n. 1 e tali che

$$(ax^2 + bxy + cy^2)^2 + (dx^2 + exy + hy^2)^2 > 0, \qquad 0 < x^2 + y^2 \tag{2,2}$$

Tale studio è già stato condotto da L. S. Liaghina [2]; qui lo riprenderemo in breve conducendo le nostre considerazioni solo nell'intorno dell'origine e secondo la teoria esposta in E. D. N. L. cap. II. Determiniamo cioè le anomalie dei *raggi invarianti* e il tipo di angolo normale ad esso associato.

Perciò al sistema (2,1) associamo l'espressione:

$$N(\vartheta) = d\cos^3\vartheta + (e-a)\cos^2\vartheta \operatorname{sen}\vartheta + (h-b)\cos\vartheta \operatorname{sen}^2\vartheta - c\operatorname{sen}^3\vartheta \tag{2,3}$$

Questa contiene almeno un fattore lineare reale $\alpha\cos\vartheta + \beta\operatorname{sen}\vartheta$ e, salvo una rotazione di assi, possiamo supporre che tale fattore lineare sia $\cos\vartheta$, cioè salvo una trasformazione affine, supponiamo $c = 0$, con che il sistema (2,1) si scrive

$$\dot{x} = ax^2 + bxy, \quad \dot{y} = dx^2 + exy + hy^2, \tag{2,1'}$$

e la (2,3)

$$N(\vartheta) = \cos\vartheta \, \{ d\cos^2\vartheta + (e-a)\cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta + (h-b)\operatorname{sen}^2\vartheta \} . \tag{2,3'}$$

A questa espressione associamo (1)

$$(2,4) \qquad Z(\vartheta) = a \cos^3 \vartheta + (b + d) \cos^2 \vartheta \operatorname{sen} \vartheta + e \cos \vartheta \operatorname{sen}^2 \vartheta + h \operatorname{sen}^3 \vartheta$$

e consideriamo l'equazione $N(\vartheta) = 0$ per $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, i casi sono:

i) $(e - a)^2 - 4d(h - b) < 0$, $N(\vartheta) = 0$ ha due coppie di radici reali $\vartheta = \pi/2$, $\vartheta = 3\pi/2$ ($\cos \vartheta = 0$),

ii) $(e - a)^2 - 4d(h - b) = 0$, $N(\vartheta) = 0$ ha due coppie di radici reali coincidenti oltre la coppia di radici di $\cos \vartheta = 0$.

iii) $(e - a)^2 - 4d(h - b) > 0$, $N(\vartheta) = 0$ ha tre coppie di radici reali distinte fra loro.

*Valgono le ipotesi* i): Gli unici raggi invarianti sono allora $\vartheta = \pi/2$, $\vartheta = 3\pi/2$ e salvo cambiare $t$ in $-t$, possiamo supporre $d > 0$ (per l'ipotesi poste è $d \neq 0$).

Consideriamo per brevità l'anomalia $\vartheta = \pi/2$, essendo il ragionamento analogo nel caso simmetrico $\vartheta = 3\pi/2$.

Essendo

$$(2,5) \qquad Z(\pi/2)\, N'(\pi/2) = - h(h - b)$$

diverso da zero, non potendo essere $h = 0$ per la (2,2) nè $h - b = 0$ per la i) e dovendo $h - b$ avere lo stesso segno di $d$, è $h - b > 0$, il segno di (2,5) dipenderà da quello di $h$. Allora per $h < 0$ l'angolo normale associato a $\vartheta = \pi/2$ è del primo tipo, per $h > 0$ è del secondo tipo (2).

1° esempio, (angolo normale del primo tipo) le caratteristiche del sistema

$$\dot{x} = - 2xy, \qquad \dot{y} = x^2 - y^2,$$

hanno come sostegno i cerchi $x^2 + y^2 + cx = 0$ (3)

2° esempio (angolo normale del secondo tipo) il sistema:

$$\dot{x} = 0, \qquad \dot{y} = x^2 + y^2,$$

ha come caratteristiche le rette $x =$ cost..

*Valga l'ipotesi* ii): Se è $h - b = e - a = 0$, se cioè il sistema (2, 1') è

$$(2,1'') \qquad \dot{x} = ax^2 + bxy, \qquad \dot{y} = dx^2 + axy + by^2,$$

(1) Cfr. E.D.N.L. cap. II, § 2.

(2) Cfr. E.D.N.L. loc. cit. nella nota precedente.

(3) Per detto esempio cfr. E.D.N.L. pag. 80 e fig. 18.

con $d > 0$ (per la (2,2) non può essere nullo) salvo a cambiare $t$ in $-t$, dalla (2,3′) risulta che gli unici raggi invarianti sono $\vartheta = \pi/2$, $\vartheta = 3\pi/2$ ed inoltre essendo $N'(\vartheta)|_{\vartheta=\pi/2} = N''(\vartheta)|_{\vartheta=\pi/2} = 0$, $N'''(\vartheta)|_{\vartheta=\pi/2} \neq 0$ (ed analogamente per $\vartheta = 3\pi/2$, caso che per brevità trascuriamo si ha:

$$Z(\pi/2)N'''(\pi/2) = -6bd, \tag{2, 5′}$$

($b \neq 0$ per la (2,2)). Il segno della (2,5′) dipende ($d > 0$) da quello di $b$ e perciò se $b < 0$ l'angolo normale è del primo tipo, se $b > 0$ è del secondo tipo.

3° esempio, (angoli normali del primo tipo). Le caratteristiche del sistema:

$$\dot{x} = -xy, \quad \dot{y} = x^2 - y^2,$$

hanno come sostegno le curve $x = c^{-y^2/2x^2}$ (e parametricamente $x = ce^{-\tau^2/2}$, $y = c\tau e^{-\tau^2/2}$, $\tau$ parametro reale).

4° esempio (angoli normali del secondo tipo). Le caratteristiche del sistema:

$$\dot{x} = xy, \quad \dot{y} = x^2 + y^2,$$

hanno come sostegno le curve $x = ce^{y^2/2x^2}$ (e parametricamente $x = ce^{\tau^2/2}$, $y = c\tau e^{\tau^2/2}$, $\tau$ parametro reale).

Sia invece, valendo ancora le ipotesi ii), $h - b \neq 0$, salvo una trasformazione affine $x_1 = x$, $y_1 = x + (e - a)y/2d$ possiamo supporre $d = e - a = 0$, con che la (2,2) sussiste ancora se $h - b \neq 0$, $a \neq 0$ cioè se il sistema ha la forma

$$\dot{x} = ax^2 + bxy, \quad \dot{y} = axy + hy^2. \tag{2,1‴}$$

Risulta allora che le anomalie dei raggi invarianti sono $\vartheta_1 = 0$. $\vartheta_2 = \pi$, $\vartheta_3 = \pi/2$, $\vartheta_4 = 3\pi/2$. Consideriamo, come al solito solo le anomalie $\vartheta_1$ e $\vartheta_3$. Per $\vartheta = 0$ è $N'(\vartheta)|_{\vartheta=0} = 0$ e $N''(\vartheta)|_{\vartheta=0} \neq 0$, cosicchè è

$$Z(0)\,N''(0) = a(h - b), \tag{2,5″}$$

e quindi l'angolo normale associato a tale direzione è del terzo tipo; mentre per l'anomalia $\vartheta = \pi/2$ è

$$Z(\pi/2)\,N'(\pi/2 = -h(h - b), \tag{2,5‴}$$

salvo a cambiare $t$ in $-t$, si può supporre $h > 0$ ed allora l'angolo può essere del primo e secondo tipo dipendendo dal segno di $h - b$.

5° esempio, (angoli normali accoppiati del primo e del terzo tipo). Le caratteristiche del sistema:

$$\dot{x} = x^2 - 2xy, \qquad \dot{y} = xy - y^2,$$

hanno per sostegno le curve $y^2 = cxe^{-x/y}$ (ed in equazioni parametriche $x = c\tau^2 e^{-\tau}$, $y = c\tau e^{-\tau}$, $\tau$ parametro reale).

6° esempio, (angoli normali del secondo e del terzo tipo). Le caratteristiche del sistema:

$$\dot{x} = x^2 + 2yx, \qquad \dot{y} = xy + y^2$$

hanno come sostegno le curve $y^2 = cxe^{x/y}$ (ed in equazioni parametriche $x = c\tau^2 e^{\tau}$, $y = c\tau e^{\tau}$, $\tau$ parametro reale).

Infine *valga l'ipotesi* iii): Salvo una trasformazione affine $x = x_1$, $y = x_1 + \mu y$ con $\mu$ radice dell'equazione $d^2z^2 + (e - a)z + h - b = 0$, possiamo supporre che oltre a $\cos\vartheta$, la (2,3) contenga come fattore $\operatorname{sen}\vartheta$, per il che è necessario che sia $d = 0$, $ah - eb \neq 0$, $e - a \neq 0$, $h - b \neq 0$ cioè il sistema sia

$$(2,1''') \qquad \dot{x} = ax^2 + bxy, \qquad \dot{y} = exy + hy^2$$

Le anomalie allora sono $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = \pi$, $\vartheta_3 = \pi/2$, $\vartheta_4 = 3\pi/2$, $\vartheta_5 = + \alpha$, $\vartheta_6 = -\alpha$, con $\alpha = \operatorname{arctg}(h - b)/(e - a)$. La discussione viene allora condotta con i soliti ragionamenti precedentemente illustrati. Qui teniamo solo presente che per le anomalie $\vartheta = 0$, $\vartheta = 2\pi$ a secondo del segno di $(e - a)a$ $(a \neq 0)$ si ha solo un angolo normale del primo o secondo tipo. Così pure per le anomalie $\vartheta = \pi/2$, $\vartheta = 3\pi/2$ (essendo $(h - b)b \neq 0$) si ha ancora un angolo normale del primo o secondo tipo. Ciò ci occorre per concludere che, *se il sistema* (2,1) *soddisfa le ipotesi poste, allora non è possibile avere solo angoli normali del terzo tipo, ma essi si presentano insieme ad angoli normali del primo o secondo tipo.*

## 3. Sistema perturbato nel caso non degenere.

Si può ora studiare il sistema (2,1) quando esso è perturbato. Sia cioè il sistema

$$(3,1) \qquad \dot{x} = ax^2 + bxy + cy^2 + f(x, y), \qquad \dot{y} = dx^2 + exy + hy^2 = g(x, y),$$

e siano soddisfatte la ipotesi i) e la iv) enunciate nel n. 1 ed il sistema ridotto soddisfi la (2,2). Le altre ipotesi enunciate nel n. 1 le sostituiremo con la seguente:

v) $f(x, y)$ e $g(x, y)$ siano funzioni continue e lipschitziane, nulle nell'origine.

Noi possiamo associare alle anomalie dei raggi invarianti i così detti «*settori normali*» [4] che possono essere del primo, secondo o terzo tipo secondo il tipo di angolo normale del sistema ridotto.

Quando il settore normale è del primo tipo si ha l'equicomportamento tra il sistema ridotto e quello dato; quando il settore è del secondo tipo le condizioni v) non sono più sufficienti a garantire l'unicità della soluzione che giunge all'origine: infine se il settore è del terzo tipo le condizioni v) non sono neanche più sufficienti a garantire l'esistenza di soluzioni che giungono all'origine. Per la discussione dell'argomento si rinvia al citato volume E. D. N. L. cap. V; qui vogliamo solo notare che, *poichè*, come si è posto in evidenza alla fine del n. 2, *non può sussistere da solo per il sistema ridotto un angolo normale del terzo tipo*, *si deduce che valide le ipotesi* i) e iv) *del n.* 1, *la* (2,2) *e la* v) *di questo n. esiste almeno una caratteristica che giunge all'origine.*

## 4. Studio del sistema ridotto nel caso degenere.

*a*) Si consideri ora il sistema

$$\dot{x} = X_2(x, y) = M_1 \cdot M_2, \qquad \dot{y} = Y_2(x, y) = N_1 \cdot N_2,$$

con $M_1$, $M_2$, $N_1$, $N_2$ fattori lineari reali in $x$ ed $y$ e valga almeno una delle eguaglianze $M_i = N_i$ $(i = 1, 2)$, si abbia cioè il sistema

$$\dot{x} = (ax + by)(\alpha x + \beta y), \qquad \dot{y} = (ax + by)(\gamma x + \delta y) \tag{4,1}$$

è chiaro che in questo caso non è più valida la condizione (2,2), poichè *avremo una intera retta di punti singolari*, *uscente dall'origine*, *soddisfacente la equazione* $ax + by = 0$.

*b*) Consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \tag{4,2}$$

Per l'ipotesi posta nel n. 1 essa non può avere caratteristica zero.

Se essa ha caratteristica $= 1$, allora si sa [5] che vi sono due trasformazioni lineari non degeneri che riportano la matrice (4,2)

[4] Cfr. E.D.N.L. cap. IV e cap. V, § 1.

[5] Cfr. ad esempio E.D.N.L. cap. II, § 1.

nelle matrici

$$(4,3) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad (4,4) \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rispettivamente, a secondo che $\alpha + \delta \neq 0$ oppure $\alpha + \delta = 0$. Quindi vi è una trasformazione affine che porta il sistema (4,1) in uno dei sistemi:

$$(4,5,1) \qquad \dot{x} = (ax + by)x, \qquad \dot{y} = 0$$

$$(4,5,1') \qquad \dot{x} = (ax + by)y, \qquad \dot{y} = 0$$

con $a^2 + b^2 > 0$.

Consideriamo il sistema (4,5,1), da esso possono aversi i seguenti

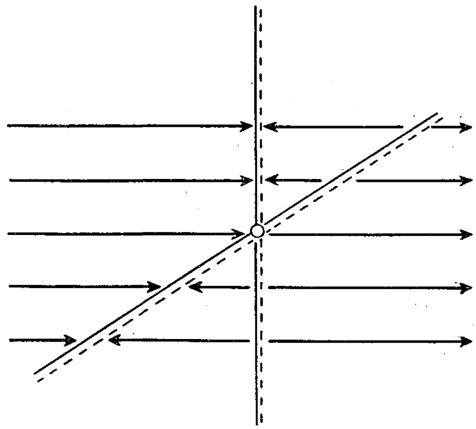

Fig. 1

casi: $ab \neq 0$, si ha il comportamento di fig. 1 oppure $b = 0$ e il sistema ha la forma

$$(4,5,2) \qquad \dot{x} = ax^2, \qquad \dot{y} = 0$$

ossia la retta di punti singolari $ax + by = 0$ coincide con la retta $x = 0$; oppure $a = 0$ e il sistema ha la forma

$$(4,5,3) \qquad \dot{x} = bxy, \qquad \dot{y} = 0$$

e la retta di punti singolari $ax + by = 0$ coincide con la retta $y = 0$.

Nel sistema (4,5,1') se $a = 0$ si ha il sistema

$$(4,5,4) \qquad \dot{x} = by^2, \qquad \dot{y} = 0$$

le cui caratteristiche hanno il comportamento come quello indicato in fig. 2, se $b < 0$, mentre se $b = 0$ si ricade nel sistema (4,5,3). Notiamo subito che il sistema stesso (4,5,1′) mediante la trasformazione affine $x_1 = ax + by$, $y_1 = y$ si trasforma nel sistema (4,5,3).

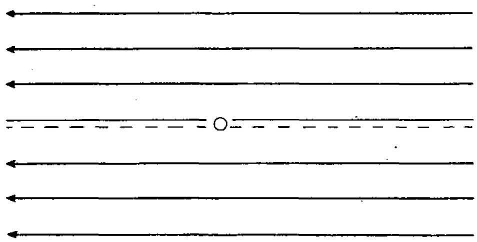

Fig. 2

*c*) Sia $\rho = 2$ la caratteristica della matrice (4,2). Ed allora esistono delle trasformazioni affini [6] tali che posto $I = \alpha + \delta$, $\Omega = \alpha\delta - \beta\gamma$ la (4,2) si trasforma in:

| | | | |
|---|---|---|---|
| (4,6,1) | $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ | se è $0 = I^2 < 4\Omega$, | |
| (4,6,2) | $\begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$ | se è $0 < I^2 < 4\Omega$, | con $\lambda\mu \neq 0$ |
| (4,6,3) | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | se è $0 < I^2 = 4\Omega$, | $\beta^2 + \gamma^2 = 0$ |
| (4,6,4) | $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ | se è $0 < I^2 = 4\Omega$, | $\beta^2 + \gamma^2 > 0$ |
| (4,6,5) | $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ | se è $0 < 4\Omega < I^2$, | con $\lambda\mu > 0$ |
| (4,6,6) | $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ | se è $4\Omega < 0 \leq I^2$, | con $\lambda\mu < 0$. |

In corrispondenza si hanno i seguenti sistemi:

(4,5,5) $\dot{x} = (ax + bx)(-y)$, $\dot{y} = (ax + by)x$;

4,5,6) $\dot{x} = (ax + by)(\lambda x - \mu y)$, $\dot{y} = (ax + by)(\mu x + \lambda y)$;

(4,5,7) $\dot{x} = (ax + by)x$, $\dot{y} = (ax + by)y$;

[6] Cfr. ad esempio E.D.N.L. Cap. II, n. 4.

Dalla matrice 4,6,4) ne discende il sistema

(4,5,8) $\qquad \dot{x} = (ax + by)(x + y), \qquad y = (ax + by)y\,;$

e per $a = 0$ si ha il sistema

(4,5,9) $\qquad \dot{x} = by(x + y), \qquad \dot{y} = by \cdot y$

cioè se la retta di punti singolari $ax + by = 0$ è la retta $y = 0$, se $b = 0$ basta cambiare $x$ con $y$.

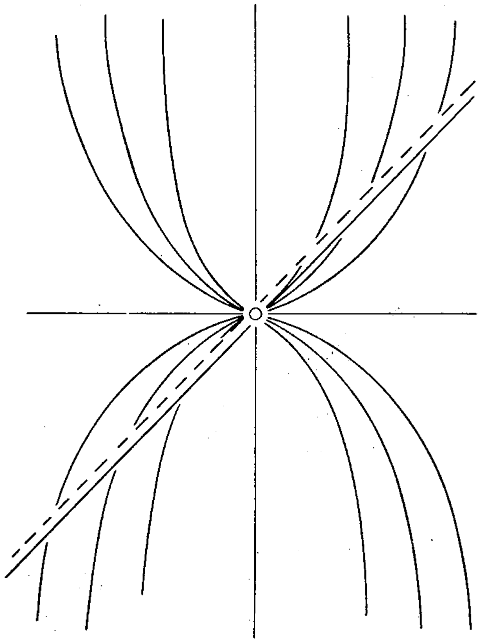

Fig. 3

Così ancora dalla matrice (4,6,5) si ha

(4,5,10) $\qquad \dot{x} = (ax + by)\lambda x, \qquad \dot{y} = (ax + by)\mu y\,; \qquad \lambda\mu > 0\,;$

invece se $a = 0$ si ha

(4,5,11) $\qquad \dot{x} = b\lambda xy, \qquad \dot{y} = b\mu y^2$

con la retta di punti singolari coincidente con la retta $y = 0$; per $b = 0$ si ha:

(4,5,12) $\qquad \dot{x} = a\lambda x^2, \qquad \dot{y} = a\mu xy, \qquad \lambda\mu > 0,$

cioè la retta di punti singolari $ax + by = 0$ coincide con la retta $x = 0$. Il comportamento delle caratteristiche per i sistemi (4,5,10), (4,5,11) (4,5,12) è illustrato nelle figure 3, 4, 5 (7).

Dalla matrice (4,6,6) si ha

$$\dot{y} = (ax + by)\lambda x, \quad \dot{y} = (ax + by)\mu y \qquad \lambda\mu < 0 \tag{4,5,13}$$

e per $b = 0$ (per $a = 0$ basta cambiare $x$ con $y$) si ha

$$\dot{x} = a\lambda x^2, \quad \dot{y} = a\mu xy \tag{4,5,14}$$

con la retta di punti singolari $x = 0$.

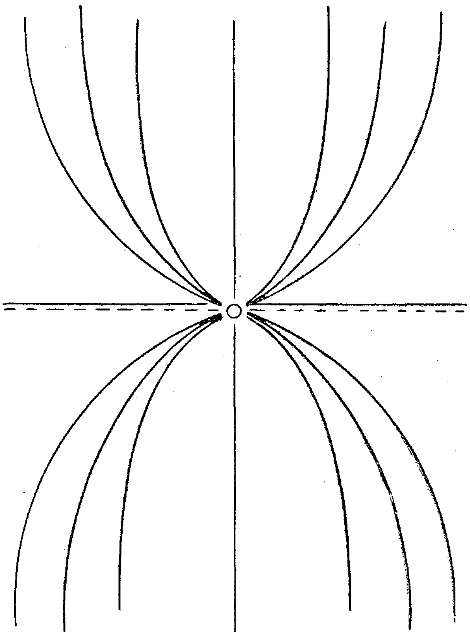

Fig. 4

Concludendo *i tipi ridotti mediante trasformazione affine del sistema ridotto degenere* (4,1) *sono quelli elencati con i numeri da* (4,5,1) *a* (4,5,14)

(7) Le figure 3, 4, 5 sono state riportate per mettere in evidenza il comportamento della retta di punti singolari. Negli altri casi basta prendere i diagrammi del caso lineare (cf. E. D. N. L. cap. II, n. 1) spezzando le caratteristiche con la retta di punti singolari così come è stato fatto nelle figure 3, 4, 5.

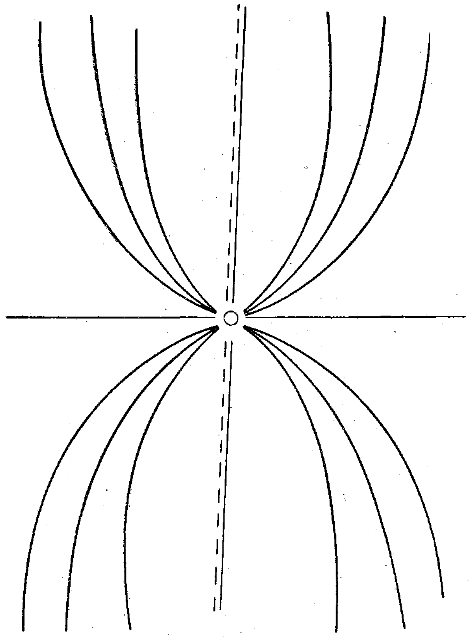

Fig. 5

## 5. Sistemi degeneri perturbati:

*a*) Teorema 1°:

*Sia il sistema*

$$(5,1)\qquad \dot{x} = (ax + by)(\alpha x + \beta y) + f(x, y), \quad \dot{y} = (ax + by)(\gamma x + \delta y) + g(x, y)$$

*e siano soddisfatte le ipotesi poste al* n. 1. *Se è*

$$(5,2)\qquad (\delta - \alpha)^2 + 4\beta\gamma \geq 0 \quad (^8)$$

*il sistema ammette due e due sole caratteristiche, che si possono rappresentare con* $y = y(x)$, *definite rispettivamente per* $x > 0$ *ed* $x < 0$ *e soddisfacenti le condizioni* $\lim\limits_{x \to 0} y(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} y'(x) = 0$.

[8] Cioè la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

o ha la caratteristica $= 1$ e si può ridurre alla forma (4, 3) oppure, avendo caratteristica $= 2$, ha la natura del nodo stellato o del nodo ad una tangente o a due tangenti oppure ha la natura del colle.

Essendo $a^2 + b^2 \neq 0$ possiamo supporre $b=0$, infatti in caso contrario possiamo sempre ricondurci a tale ipotesi nel caso di $ab \neq 0$ mediante la trasformazione affine $x_1 = ax + by$, $y_1 = y$ e nel caso di $a = 0$ scambiando $x$ con $y$. Consideriamo quindi il sistema

$$(5,1') \qquad \dot{x} = x(\alpha x + \beta y) + f(x, y), \qquad \dot{y} = x(\gamma x + \delta y) + g(x, y).$$

Avendo effettuato una trasformazione affine, per detto sistema varrà ancora la (5,2). Il sistema (5,1′) si potrà poi porre nella forma:

$$(5,1'') \qquad \dot{x} = Ax^2 + Bxy + f(x, y), \qquad \dot{y} = Cxy + g(x, y);$$

salvo una trasformazione affine del tipo: $x = x_1$, $y = tx_1 + ky_1$

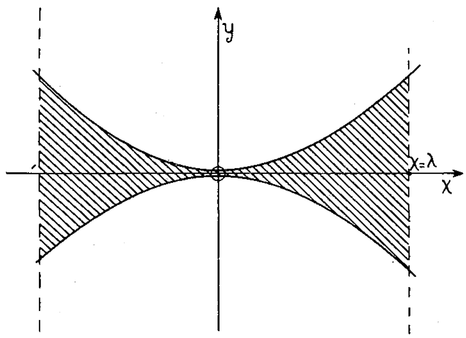


Fig. 6

con $t$ radice (reale) dell'equazione $\beta z^2 - (\delta + \alpha)z - \gamma = 0$ e $k$ tale che $|\alpha + \beta t| > k|\delta - \beta t|$ in modo che sia

$$(5,3) \qquad |A| > |C|.$$

Sia $p > 0$, tale che $0 < p - 1 < \mu$. Consideriamo la regione (cfr. fig, 6)

$$|y| < |x|^p, \quad |x| < \lambda$$

con $\lambda$ positivo per ora arbitrario. In $R$ è:

$$|Ax^2 + Bxy + f(x, y)| \neq 0, \qquad x \neq 0.$$

Infatti si ha

$$|Ax^2 + Bxy + f(x, y)| \geq |A| x^2 \{1 - |By/Ax + f(x, y)/Ax^2|\},$$

ma è

$$|By/Ax + f(x, y)/Ax^2| \leq |B/A| \cdot |y/x| + |f(x, y)|/|Ax^2| \leq$$
$$\leq |B/A| \lambda^{p-1} + M(1 + \lambda^{2(p-1)}) \cdot \lambda^{2\mu} |a|^{-1} = \varepsilon(\lambda)$$

con $\lim_{\lambda \to 0} \varepsilon(\lambda) = 0$. Scegliamo $\lambda$ in guisa che $\varepsilon(\lambda) < 1$, abbiamo allora

$$(5,4) \qquad |Ax^2 + Bxy + f(x, y)| \geq Ax^2(1 - \varepsilon(\lambda)) > 0 \qquad \text{per } |x| \neq 0.$$

Possiamo dunque scrivere in $R$:

$$(5,6) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{Cxy + g(x, y)}{Ax^2 + Bxy + f(x, y)} = F(x, y).$$

Costruiamo ora la funzione $F^*(x, y)$ definita nella striscia $|x| < \lambda$, nel seguente modo:

$$(5,6,1) \qquad F^*(x, y) = F(x, y) \qquad \text{se } (x, y) \in R,$$

$$(5,6,2) \qquad F^*(0, y) = 0,$$

$$(5,6,3) \qquad F^*(x, y) = F(x, |x|^p), \qquad \text{se } y > |x|^p,$$

$$(5,6,4) \qquad F^*(x, y) = F(x, -|x|^p), \qquad \text{se } y < -|x|^p.$$

*La funzione* F*(x, y) *è continua nella striscia* $|x| \leq \lambda$. Basta far vedere che, fissato $\sigma > 0$, è, in un intorno dell'origine:

$$(5,7) \qquad |F^*(x, y) - F^*(0, 0)| < \sigma.$$

Orbene, se $(x, y) \in R$, è per la (5,6,1) e la (5,6,2)

$$|F^*(x, y) - F^*(0, 0)| = |(Cxy + g(x, y))/(Ax^2 + Bxy + f(x, y))| \leq$$
$$\leq \{|C|\,|x|^{p-1} + |g(x, y)|/x^2\}/A(1 - \varepsilon(\lambda))$$

e per le ipotesi poste, $|x| \leq \delta_0$ con $\delta_0$ sufficientemente piccolo, segue la (5,7).

Se poi $(x, y)$ è fuori di $R$ e $|x| \leq \lambda$ per la (5,6,3) e la (5,6,4) se $\bar{y}$ è l'ascissa del punto di intersezione fra la retta $x = \text{cost.} \leq \lambda$ e la curva $|y| = |x|^p$ è per la (5,7)

$$|F^*(x, y) - F^*(0, 0)| = |F^*(x, \bar{y}) - F^*(0, 0)| < \sigma.$$

*Vogliamo dimostrare che per l'equazione*:

$$(5,8) \qquad \frac{dy}{dx} = F^*(x, y)$$

*esiste un'unica soluzione, definita nell'intorno dell'origine, che soddisfa la condizione* $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$.

Infatti per la supposta continuità della funzione $F^*(x, y)$, l'equazione (5,8) ammette almeno una soluzione passante per ogni fissato punto $(x, y)$ della striscia $x \leq \lambda$. Per l'unicità basta considerare che se $(x,\ y_1)$ ed $(x,\ y_2)$, $y_1 < y_2$, appartengono ad $R$ è

(5,9) $\quad | F^*(x, y_1) - F^*(x, y_2) | = (y_2 - y_1) \, | F^*_y(x, \eta) | \quad$ con $\; y_1 < \eta < y_2$,

ma è

$$| F^*_y(x,\ \eta) | = \left| \frac{Cx + g_y(x,\ y)}{Ay^2 + Bxy + f(x,\ y)} - \frac{F^*_y(x,\ y)(Bx + f_y(x,\ y))}{Ax^2 + Bxy + f(x,\ y)} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|x|} \; \frac{1}{|A|(1 - \varepsilon(\lambda))} \cdot$$

$$\cdot \{ |C| + |g_y(x,\ y)| / x^2 + F(x,\ y)( |B| + 2c \, |x|^{p-1} + |f_y(x,\ y)| / x^2) \}$$

e per la continuità della $F^*(x,\ y)$ e per le ipotesi poste, il secondo e terzo termine a secondo membro, in $\{ \ \}$, sono infinitesimi, inoltre, salvo a rimpiccolire ancora $\lambda$ in modo che $|C| / \{ |A| (1 - \varepsilon(\lambda)) \} < 1$, ciò che è sempre possibile essendo già per la (5,3) $|C| < |A|$, si ha che

$$| F^*_y(x,\ y) | \leq \frac{1}{|x|}$$

e per la (5,9)

(5,10) $$| F^*(x,\ y_1) - F^*(x,\ y_2) | \leq (y_2 - y_1) / |x| .$$

Allo stesso risultato si giunge se almeno uno dei punti $(x,\ y_1)$ ed $(x,\ y_2)$ è fuori di $R$, con $|x| \leq \lambda$, basta prendere, così come è stato precedentemente fatto, sul contorno di $R$ i corrispondenti valori $\bar{y}_1$ ed $\bar{y}_2$ e notare che è

$$| F^*(x,\ y_1) - F^*(x,\ y_2) | = | F^*(x,\ \bar{y}_2) - F^*(x,\ \bar{y}_2) | =$$
$$= (\bar{y}_2 - \bar{y}_1) \, | F^*_y(x,\ \eta) |, \qquad \bar{y}_1 < \eta < \bar{y}_2$$

e quindi la (5,10). Ma se è valida la (5,10) per il teorema di NAGUMO-PERRON [9] vi è un'unica soluzione che soddisfa la (5,8) e la condizione $\lim\limits_{x \to 0} y(x) = 0$. *Questa soluzione, per* x *sufficientemente piccolo, appartiene ad* $R$.

Infatti è

(5,11) $$| F^*(x,\ y) | < p \, |x|^{p-1} .$$

La (5,11) risulta dalla definizione stessa di $F^*(x,\ y)$, poichè,

[9] Cfr. G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, vol. II pag. 101.

essendo

$$| F^*(x, y) | = \left| \frac{Cxy + g(x, y)}{Ax^2 + Bxy + f(x, y)} \right| \leq$$

$$\leq \frac{| C | \cdot | x |^{p-1} + M(1 + \lambda^{2(p-1)})^{1+\mu} \cdot \lambda^{2\mu-p+1} \cdot | x |^{p-1}}{| A | (1 - \varepsilon(\lambda))}$$

si può impiccolire $\lambda$ in modo che

$$| \, | C | + w \, | \, / \, A \, |(1 - \varepsilon) \, | < p, \qquad \text{con } w = M(1 + \lambda^{2(p-1)})^{1+\mu} \lambda^{2\mu-p+1}$$

e quindi la (5,11). Abbiamo allora:

$$- p \, | x |^{p-1} < dy/dx < p \, | x |^{p-1},$$

onde l'enunciato del teorema.

*b*) Notiamo che se dai sistemi (4,5,1) e (4,5,2) passiamo ai sistemi perturbati

(5,12,1) $\qquad \dot{x} = ax^2 + bxy + f(x, y), \qquad \dot{y} = g(x, y);$

(5,12,2) $\qquad \dot{x} = ax^2 + f(x, y), \qquad \dot{y} = g(x, y);$

se $f(x, y)$ e $(x, y)$ soddisfano le ipotesi dichiarate nel n. 1, vale il teorema 1°.

La stessa cosa vale per i sistemi

(5,12,3) $\qquad \dot{x} = - axy - by^2 + f(x, y), \qquad \dot{y} = ax^2 + bxy + g(x, y);$

(5,12,4) $\qquad \dot{x} = (ax + by)(x + y) + f(x, y); \qquad \dot{y} = (ax + by)y + g(x, y);$

(5,12,5) $\qquad \dot{x} = (ax + by) \cdot \lambda x + f(x, y), \qquad \dot{y} = (ax + by)\mu y + g(x, y);$

(5,12,6) $\qquad \dot{x} = a\lambda x^2 + f(x, y), \qquad \dot{y} = a\mu x^2 y + g(x, y);$

(5,12,7) $\qquad \dot{x} = ax^2 + bxy + f(x, y), \qquad \dot{y} = cx^2 + dxy + g(x, y);$

(5,12,8) $\qquad \dot{x} = ax^2 + f(x, y) \qquad \dot{y} = bxy + g(x, y);$

corrispondenti rispettivamente ai sistemi ridotti (4,5,7), (4,5,8), (4,5,10), (4,5,12), (4,5,13), (4,5,14) quando essi siano perturbati con funzioni $f(x, y)$ e $g(x, y)$ soddisfacenti le ipotesi dichiarate nel n. 1.

Lo stesso teorema 1° si può applicare, inoltre ai sistemi:

(5,12,9) $\qquad \dot{x} = bxy + by^2 + f(x, y), \qquad \dot{y} = by^2 + g(x, y);$

(5,12,10) $\qquad \dot{x} = bxy + f(x, y), \qquad \dot{y} = cy^2 + g(x, y);$

ottenuti perturbando i sistemi (4,5,9) e (4,5,11) salvo ora a scambiare l'asse delle $x$ con quello delle $y$.

Possiamo così concludere che *poichè i sistemi elencati con i numeri dal* (5,12,1) *al* (5,12,10) *vale il teorema* 1, *è impossibile che essi diano luogo al centro o al fuoco o al centro-fuoco.*

**6. Studio delle isocline.**

*a*) Riprendiamo in considerazione il sistema (5,1′) che qui per comodità trascriviamo

$$(5,1') \qquad \dot{x} = \alpha x^2 + \beta xy + f(x, y), \qquad \dot{y} = \gamma x^2 + \delta xy + g(x, y);$$

e associamo ad esso la funzione

$$(6,1) \qquad G(x, y) = (\alpha - p\gamma)x^2 + (\beta - p\delta)xy + f(x, y) - pg(x, y),$$

si ha il seguente LEMMA 1:

*Valide le ipotesi enunciate nel* n. 1 *per ogni valore di* p, *con* $|p| \leq \min\{|\alpha|/|\gamma|, |\beta|/|\delta|\}\ (\neq 0)$, *se* $\gamma\delta$ *non è nullo è* p *minore di* $|\alpha|/|\gamma|$ *oppure di* $|\beta|/|\delta|$ *a secondo che* $\delta$ *o* $\gamma$ *è nullo e* p *qualunque se* $\gamma^2 + \delta^2 = 0$, *esiste in un intorno dello origine una ed una sola funzione definita dall'equazioni parametriche:*

$$(6,2) \qquad x = \rho \operatorname{sen} \vartheta_p(\rho), \qquad y = \rho \cos \vartheta_p(\rho)$$

*tale che è soddisfatta l'equazione*

$$G(\rho \operatorname{sen} \vartheta_p(\rho), \rho \cos \vartheta_p(\rho), p) = 0$$

*e la curva definita dalla* (6,2) *ha per tangente in O l'asse delle y.*

Intanto si ha

$$\frac{\partial x}{\partial G(x, y, p)}\Bigg|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0, \quad \frac{\partial G(x, y, p)}{\partial g}\Bigg|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 G(x, y, p)}{\partial x^2}\Bigg|_{\substack{x=0\\y=0}} = 2(\alpha - p\gamma), \quad \frac{\partial^2 G(x, y, p)}{\partial x \partial y}\Bigg|_{\substack{x=0\\y=0}} = (\beta - p\delta), \quad \frac{\partial^2 G(x, y, p)}{dy^2}\Bigg|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0,$$

onde per un teorema di DEDERICK [10] risulta che, per ogni fissato $p$, la curva passa per l'origine con un nodo a due tangenti reali una delle quali è la retta $x = 0$. Che il ramo di curva tangente in $O$ alla retta $x = 0$ abbia proprio la rappresentazione (6,2) è sufficiente notare che se in (6,1) poniamo

$$(6,3) \qquad x = \rho \operatorname{sen} \vartheta, \qquad y = \rho \cos \vartheta$$

[10] Cf. DEDERICK, *The solutions of an equation in two real variables at a point where both the partial derivatives vanish*, Bull. Am. Math. Soc., vol. 16, (1909), pag. 174.

tenuto conto delle ipotesi iii), il problema si riduce a quello di trovare una funzione $\vartheta = \vartheta(\rho)$ che soddisfi l'equazione

$$(6,4) \qquad (\alpha - p\gamma)\,\mathrm{sen}^2\vartheta + (\beta - p\delta)\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cos\vartheta + \\ + \rho\,\{\varphi(\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta,\ \cos\vartheta\} - p\psi(\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta,\ \rho\cos\vartheta)\} = 0$$

e la condizione $\vartheta(0) = 0$.

Ciò facilmente si consegue per il teorema di DINI sulle funzioni implicite tenuto conto che la (6,4) è soddisfatta qualunque sia $|p| < p_0$ per $\vartheta = 0$, $\rho = 0$ e che avendo scelto un angolo $\vartheta_0$ tale che per $|\vartheta| < \vartheta_0$ risulti $|(\alpha - p\gamma)\,\mathrm{sen}\,2\vartheta + (\beta - p\delta)\cos^2\vartheta| > N$, con $N > 0$, si ha per $|\vartheta| < \vartheta_0$, $\rho < \rho_0$, con $\rho_0$ sufficientemente piccolo, e $|p| < p_0$:

$$|\partial G/\partial\vartheta| = |(\alpha - p\gamma)\,\mathrm{sen}\,2\vartheta + (\beta - p\gamma)\cos 2\vartheta + \\ + \rho\,\{\varphi_\vartheta(\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta,\ \rho\cos\vartheta) - p\psi_\vartheta(\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta,\ \rho\cos\vartheta)\}| \geq N - \rho_0\{M + p_0 M\} = d > 0,$$

salvo a diminuire $\rho_0$,

$$|\partial G/\partial\rho| = |\varphi(\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta,\ \rho\cos\vartheta) - p\psi(\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta,\ \rho\cos\vartheta)| + \\ + \rho\,|\varphi_\rho(\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta,\ \rho\cos\vartheta) - p\psi_\rho(\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta,\ \rho\cos\vartheta) > L,$$

con $L$ cost. positiva.

Dalle (6,3) seguono le (6,2). Tenuto conto poi che è

$$\left.\frac{dx}{d\rho}\right|_{\rho=0} = \rho\cos\vartheta(\rho)\left.\frac{d\vartheta(\rho)}{d\rho}\right|_{\rho=0} + \mathrm{sen}\,\vartheta(\rho)\,|_{\rho=0} = 0,$$

$$\left.\frac{dx}{d\rho}\right|_{\rho=0} = -\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta(\rho)\left.\frac{d\vartheta(\rho)}{d\rho}\right|_{\rho=0} + \cos\vartheta\,(\vartheta)\,|_{\rho=0} = 1$$

si ha che effettivamente la retta tangente in $O$ alle curve considerate è l'asse $y$. Inoltre si può diminuire $\rho_0$ in modo che $dy/d\rho > > d_1 > 0$, e ne viene che $y$ è funzione monotona di $\rho$ e quindi possiamo determinare la funzione inversa $\rho = \rho(y)$ e la prima delle (6,2) ci fornisce $x = x(y)$ definita per $|y| \leq \rho_0 \cos\vartheta_0 = l_0$.

Indicheremo con $J$ la famiglia di curve così definite per $|p| < p_0$. Chiameremo isoclina ogni curva $J_p$ della famiglia $J$.

LEMMA 2. - *Se sono soddisfatte le ipotesi più volte richiamate, lungo ogni isoclina* $J_p$ *per* $|y| < l_0$ *è*:

$$(6,5) \qquad \gamma x^2 + \delta xy + g(x,\ y) \neq 0.$$

Infatti se in un punto di $J_p$, distinto da $O$, fosse $\gamma x^2 + \delta xy + + g(x,\ y) = 0$ sarebbe anche $\alpha x^2 + \beta xg + f(x,\ y) = 0$, contro l'ipotesi che il punto $O$ è un punto singolare isolato.

Facilmente si dimostra anche il

LEMMA 3. - *Se è* $p \neq p$, *è* $J_p \cap J_q = O$.

Infatti se un punto, distinto da $O$, fosse comune a $J_p$ e $J_q$ con $p \neq p$, dovrebbe essere $(p - q)(\gamma x^2 + \delta xy + g(x, y)) = 0$ per $(x, y)$ distinto da $(0, 0)$ e ciò è impossibile per il lemma 2.

c) LEMMA 4. - *Per qualunque* $y$, $0 < y \leq l_0$, *la funzione* $x = x(y)$ *definita dal lemma 1, risulta funzione continua e monotona di* $p$, *per* $|p| < p_0$. *Analogamente per* $-l_0 \leq y < 0$.

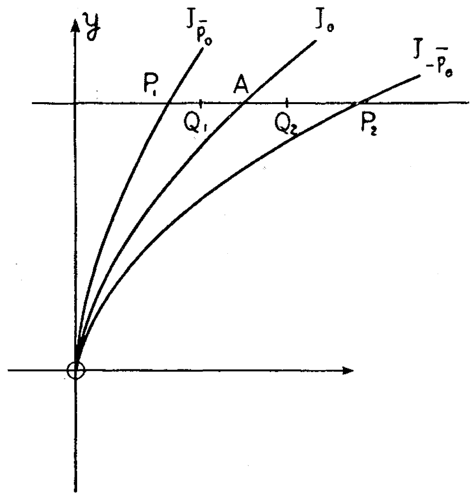


Fig. 7

Conviene considerare le due funzioni [11]

$$P(x, y) = (\alpha x^2 + \beta xy + f(x, y)) / (\gamma x^2 + \delta xy + g(x, y)),$$

$$F(x, y) = (\gamma x^2 + \delta xy + g(x, y)) / (\alpha x^2 + \beta xy + f(x, y)),$$

ciascuna definita in tutti i punti $(x, y)$ in cui le coordinate non annullano i denominatori corrispondenti. Dal lemma 1 e dal lemma 3 si ha che per due punti distinti sulla stessa retta $y = l$ passano una $J_p$ ed una $J_q$, con $p \neq q$, $|p|$ e $|q| \leq p_0$. Consideriamo ora la retta $y = l$, con $0 < l \leq l_0$ e siano $A$, $P_1$ e $P_2$ rispettivamente i punti in cui le $J_0$, $J_{\bar{p}_0}$, $J_{-\bar{p}_0}$, $0 < \bar{p}_0 \leq \bar{p}_0$, intersecano detta retta (cfr. fig. 7). Per il lemma 2 in $A$, $P_1$, $P_2$ è: $xy^2 + \delta xy + g(x, y) \neq 0$, e per la continuità della funzione $\gamma x^2 + \delta xy + g(x, y)$ esisterà un

([11]) Lo studio della funzione $p(x, y)$ nel caso lineare è stato fatto da A. KEIL (cfr. [1]). Per i ragionamenti che seguono la considerazione della funzione $p(x, y)$ è essenziale.

segmento $\overline{Q_1Q_2}$ (ascissa di $Q_1 <$ ascissa di $Q_2$) avente per centro $A$, in cui è soddisfatta la (6,5).

*Vogliamo provare che su tutto* $\overline{P_1P_2}$ *è* $\gamma x^2 + \delta xy + g(x, y) \neq 0$.

Intanto poichè la $J_0$ interseca in $A$ la retta $y = l$ su $\overline{P_1Q_1}$ e su $\overline{P_2Q_2}$ è $\alpha x^2 + \beta xy + f(x, y) \neq 0$ e perciò su $\overline{P_1Q_1}$ e su $\overline{P_2Q_2}$ la funzione $F(x, y)$ è continua.

Se in un punto interno a $\overline{P_1Q_1}$ o a $\overline{P_2Q_2}$ fosse $\gamma x^2 + \delta xy + g(x, y) = 0$ si dovrebbe avere un intorno in cui è: $0 < F(x, y) \leq \leq 1/\bar{p}_0$, e quindi $p(x, l) > \bar{p}_0$ e sul segmento aperto $\overline{P_1P_2}$ un punto in cui è $|p| = \bar{p}_0$ e quindi da due punti del segmento $\overline{P_1P_2}$ passano due isocline con lo stesso valore $\bar{p}$ oppure $-\bar{p}_0$, e ciò è assurdo per il lemma 1 e il lemma 3. Quindi su tutto il segmento $\overline{P_1P_2}$ è $\gamma x^2 + \delta xy + g(x, y) \neq 0$ e la funzione $p(x, l)$ perciò quando $x$ varia tra le ascisse di $P_1$ e $P_2$, è continua.

Inoltre $p(x, y)$ è monotona rispetto ad $x$ in senso stretto.

Infatti se per due punti $(x_1, l)$ ed $(x_2, l)$, $p(x, l)$ assumesse gli stessi valori, si avrebbe che da due punti distinti passano due isocline con gli stessi valori del parametro e ciò è in contrasto con quanto osservato sulla natura delle curve della famiglia $J$.

Le precedenti osservazioni valgono anche quando ci si riferisce alle isocline aventi per tangente in $O$ l'asse $y < 0$.

*d*) Definiamo le due regioni $\Omega^+$ ed $\Omega^-$ nel seguente modo:

$\Omega^+$ la regione dei punti $(x, y)$ compresi fra le $J_{\bar{p}_0}$, $J_{-\bar{p}_0}$ con $0 < y \leq l_0$,
$\Omega^-$ la regione dei punti $(x, y)$ compresi fra le $J_{\bar{p}_0}$, $J_{-\bar{p}}$ con $b \leq -y < 0$.

Dai lemmi enunciati in questo n. segue che *in ciascuna regione vi sono tutte le isocline* $J_p$, $|p| \leq \bar{p}_0$, *ed ivi formano un continuo.*

## 7. Altri teoremi sui sistemi degeneri perturbati.

*a*) TEOREMA, 2°: *Sia dato il sistema* (5,1') *e siano soddisfatte le ipotesi già dichiarate nel n. 1. Si consideri in* $\Omega^+$ $(\Omega^-)$ *la funzione*:

(7,1) $$p(x, y) = (\alpha x^2 + \beta xy + f(x, y)) / (\gamma x^2 + \delta x^2 + g(x, y)).$$

*Se fissato* y, p(x, y) *è una funzione monotona crescente con* x, *le caratteristiche del sistema passanti per un punto interno alla regione* $\Omega^+$ $(\Omega^-)$ *tendono all'origine* $O$.

*Se, fissato* y, *invece la* (2,1) *definisce una funzione monotona decrescente con* x, *le caratteristiche del sistema passanti per un punto* *interno alla regione* $\Omega^+$ ($\Omega^-$) *vi restano un tempo finito ed escono tutte*, *per* $t \to \infty$ *oppure per* $t \to -\infty$, *attraverso la base della regione ed una sola tende all' origine.*

Per dimostrare il teorema consideriamo intanto che le caratteristiche del sistema (5,1') passanti per un punto interno alla regione $\Omega^+$, oppure alla regione $\Omega^-$; esse sono date dall'equazione

$$(7,2) \qquad dy/dx = (\gamma x^2 + \delta xy + g(x, y)) / (\alpha x^2 + \beta xy + f(x, y)),$$

ovvero per la (7,1) e la (7,2), si ha

$$(7,3) \qquad dx/dy = p(x, y).$$

Si possono avere per quanto detto nel n. precedente due casi:

I° caso: *in* $\Omega^+$ *fissato* y, p(x, y) *cresca dai valori negativi a valori positivi al crescere di* x;

II° caso: *in* $\Omega^+$, *fissato* y, p(x, y) *decresca da valori positivi a valori negativi al crescere di* x;
(nella regione $\Omega^-$ varranno le stesse considerazioni che faremo per la regione $\Omega^+$).

*Sia il primo caso:* La curva $J_{-\bar{p}_0}$ è a sinistra di $J_0$ (cfr. fig. 8) e quindi di $J_{\bar{p}_0}$. Consideriamo una $x = x(y)$ soddisfacente le (7,3) che passi per un punto $P$ interno ad $\Omega^+$. Supponiamo che $P$ sia a sinistra di $J_0$. In tale punto la pendenza della caratteristica è data (7,3) e quindi, nell'ipotesi in cui ci siamo messi, la funzione $x = x(y)$ sarà crescente in $x$ al decrescere di $y$. La pendenza data da (7.3) aumenterà fino a che la curva $x = x(y)$ non intersechi la $J_0$ ove la tangente alla caratteristica sarà verticale.

La caratteristica non può avere punti a comune con $J_0$ distinti da 0, poichè si avrebbe, se $S$ fosse il punto a comune alla caratteristica e all'isoclina, $S \neq O$, che in $S$ la caratteristica passerebbe a destra di $J_0$ stessa con un punto cuspidale ed $S$ sarebbe un punto singolare contro l'ipotesi che il punto $O$ sia singolare isolato nell'intorno considerato dell'origine.

Quindi tutte le curve $x = x(y)$ soluzioni della (7,3) che passano per un punto della regione $\Omega^+$, in questa nostra ipotesi ($p(x, y)$ crescente in $x$) tendono all'origine per $t \to +\infty$ oppure per $t \to -\infty$.

*Sia il secondo caso:* La curva $x = x(y)$, soddisfacente la (7,3) passi per un punto $P$ interno ad $\Omega^+$ e sia a sinistra di $J_0$. In tale caso si avrà che la pendenza della caratteristica, dalla (7,3), è positiva e quindi la funzione $x = x(y)$ è una funzione crescente al crescere di $y$. Se $P_1$ e $P_2$ sono i punti in cui rispettivamente

$J_{\bar{p}_0}$ e $J_{\;\bar{p}_0}$ intersecano la retta $y = l$ ed è $A$ il punto in cui $J_0$ interseca detta retta si ha che la caratteristica esce dalla regione per un punto $K_1$, appartenente al segmento $\overline{P_1A}$, quando $t \rightarrow +\infty$ oppure $t \rightarrow +\infty$. Analogamente una caratteristica che si trovi a

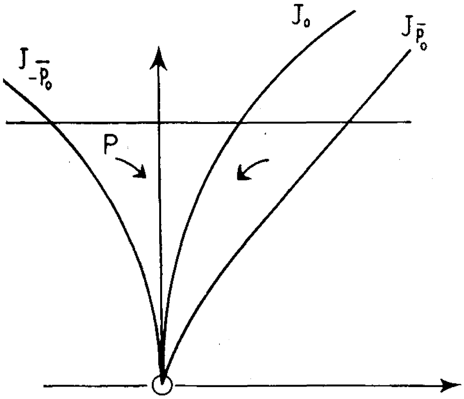


Fig. 8

destra di $J_0$ esce, quando $t \rightarrow +\infty$ oppure $t \rightarrow -\infty$, da un punto $K_2$ appartenente al segmento $\overline{AP_2}$. I punti $K_1$ empiono un segmento $\overline{P_1Q_1}$ aperto a destra e i punti $K_2$ empiono un segmento $\overline{Q_2P_2}$ aperto a sinistra poichè non è possibile, per i ragionamenti fatti precedentemente, che le caratteristiche intersechino $J_0$. Fra i due segmenti $\overline{P_1Q_1}$ e $\overline{Q_2P_2}$ vi è almeno un punto $T$ che non è nè un $K_1$ nè un $K_2$ e la caratteristica passante per esso tende all'origine. Non vi può essere che una sola caratteristica tendende all'origine. Se infatti ve ne fossero due, ad esempio $x = x_1(y)$ ed $x = x_2(y)$ con $x_1(\eta) < x_2(\eta)$, dovrebbe essere $x_1(y) < x_2(y)$, per $0 < y \leq \eta$, ed anche per la proprietà della regione considerata: $x_1'(y) > x_2'(y)$ ed integrando quest'ultima fra $y$ ed $\eta$ si ha: $x_1(\eta) - x_2(\eta) > x_1(y) - x_2(y)$, cioè facendo tendere $y \rightarrow 0$ si deduce l'assurdo $x_1(\eta) > x_2(\eta)$.

*b*) notiamo che per i sistemi perturbati indicati nel n. 5 con i numeri dal (5,12,1) al (5,12,10) e ottenuti perturbando, come si è detto, rispettivamente i sistemi ridotti (4,5,1), (4,5.2), (4,5,7), (4,5,8), (4,5,10), (4,5,13), (4,5,14), (4,5,9), (4,5,11), sono soddisfatte le ipotesi del teorema 2, per ciascuno di essi è quindi valido il risultato di detto teorema e, riassumendo, abbiamo il seguente

TEOREMA 3 – *Per i sistemi enumerati da* (5,12,1) *a* (5,12,10) *nelle ipotesi dichiarate nel* n. 1 : i) *esiste una sola caratteristica tangente all'asse delle* x *in* 0 (teorema 1); ii) *esiste una caratteristica o un pennello di caratteristiche tangenti in* 0 *all'asse delle* y (teorema 2).

*c*) Vogliamo ora notare che *il teorema 2 si applica ai sistemi*:

$$\dot{x} = -axy - by^2 + f(x, y), \quad \dot{y} = ax^2 + bxy + g(x, y), \quad ab \neq 0 \tag{7,4}$$

$$\dot{x} = (ax + by)(\lambda x - \mu y) + f(x, y), \quad \dot{y} = (ax + by)(\mu x + \lambda y) + g(x, y), \quad a^2 + b^2 \neq 0, \ \lambda\mu \neq 0, \tag{7,5}$$

*ottenuti perturbando i sistemi* (4,5,5) e (4,5,6) *con funzioni* f(x, y) *e g*(x, y) *soddisfacenti le ipotesi dichiarate nel* n. 1.

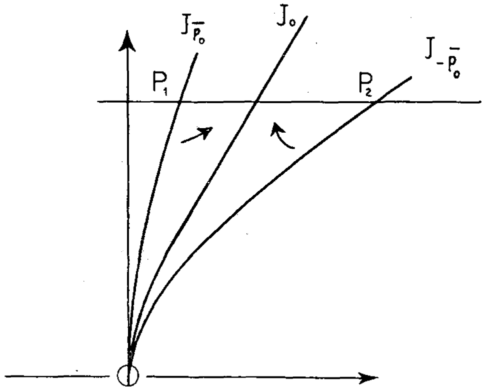


Fig. 9

Invero dai sistemi (7,4) e (7,5) si passa mediante la trasformazione affine $x_1 = ax + y$, $y_1 = y$ (avendo supposto senza alterare le generalità, che in (7,4) e (7,5) sia $b=1$) rispettivamente ai sistemi:

$$\dot{x} = x^2/a - (a + 1/a)xy + f(x, y), \quad \dot{y} = x^2/a - xy/a + g(x, y); \tag{7,6,1}$$

$$\dot{x} = (\lambda + \mu/a)x^2 - 2\mu axy + f(x, y), \quad \dot{y} = \mu x^2/a + (\mu a + \lambda)xy + g(x, y); \tag{7,6,2}$$

per i quali è valido il teorema 2.

*d*) Inoltre anche *per il sistema*:

$$\dot{x} = bxy + f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y), \tag{7,6,3}$$

*ottenuto perturbando il sistema* (4,5,3), *con le solite ipotesi, è valido il teorema.*

Noteremo anche che se nella funzione $G(x, y, p)$ definita in 6,1) si fa $x = \gamma = \delta = 0$, $\beta = b$ e scambiando $x$ con $y$, con gli stessi ragionamenti del lemma 1, si ottiene

LEMMA 4: *soddisfatte le ipotesi poste, per ogni valore di* p, *con* $|p| < p_0$, *esiste in un intorno dell'origine una ed una sola funzione, definita dalle equazioni parametriche:*

$$x = \rho \cos \vartheta_p(\rho), \qquad y = \rho \operatorname{sen} \vartheta_p(\rho) \tag{7,7}$$

*tale che soddisfa l' equazione*

$$b \cos \vartheta \operatorname{sen} \vartheta + \rho \{ \varphi(\rho \cos \vartheta, \rho \operatorname{sen} \vartheta) - p\psi(\rho \cos \vartheta, \rho \operatorname{sen} \vartheta) \} = 0,$$

*e la curva definita dalla* (7,7) *ha per tangente in O l' asse della* x.

Se indichiamo con $J'$ la famiglia di curve definite dall'equazioni (7,7) si ha che per essa sono validi i lemmi 2, 3, 4 del n. 6.

Indichiamo con $\Omega_1^+$ ed $\Omega_1^-$ le due regioni definite nel seguente modo: $\Omega_1^+$ la regione dei punti compresi fra $J'_{p_0}$, $J'_{-p_0}$, con $0 < x \leq l_0$, $\Omega^-$ la regione dei punti compresi fra $J'_{p_0}$, $J'_{-p_0}$, con $-l_0 \leq -x < 0$, ove $l_0 = \rho_0 \cos \vartheta_p(\rho)$.

Si ha il seguente teorema 4:

*Dato il sistema* (7,6,3), *nel piano* (x, y), *nelle ipotesi poste, nelle due regioni* $\Omega_1^+$ ed $\Omega_1^-$ *nessuna caratteristica passante per un loro punto interno tende ad* O. (caso iperbolico).

Per la dimostrazione del teorema consideriamo ancora le (7,2) e (7,3) che ora nel caso si scrivono

$$dy/dx = g(x, y) / (bxy + f(x, y)) \tag{7,2'}$$

$$dx/dy = p(x, y). \tag{7,3'}$$

Consideriamo la regione $\Omega_1^+$ (analogo è il ragionamento nella regione $\Omega_1^-$). Scegliamo $p_1$, con $0 < p_1 \leq p_0$ ed anche $0 < p_1 < 1$, e della regione $\Omega_1^+$ consideriamo solo la porzione $w^+$ compresa fra $J'_{p_1}$, $J_{-p_1}$, $0 < x \leq l_0$. Se una caratteristica passa per un punto interno ad $w^+$ non può tendere all' origine restando in $w^+$. Infatti in tal caso si dovrebbe avere $dy/dx \to 0$, mentre da come si è definita la regione $w^+$ e dalla (7,3) risulta $|dx/dy| < 1$. Quindi una caratteristica di equazione $x = x(y)$, passante per un punto interno a detta regione resta in essa per un tempo finito.

Se questa caratteristica interseca la $J_0'$ vi sarà un punto di massimo o minimo della funzione $x = x(y)$ secondo che la funzione, fissato $x$, $p(x, y)$ è monotona crescente o decrescente con $y$.

*e*) Per la dimostrazione completa che il sistema generale (1,8), nelle ipotesi poste non dia luogo a un centro nè a un fuoco, o a un centro-fuoco resta da studiare il sistema

$$\dot{x} = by^2 + f(x, y), \qquad \dot{y} = g(x, y), \tag{7,6,4}$$

ottenuto perturbando, con funzioni $f(x, y)$ e $g(x, y)$ soddisfacenti le ipotesi dichiarate nel n. 1, il sistema (4, 5, 4). Però qui ci limitiamo ad osservare che se in un intorno sufficientemente piccolo dell'origine si ha $g(x, y)$ sempre dello stesso segno di $b$, è impossibile che esso dia luogo ad un centro o ad un fuoco o centro-fuoco ([12])

*f*) Conviene infine notare che se il sistema (1,8) è della forma

$$(7,8) \qquad \dot{x} = ax^2 + bxy + cy^2 + f(x, y), \qquad \dot{y} = ax^2 + bxy + cy^2 + g(x, y)$$

con $b^2 - 4ac < 0$, il suo sistema ridotto $\dot{x} = ax^2 + bxy + cy^2$, $\dot{y} = ax^2 + bxy + cy^2$, per i risultati del II cap. di E.D.N.L. presenta angoli normali del II tipo relativo ai raggi invarianti di anomalia $\vartheta = \pi/4$ e $\vartheta = 3\pi/4$ ai quali, per i risultati del V cap. di E.D.N.L., corrispondono per il sistema (7,8) rispettivamente dei settori normali del II tipo.

## BIBLIOGRAFIA

Una ricca e completa bibliografia è in

G. Sansone - R. Conti, *Equazioni differenziali non lineari* « Monografie matematiche del C.N.R. », Roma, 1956.

Opera a cui ci siamo riferiti più volte nel corso di questo lavoro indicandola come si è detto solo con E.D.N.L.; ricorderemo qui:

[1] A. Keil, *Das qualitative Verhalten der Integralcurven einer gewönlichen Differentialgleichungen erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes*, « Jahr. Deutsch. Math. Verein », 57 (1955); III-132.

[2] L. S. Liaghina, *Le curve integrali dell'equazioni* « Uspehi Matem. Nauh », V. 2 (42), (1951), 171-183 (russo)

Lavori che sono in diretto collegamento con questo. Per altri lavori pubblicati successivamente confronta:

[3] S. Barocio, *On certain critical points of a differential system in the plane.* « Contributions to theory of non-linear oscillation, ed. by S. Lefschetz », Princeton, 1956, pag. 127-136).

[4] N. A. Gubar, *Comportamento delle caratteristiche per un sistema di equazioni differenziali con un punto singolare mediante sistemi vicini con punti singolari « grossier »*, Matem. Sbornik 40, (82), (1956), pag. 23 (russo).

([12]) Per alcuni esempi di sistemi degeneri perturbati e il comportamento delle rispettive caratteristiche cf. M. Frommer, *Die Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichun erster Ordnung in der Umgebung rationaler Unbestimmtheitsstellen*, Math. Annalen, 99 (1928) pp. 222-272. Esattamente a pag. 234 e fig. 4 per il sistema $\dot{x} = x^6 - 6xy^2 + y^4$, $\dot{y} = xy - 3y^2$, (si è scambiato il comportamento rispetto all'asse delle $x$ con quello rispetto all'asse delle $y$) ed a pag. 269-270 e fig. 23 per il sistema $\dot{x} = xy$, $\dot{y} = -4y^4 + 5y^2x^4 - x^8$. Altri esempi di sistemi perturbati di sistemi ridotti degeneri son in E. D. N. L. cfr. così ad esempio a pag. 85 e fig. 23 per il sistema $\dot{x} = x^2 - x^4 - y^4$, $\dot{y} = xy(1 + 2x^2 + 2y^2)$.