Bollettino
Unione Matematica Italiana

Luigi Caprioli

# Sulla attenuazione nelle guide circolari con pareti assorbenti.

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **12** (1957), n.4, p. 526–534.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_4_526_0>

# Sulla attenuazione nelle guide circolari con pareti assorbenti.

Nota di LUIGI CAPRIOLI (a Bologna)

**Sunto.** - *Ricondotto lo studio dei modi che possono propagarsi in una guida d'onda circolare con pareti assorbenti alla risoluzione di un'equazione trascendente nel campo complesso, si determina l'attenuazione dei modi stessi per valori della frequenza prossimi o uguali a quelli critici.*

**Summary.** - *The study of modes is reduced to detection of complex roots of the trascendental equation and the attenuation constant due to finite conductivity of the circular waveguide walls is calculated for frequency-values near or equal to cutoff frequencies.*

**1.** L'attenuazione che l'assorbimento delle pareti determina nei modi che possono propagarsi in una guida d'onda può calcolarsi, come è noto, partendo dall'equazione esprimente il bilancio (relativo ad un tronco elementare della guida) dell'energia del campo, supposta, in prima approssimazione, identica a quella (fittizia) che si avrebbe in assenza di assorbimento. L'attenuazione risulta così proporzionale al rapporto fra il flusso (medio in un periodo) di energia del campo fittizio attraverso la parete del tronco e l'analogo, $\Phi$, relativo alla sezione della guida stessa (1).

Ora, l'ipotesi qui citata (in cui si ammette, in sostanza, che, per valori sufficientemente grandi della conducibilità delle pareti (dell'ordine, per es., di quella dei metalli usuali), sia trascurabile rispetto a $\Phi$ la differenza fra la stessa $\Phi$ e il flusso del campo effettivo) è indubbiamente lecita per frequenze sufficientemente diverse da quelle critiche (in quanto è, allora, notoriamente, $\Phi \neq 0$); ma non è più tale quando la frequenza di lavoro tende ad un valore critico generico, poichè, in tal caso, il flusso $\Phi$ tende anch'esso allo zero. Appaiono dunque, presumibilmente, poco attendibili i valori della attenuazione cui si perviene, col procedimento qui ricordato (2), in prossimità delle frequenze critiche.

Nè, d'altra parte, mi risulta che tale questione sia stata posta nel necessario rilievo in altre ricerche (3), nelle quali, valendosi

(1) Cfr. ad es., H. R. L. LAMONT, *Guide d'onda*, « Ed. Univ. », Firenze, 1955, Cap. III.

(2) Vedi LAMONT, op. cit.; ed anche: N. MARCUVITZ, *Waveguide Handbook*, « M. I. T. », Mc Graw Hill, New-York, 1951, Cap. II.

(3) R. MÜLLER, « *Über Stabilität und Dampfung von Rohrwellen elektrischen und magnetischen Typs gleicher Grenzfrequenz*, « Zeitschr. fur

della teoria delle perturbazioni, si determina, in prima approssimazione, come venga a modificarsi il campo in una guida quando alle condizioni caratteristiche dei conduttori perfetti si sostituisca quella (di SCHELKUNOFF) relativa ai buoni conduttori.

Oggetto di questa nota è appunto l'esame del problema or ora accennato, limitatamente, per ragioni di brevità, alle guide circolari [4]: provato, anzitutto, che la determinazione del campo in una guida con pareti assorbenti può, nell'ipotesi di SCHELKUNOFF, ricondursi alla risoluzione di un'equazione trascendente nel campo complesso, determino poi, per i vari modi possibili, espressioni dell'attenuazione che comprendono quelle più sopra citate, se le frequenze sono molto diverse da quelle critiche; e sono atte, inoltre, a fornirne i valori per frequenze prossime o uguali a quelle critiche.

**2.** Considero una guida cilindrica indefinita, di sezione normale $\sigma$ qualsivoglia; indico con $\boldsymbol{k}$ il versore di propagazione (asse $z$), parallelo alle generatrici della guida, con $\boldsymbol{t}$ ed $\boldsymbol{n}$ i versori tangente e normale, rispettivamente, al contorno $s$ di $\sigma$, costituenti, nell'ordine, una terna destra. Il mezzo interno, omogeneo, è un dielettrico perfetto di permeabilità $\mu$ e costante dielettrica $\varepsilon$; quello costituente le pareti, pure omogeneo, ha conducibilità finita $\gamma$ e permeabilità $\mu_c$. Ammetto inoltre che i componenti superficiali $\boldsymbol{E}_\Sigma$, $\boldsymbol{H}_\Sigma$ dei vettori (complessi) del campo (armonico, di pulsazione $\omega$) soddisfino in ogni punto della superficie interna della parete la ben nota relazione (di SCHELKUNOFF [5]).

$$\boldsymbol{E}_\Sigma = Z\boldsymbol{H}_\Sigma \wedge \boldsymbol{n}, \tag{1}$$

Naturforsch. », Bd. 4, 1949, p. 218. V. M. PAPADOPOULOS, *Propagation of electromagnetic waves in cylindrical wave-guides with imperfectly conducting walls*, « Quart. Journ. of. Mech. and Appl. Math. », vol. VII, 1954, p. 326. A. E. KARBOWIAK, *Theorie of imperfect Waveguides: the effect of walls impedence*, « P. I. E. E. », Part. B, vol. 102, 1955, p. 698.

(4) Non è difficile estendere tale esame anche a guide rettangolari e, valendosi di un metodo più generale, anche a guide di sezione generica.

(5) S. A. SCHELKUNOFF, *The Impedence Concept and Its Applications to Problems of Reflection, Refraction, Shielding and Power Absorption*, « Bell. Syst. Tech. Journ. », vol. XVII, 1938, p. 17. « Electromagnetic Waves », Van Nostrand, New-York, 1943. p. 320. A proposito di questa condizione, rileviamo qui che essa si ritrova anche studiando il campo con metodi più generali, come è stato provato, sia pure in casi di guide particolari, da M. DE SOCIO, *Sulle condizioni al contorno per le guide imperfettamente conduttrici*, « Acc. Naz. dei Lincei », S. VIII, vol. XX, 1956, p. 469. *Sulla rappresentazione del campo elettromagnetico in una guida a pareti assorbenti*, « Acc. Naz. dei Lincei », S. VIII, vol. XVI, p. 63.

dove è posto

$$Z = R(1+i), \quad \left(R = \sqrt{\frac{\mu_c \omega}{2\gamma}}\right). \tag{2}$$

Indicato con $\omega\alpha$ ($\alpha$, complesso) il coefficiente di propagazione del campo di pulsazione $\omega$ e posto

$$\omega^2 \varepsilon\mu - (\omega\alpha)^2 = h^2 \quad (\neq 0), \tag{3}$$

i componenti trasversali $\boldsymbol{E}_t$, $\boldsymbol{H}_t$ dei vettori del campo sono esprimibili, come è noto ([6]), con le relazioni:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_t &= \frac{1}{h^2}[-i\omega\alpha \operatorname{grad} E_z - i\omega\mu \operatorname{grad} H_z \wedge \boldsymbol{k}], \\ \boldsymbol{H}_t &= \frac{1}{h^2}[-i\omega\alpha \operatorname{grad} H_z + i\omega\varepsilon \operatorname{grad} E_z \wedge \boldsymbol{k}], \end{aligned} \tag{4}$$

mentre le componenti longitudinali $E_z$, $H_z$ devono essere soluzioni delle equazioni

$$\begin{aligned} \Delta E_z + h^2 E_z &= 0 \\ \Delta H_z + h^2 H_z &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

e verificare le condizioni al contorno

$$\begin{aligned} h^2 Z H_z &= -i\omega\alpha \frac{\partial E_z}{\partial t} + i\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial n} \\ h^2 E_z &= Z\left(i\omega\alpha \frac{\partial H_z}{\partial t} + i\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial n}\right) \end{aligned} \tag{5'}$$

conseguenti alla (1).

Oggetto di questa ricerca è, come è stato detto nel n. 1, il calcolo della attenuazione

$$\beta = \Im[\omega\alpha] = \Im[\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - h^2}] \quad ([7]) \tag{7}$$

del campo (cfr. rel. (3)); tale calcolo potrà farsi mediante la (7) stessa, una volta noti i valori della costante complessa $h^2$.

**3.** Assunte le coordinate polari piane $\rho$, $\theta$ con polo nel centro del cerchio $\sigma$ (di raggio $a$), le (5) si riducono entrambe ad una equazione di Bessel le cui soluzioni regolari per $\rho = 0$ sono esprimi-

([6]) Cfr. ad es., D. Graffi, *Le guide d'onda*, « Sem. Mat. e Fis. di Milano », vol. XX, 1950.

([7]) Il simbolo $\Im[z]$ denota qui, come di consueto, il coefficiente della parte immaginaria del complesso $z$.

bili mediante le serie

$$
(8) \qquad
\begin{aligned}
E_z(\rho,\ \theta) &= \sum_0^\infty{}_n J_n(h_n\rho)[F_n \cos n\theta + G_n \operatorname{sen} n\theta], \\
H_z(\rho,\ \theta) &= \sum_0^\infty{}_n J_n(h_n\rho)[K_n \cos n\theta + L_n \operatorname{sen} n\theta] \quad \text{[8]}
\end{aligned}
$$

dove $J_n$ è la funzione di Bessel di prima specie e d'ordine $n$; $h_n$ una costante complessa, definita sempre dalla (3) (ove è ora da indicarsi con $\omega\alpha_n$, in luogo di $\omega\alpha$, la costante di propagazione del modo di indice $n$); e, infine, $F_n$, $G_n$, $K_n$, $L_n$, quattro costanti.

Tenuto conto delle (8) le condizioni al contorno (5′) si riducono alle seguenti identità (rispetto alla variabile $\theta$):

$$
\begin{aligned}
& h_n^2 Z \sum_0^\infty{}_n J_n(h_n a)[K_n \cos n\theta + L_n \operatorname{sen} n\theta] \equiv \\
& \quad \equiv -\frac{i\omega\alpha}{a} \sum_0^\infty{}_n nJ_n(h_n a)(G_n \cos n\theta - F_n \operatorname{sen} n\theta) + \\
& \quad + i\omega\mu \sum_0^\infty{}_n h_n J_n'(h_n a)(K_n \cos n\theta + L_n \operatorname{sen} n\theta), \\
& h_n^2 \sum_0^\infty{}_n J_n(h_n a)(F_n \cos n\theta + G_n \operatorname{sen} n\theta) \equiv \\
& \quad \equiv \frac{i\omega\alpha}{a} Z \sum_0^\infty{}_n nJ_n(h_n a)(L_n \cos n\theta - K_n \operatorname{sen} n\theta) + \\
& \quad + i\omega\varepsilon Z \sum_0^\infty{}_n h_n J'(h_n a)(F_n \cos n\theta + G_n \operatorname{sen} n\theta).
\end{aligned}
$$

Esse equivalgono ai sistemi (indichiamo con $J_n$, $J_n'$ i valori delle rispettive funzioni calcolate nel punto $h_n a$):

$$
(9) \qquad
\left\{
\begin{aligned}
& (h_n^2 Z J_n - i\omega\mu h_n J_n')K_n && - n\frac{i\omega\alpha}{a} J_n G_n = 0 \\
& \qquad - n\frac{i\omega\alpha}{a} Z J_n K_n && + (h_n^2 J_n - i\omega\varepsilon h_n Z J_n')G_n = 0 \\
& \qquad - n\frac{i\omega\alpha}{a} J_n F_n && + (h_n^2 Z J_n - i\omega\mu h_n J_n')L_n = 0 \\
& (h_n^2 J_n^2 - i\omega\varepsilon h_n Z J_n')F_n && - n\frac{i\omega\alpha}{a} Z J_n L_n = 0 \\
& && (n = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots),
\end{aligned}
\right.
$$

ciascuno dei quali si spezza in due: l'uno nelle sole variabili $K_n$, $G_n$, l'altro nelle sole $F_n$, $L_n$; ed entrambi aventi lo stesso deter-

[8] Cfr., ad es., Lamont, op. cit., p. 38.

minante dei coefficienti (9)

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} h_n^2 Z J_n - i\omega\mu h_n J_n' & -n \frac{i\omega\alpha}{a} J_n \\ -n \frac{i\omega\alpha}{a} Z I_n & h_n^2 J_n - i\omega\varepsilon h_n Z J_n' \end{vmatrix} .$$

I campi che possono sussistere nella guida qui in esame sono dunque quelli definiti dalle (5), (5′) per valori della costante $h$ uguali alle radici $h_n$ delle equazioni

$$(11) \qquad \Delta_n = 0 \qquad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots),$$

ciascuna delle quali costituisce la condizione sotto cui il relativo sistema (8) è verificato per valori non tutti nulli delle quantità $F_n$, $G_n$, $K_n$. $L_n$. Esaminiamo qui di seguito, separatamente, il caso di $n = 0$ (campi simmetrici) e quelli di $n \neq 0$ (campi dissimmetrici).

4. Per $n = 0$ la (10) si spezza nelle due equazioni (trascendenti)

$$(12) \qquad h_0 J_0 - i\omega\varepsilon Z J_0' = 0,$$

$$(13) \qquad h_0 Z J_0 - i\omega\mu J_0' = 0,$$

tra loro evidentemente incompatibili (10): A valori di $h_0$ soluzioni della (12) debbono associarsi (cfr. (9)) valori nulli delle costanti $K_0$, $L_0$; e si hanno così modi $TM$; e, analogamente, modi $TE$ corrispondono alle soluzioni di (13).

Esaminiamo ora la (12): se è $Z = 0$ essa si riduce alla $J_0(h_0 a) = 0$ le cui radici sono, se $z_0^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ è il generico zero della funzione $J_0$, $h_0^{(i)} = \frac{z_0^{(i)}}{a}$; se è $Z \neq 0$, ma sufficientemente piccolo, come soluzioni di (12) potranno assumersi, in prima approssimazione, le

$$(14) \qquad h^{(i)} = h_0^{(i)} + \xi^{(i)},$$

(9) Si ritrovano così risultati ben noti; ad es.; un modo $TM$ (o $TE$) di una guida perfetta si modifica, in presenza di pareti assorbenti, in un campo i cui vettori elettrico e magnetico hanno entrambi componenti longitudinali diverse da zero.

Mentre due modi $TE_0$, $TM_1$, che nella guida perfetta hanno la stessa costante di propagazione, si riducono, in presenza di assorbimento da parte delle pareti, a due campi non trasversali (cioè con entrambe le componenti $E_z$, $H_z$ diverse da zero) ed aventi diverse costanti di propagazione (Cfr. ad es., a tale proposito, i lavori citati in nota (3) ed anche: M. De Socio, *Sull'instabilità delle onde elettromagnetiche in una guida a pareti non perfettamente conduttrici*, « Mem. Acc. delle Scienze di Bologna », S. X, T. X, 1952-53, p. 47).

(10) È, infatti, $\varepsilon Z^2 - \mu \neq 0$.

dove $\xi^{(i)}$ è la generica radice dell'equazione

$$\omega\varepsilon R(i-1)J_0'(h_0^{(i)}a) = \xi^{(i)}h_0^{(i)}aJ_0'(h_0^{(i)}a), \tag{14'}$$

che segue dalla (12), tenendo presenti le (14), (2) e conservando i soli termini di primo ordine in $\xi^{(i)}$ ([11]). Si ha così:

$$\xi^{(i)} = \frac{\omega\varepsilon R}{ah_0^{(i)}}(i-1) \tag{15}$$

e, detta $\beta_{0M}^{(i)}$ l'attenuazione ed $\omega\alpha_{0M}^{(i)}$ la costante di propagazione $(\omega\alpha_{0M}^{(i)} = \omega^2\varepsilon\mu - h_0^{(i)}a)$, per le (7), (14):

$$\beta_{0M}^{(i)} = \Im\left[\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - h_0^{(i)2} - 2\frac{\omega\varepsilon R}{a}(i-1)}\right]. \tag{16}$$

Se la pulsazione di lavoro è diversa da quella critica (relativa s'intende, al caso di pareti perfettamente conduttrici: $\omega_0^{(i)} = \frac{h_0^{(i)}}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$), cioè se risulta $\omega^2\varepsilon\mu - h_0^{(i)2} = \left(\omega\alpha_{0M}^{(i)}\right)^2$ sufficientemente grande, dalla (16) segue subito, sviluppando il radicale, la relazione

$$\beta_{0M}^{(i)} = \frac{\varepsilon R}{a\alpha_{0M}^{(i)}}, \tag{17}$$

in accordo con i risultati ottenibili col procedimento energetico o per altra via ([12]). Dalle (7), (14), (17) è immediato il calcolo della variazione $\Delta v_M$ che subisce, per effetto della imperfetta conducibilità delle pareti, la velocità di fase rispetto al valore $v_M$ che essa avrebbe nel caso di pareti perfettamente conduttrici: si ha, infatti:

$$\Delta v_M = -\frac{\varepsilon R}{a\omega}v_M^3, \tag{18}$$

[11]) Ovviamente, si considerano dello stesso ordine le quantità $\xi^{(i)}$, $R$ e trascurabili rispetto alle loro prime potenze, quelle superiori ed i prodotti. Un'idea dell'ordine di grandezza dei termini trascurati può aversi considerando, in un caso concreto, il rapporto fra un termine $\omega\varepsilon aJ_0''(h_0^{(i)}a)R\xi^{(i)}$ di secondo ordine trascurato e quello $h_0^{(i)}aJ_0'(h_0^{(i)}a)\xi^{(i)}$ del primo ordine (della (14')): assunto, ad es., $a = 2\cdot 10^{-2}m$, $\omega = 2\pi\cdot 10^{10}\,\text{sec}^{-1}$ (la pulsazione critica è quì $\cong 3{,}6\cdot 10^{10}\,\text{sec}^{-1}$) e supposta la guida di rame, cioè $R \cong \pi\cdot 10^{-2}$ (cfr. MARCUVITZ, op. cit., tab. 1.2, pag. 28), l'ordine di tale rapporto è di circa $6\cdot 10^{-5}$, indipendentemente dai valori di $h_0^{(i)}a$.

([12]) Cfr., ad es., LAMONT, op. cit. p. 70, relazione 3.14; MARCUVITZ, op. cit. p. 67, relaz. 20; si osservi, infatti, che è

$$\frac{\varepsilon R}{a\alpha_{0M}} = \frac{\varepsilon R}{a}\frac{1}{\sqrt{\frac{\omega^2\varepsilon\mu}{\omega^2} - \frac{h_0^2}{\omega^2}}} = \frac{\varepsilon R}{a\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{R}{a\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}.$$

Vedi anche: KARBOWIAK, op. cit., formole 67, 78;

Supponiamo ora che la pulsazione $\omega$ sia assai prossima (o uguale) a quella critica, cioè che si abbia $\omega^2\varepsilon\mu - h_0^{(i)2} \cong 0$; detto $\beta_{CM}^{(i)}$ il valore della costante $\beta$ in tale ipotesi, si ha, in luogo della (17), la

$$\beta_{CM}^{(i)} = \Im\left[\sqrt{-2\frac{\omega\varepsilon R}{a}(i-1)}\right] = \sqrt{\frac{\omega R\varepsilon}{a}(\sqrt{2}-1)}, \tag{17'}$$

che fornisce l'attenuazione per frequenze prossime, o uguali, a quelle critiche. Tale attenuazione è dunque finita, in corrispondenza delle frequenze critiche, secondo quanto si è detto nel n. 1 ([13]). Quanto alla velocità di fase, essa assume in questo caso il valore

$$\sqrt{\frac{\omega a}{R\varepsilon(\sqrt{2}+1)}}. \tag{18'}$$

Partendo dalla (13) e con procedimento del tutto analogo a quello or ora descritto, dopo aver posto

$$h^{(i)} = k_0^{(i)} + \eta^{(i)},$$

dove $k_0^{(i)}a$ $(i = 1, 2, ...)$ sono gli zeri della funzione $J_0'$, si ha l'equazione

$$k_0^{(i)}R(1-i)J_0(k_0^{(i)}a) = \eta^{(i)}\omega\mu a J_0''(k_0^{(i)}a),$$

in cui sono trascurati, come al solito, i termini di ordine superiore al primo ([14]). Segue dunque che è

$$\eta^{(i)} = \frac{k_0^{(i)}R}{\omega\mu a}(i-1)$$

e si ha, per l'attenuazione delle onde $TE_0$, l'espressione

$$\beta_{0E} = \Im\left[\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - k_0^{(i)2} - \frac{2k_0^{(i)2}R}{\omega\mu a}(i-1)}\right],$$

da questa segue, se la pulsazione di lavoro è diversa da quella critica $\omega_c^{(i)} = \dfrac{k_0^{(i)}}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, cioè se $\omega^2\varepsilon\mu - k_0^{(i)2} = (\omega\alpha_{0E}^{(i)})^2$ è sufficientemente

([13]) Di notevole interesse, anche tecnico, è il confronto dei risultati forniti da (16) con quelli delle (17), (17'), al fine di stabilire in quale intorno della frequenza critica viene meno la validità (s'intende, nei limiti della approssimazione adottata) dei risultati deducibili dalla (17), quali, ad es., la attenuazione e la pulsazione di minima attenuazione. Ma su ciò non insistiamo qui.

([14]) Anche qui, come nel caso precedente delle onde $TM_0$, il rapporto $\dfrac{RJ_0(k_0^{(i)}a)}{\omega\mu a J_0''(k_0^{(i)}a)}$ fra un termine trascurato del secondo ordine ed uno del primo è molto piccolo (rispetto all'unità): esso è infatti, con i dati di nota (10), ed indipendentemente dai valori di $k_0^{(i)}a$, dell'ordine di $2 \cdot 10^{-5}$.

grande, l'altra

$$\beta_{0E} \cong \frac{k_0^{(i)2} R}{\omega^2 \alpha_{0E}^{(i)} a},$$

anch'essa in accordo con formole ottenute con altri metodi ([15]).

Per pulsazioni prossime o uguali a quella critica, l'attenuazione vale invece (cfr. (17')):

$$\sqrt{\frac{\omega_0^{(i)2} \varepsilon R}{\omega a}} (\sqrt{2} - 1).$$

**5.** Nei casi dissimmetrici ($n \neq 0$) la (11) assume la forma

$$(19) \qquad \begin{aligned} h^4 Z J_n^2 - i\omega J_n J_n'(\varepsilon Z^2 + \mu) h_n^3 + \left(\frac{n^2}{a^2} J_n^2 + \omega^2 \varepsilon\mu J_n'^2\right) Z h_n^2 + \\ + \frac{n^2}{a^2} \omega^2 \varepsilon\mu Z J_n^2 = 0 \end{aligned}$$

che si riduce alla $J_n J_n' = 0$ quando sia $Z = 0$: Si ritrovano così, per $J_n(h_n a) = 0$ (e quindi $K_n = L_n = 0$) i modi $TM_n$; e, per $J_n'(h_n a) = 0$ (da cui segue $F_n = G_n = 0$) i modi $TE_n$.

Anche in questo caso ci limitiamo a supporre $Z$ sufficientemente piccolo ed a studiare quelle soluzioni $h_n$, $k_n$ della (19) che sono poco diverse da quelle $h_{n0}$, $k_{n0}$ del caso $Z = 0$.

Sia dunque, in primo luogo, $h_{n0}^{(i)} a$ uno degli zeri della funzione $J_n$ e poniamo, nella (19)

$$h_n^{(i)} = h_{n0}^{(i)} + \xi_n^{(i)}$$

e, per le potenze di $h_n^{(i)}$ e le funzioni $J_n$, $J_n'$ i loro sviluppi in serie rispetto a $\xi_n^{(i)}$ intorno al punto $h_{n0}^{(i)}$. Conservando i soli termini del primo ordine, segue dalla (19) la relazione

$$(20) \qquad \xi_n^{(i)} = \frac{\omega \varepsilon R}{a h_{n0}^{(i)}} (i - 1)$$

formalmente identica alla (15), valida per i modi $TM_0$ ([16]). Si

([15]) Cfr. MARCUVITZ, op. cit. p. 70. Per la variazione della velocità di fase si avrebbe qui, con evidente significato dei simboli:

$$\Delta v_E = -\frac{k_0^{(i)2} R}{\mu a \omega^2} v_E^3 .$$

([16]) Tale risultato è ancora in accordo con quelli ottenibili con i metodi già ricordati.

hanno dunque, per l'attenuazione $\beta_{nM}^{(i)}$ e per l'incremento $\Delta v_{nM}$ della velocità di fase (per valori della pulsazione sufficientemente diversi da quelli critici $\omega_{nC}^{(i)} = \dfrac{h_{n0}^{(i)}}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\Big)$, le espressioni

$$\beta_{nM}^{(i)} = \frac{\varepsilon R}{a\alpha_{nM}^{(i)}}, \qquad \Delta v_{nM} = -\frac{\varepsilon R}{a\omega} v_{nM}^3 . \tag{21}$$

Nel caso di pulsazioni molto prossime a quelle critiche valgono anche in questo caso, le relazioni (17') e (18).

Sia ora $k_{n0}^{(i)}$ uno zero della $J_n'$ e poniamo, nella (19)

$$h_n^{(i)} = k_{n0}^{(i)} + \eta_n^{(i)} ;$$

un calcolo analogo a quello or ora indicato conduce alla relazione

$$\eta_n = \frac{k_0^4 - \dfrac{n^2}{a^2}(k_0^2 - \omega^2\varepsilon\mu)}{\left(\dfrac{n^2}{k_0^2 a} - 1\right) k_0^3} \frac{R}{\omega\mu a}(1 - i),$$

nella quale si sono omessi, per brevità, gli indici $n$, $(i)$.

Se la pulsazione di lavoro è diversa da quella critica $\omega_0 = \dfrac{k}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, si ha per l'attenuazione $\beta_{nE}$, l'espressione

$$\beta_{nE} = \frac{k_0^4 - \dfrac{n^2}{a^2}(k_0^2 - \omega^2\varepsilon\mu)}{\left(\dfrac{n^2}{k_0^2 a^2} - 1\right) k_0^3} \frac{R}{\omega\mu a} \frac{k_0}{\alpha_0 \omega},$$

cui semplici sostituzioni permettono di dare la forma

$$\beta_{nE} = \frac{R}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, a}\left[\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 + \frac{n^2}{a^2 k_0 - n^2}\right] \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \quad (^{17}).$$

Se, infine, la guida è eccitata con pulsazione critica, o prossima a quella critica, si trova, per l'attenuazione $\beta_{nE}$ la espressione

$$\beta_{nE} = \Im[\sqrt{-2k_0\eta_n}] = \sqrt{\frac{k_0^4 a}{k_0^2 a^2 - n^2} \frac{R}{\omega\mu}(\sqrt{2} - 1)}$$

che per $n = 0$ si riduce a quella a suo tempo trovata per i modi $TE_0$. Calcoli del tutto privi di difficoltà permetterebbero di determinare, in entrambi i casi qui considerati, le velocità di fase corrispondenti.

([17]) Cfr. MARCUVITZ, op. cit., p. 70. LAMONT, op. cit., p. 70, KARBOWIAK, op. cit., formola (78).