BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

RENATO NARDINI

Sulla velocità di gruppo nei mezzi elettricamente conduttori.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 12
(1957), n.4, p. 523–525.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_4_523_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sulla velocità di gruppo nei mezzi elettricamente conduttori.

Nota di RENATO NARDINI (a Bologna)

Sunto. - Partendo dalla nota formula che dà la velocità di gruppo V_g di un campo elettromagnetico sinusoidale in funzione della velocità di fase V_f e della pulsazione, si dimostra che per un mezzo elettricamente conduttore, omogeneo e isotropo vale la limitazione $V_f \leq V_g < 2V_f$. Si accenna poi al caso in cui la conducibilità elettrica si può considerare infinita e al caso in cui la pulsazione tende a zero.

Zusammenfassung. - Auf Grund der bekannten Formel, die die Gruppengeschwindigkeit V_g eines elektromagnetischen Sinusfeldes als Funktion der Phasengeschwindigkeit V_f und der Kreisfrequenz liefert, beweist man dass, für ein leitendes, homogenes und isotropes Medium die Beschränkung $V_f \leq V_g < 2V_f$ gilt. Man hinweist auf den Fall in dem man die Leitfähigkeit als unendlich gross angesehen kann und auf den Fall in dem die Kreisfrequenz nach Null strebt.

1. Introduzione. - Durante il calcolo della velocità di gruppo che si presenta in un problema di magneto-idrodinamica ⁽¹⁾, mi è

⁽¹⁾ Si veda la nota, *Su particolari campi alternativi della magneto-idrodinamica* «Atti Acc. delle Scienze di Torino», 89 (1954-55), 17-36.

capitato di ricavare una semplice relazione fra la velocità di gruppo e la velocità di fase relative ad onde elettromagnetiche piane in un mezzo conduttore omogeneo e isotropo. Poichè nella letteratura attinente all'argomento non ne ho trovato menzione, malgrado un esame accurato ed è forse umanamente impossibile che tale esame sia completo), mi permetto di pubblicare il risultato in discorso.

Considerato quindi un mezzo omogeneo e isotropo, il suo comportamento elettromagnetico sia definito dalle costanti ε , μ e γ , che ne rappresentano rispettivamente la costante dielettrica, la permeabilità magnetica e la conducibilità elettrica.

Introduciamo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali xyz e consideriamo il noto caso particolare in cui il campo elettrico, avente componente solo lungo l'asse x e il campo magnetico, avente componente solo lungo l'asse y , siano entrambi proporzionali a

$$e^{i\omega(t-\alpha z)-\beta\omega z} \quad (\omega, \alpha, \text{ e } \beta \text{ costanti positive}):$$

dal punto di vista fisico la costante α rappresenta l'inverso della velocità di fase V_f , mentre $\beta\omega$ è il coefficiente di attenuazione.

È noto che, in base alle equazioni di MAXWELL, α e β devono soddisfare alle relazioni

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = \varepsilon\mu \\ 2\alpha\beta = \frac{\gamma\mu}{\omega} \end{cases}$$

risolvendo tale sistema si ottiene

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha^2 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\varepsilon^2\mu^2 + \frac{\gamma^2\mu^2}{\omega^2}} + \varepsilon\mu \right) \\ \beta^2 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\varepsilon^2\mu^2 + \frac{\gamma^2\mu^2}{\omega^2}} - \varepsilon\mu \right). \end{cases}$$

2. **Calcolo della velocità di gruppo.** - Calcoliamo ora la velocità di gruppo V_g , servendoci della nota formola ⁽²⁾, che, con le notazioni introdotte, è

$$(3) \quad V_g = \frac{1}{\frac{d\alpha\omega}{d\omega}}.$$

⁽²⁾ Si veda ad esempio T. A. STRATTON, *Teoria matematica dell'elettromagnetismo*, Einaudi, Torino, 1952, § 36.

Ora, in base alla prima delle (2), si ha

$$\frac{dx\omega}{d\omega} = \alpha + \omega \frac{dx}{d\omega} = \alpha - \frac{\gamma^2 \mu^2}{\omega^2} \left/ \right. 4\alpha \sqrt{\varepsilon^2 \mu^2 + \frac{\gamma^2 \mu^2}{\omega^2}} \left. \right\}.$$

Essendo per le (2)

$$\sqrt{\varepsilon^2 \mu^2 + \frac{\gamma^2 \mu^2}{\omega^2}} = \alpha^2 + \beta^2,$$

se si tiene conto della seconda delle (1) si ha

$$\frac{d\alpha\omega}{d\omega} = \alpha - \frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\alpha^3}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Introducendo tale risultato nella formola (3) e ricordando il significato fisico α si ottiene

$$V_g = \left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) V_f.$$

Dato che è

$$0 \leq \beta^2 < \alpha^2,$$

si conclude che per la velocità di gruppo nei mezzi omogenei, isotropi ed elettricamente conduttori vale la seguente limitazione

$$V_f \leq V_g < 2 V_f.$$

E' esattamente $V_f = V_g$ quando è $\beta = 0$, cioè che si ha nei mezzi isolanti ($\gamma = 0$).

Può essere interessante accennare ad alcuni casi limiti: per esempio si ha che

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{\beta^2}{\alpha^2} = 1,$$

ciò che dimostra che nei mezzi perfettamente conduttori la velocità di gruppo tende ad essere il doppio della velocità di fase.

Si ha anche

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\beta^2}{\alpha^2} = 1$$

e quindi il caso di pulsazione che tende a valori molto bassi presenta, al riguardo, lo stesso effetto ottenuto con conducibilità elevata.