BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIORGIO SESTINI

Sopra un teorema di unicità in problemi unidimensionali analoghi a quello di Stefan.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.4, p. 516–519.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_4_516_0>

Sopra un teorema di unicità in problemi unidimensionali analoghi a quello di Stefan.

Nota di GIORGIO SESTINI (a Firenze)

Sunto. - *Riprendendo con qualche dettaglio una dimostrazione di un teorema di unicità in problemi unidimensionali analoghi a quello di* STEFAN, *appena accennata in un suo precedente lavoro, l'autore mostra come questa sia rigorosa, senza l'ulteriore ipotesi dell'analiticità della soluzione del problema.*

Summary. - *The author shows that his proof of a uniqueness theorem for the solution of a* STEFAN*-like problem is correct without further assumptions.*

sig. DOUGLAS Jr. [1] [1], in una interessante Nota sulla unicità della soluzione in un problema di STEFAN non lineare, osserva che la usuale dimostrazione richiede, anche nel caso lineare, l'ipotesi che l'incognito fronte di avanzamento di una fase sull'altra risulti espresso da una *funzione analitica* del tempo, ipotesi questa che difficilmente può ritenersi soddisfatta, osservando inoltre che questa condizione, esplicitamente menzionata in un lavoro del sig. G. W. EVANS II [2], viene trascurata in altri lavori [3], [4].

La necessità di questa ipotesi risulta dal fatto che il ragionamento per assurdo istituito, ad es. in [2], per la dimostrazione del teorema di unicità muove dalla ipotesi che esistano due soluzioni del problema $X(t)$ e $Y(t)$ che soddisfino ad es. alla condizione $X > Y$ per $t > 0$, intendendo con ciò affermare che la disuguaglianza debba valere in un intorno destro non nullo di O.

È scopo di questa Nota mostrare che, nelle condizioni del mio lavoro [4], ricordato dal sig. DOUGLAS, e quindi anche in quelle di [2], l'ipotesi di analiticità è inessenziale e che perciò la dimostrazione della unicità, ivi soltanto accennata per ragioni di brevità e che qui riporto con qualche dettaglio, è del tutto rigorosa.

Rimandando al citato mio lavoro [4] per quanto concerne la impostazione del problema, la sua riduzione ad equazione funzionale e la dimostrazione dell'esistenza di una soluzione, mi limiterò a ricordare che, indicata con $x = \alpha(t)$ l'equazione del piano di separazione delle due fasi, l'incognita funzione $\alpha(t)$ resta legata alle incognite temperature delle due fasi $U^{(1)}(x, t)$ e $U^{(2)}(x, t)$ dalla seguente equazione:

$$\alpha(t) = F(t) + B_0 - B_1 \int_0^{\alpha(t)} U^{(1)}(\xi, t)d\xi - B_2 \int_{\alpha(t)}^{a} U^{(2)}(\xi, t)d\xi, \tag{1}$$

dove $F(t)$ è una funzione nota, continua con le sue derivate prima e seconda, B_0, B_1 e B_2 sono costanti e $U^{(1)}$ e $U^{(2)}$ sono soluzioni rispettivamente dei due sistemi:

$$(\mathrm{A}_1) \begin{cases} k_1 \dfrac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial x^2} = \dfrac{\partial U^{(1)}}{\partial t}, \ 0 < x < \alpha(t); \\ h_1 \left[\dfrac{\partial U^{(1)}}{\partial x}\right]_{x=0} = -H(t), \\ U^{(1)}(\alpha(t), t) = 0, \ \alpha(0) = 0; \\ \qquad 0 \leq t \leq T; \end{cases} \qquad (\mathrm{A}_2) \begin{cases} k_2 \dfrac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial x^2} = \dfrac{\partial U^{(2)}}{\partial t}, \ \alpha(t) < x < a; \\ U^{(2)}(x, 0) = f(x), \\ U^{(2)}(\alpha(t), t) = 0, \ \alpha(0) = 0, \\ \left[\dfrac{\partial U^{(2)}}{\partial x}\right]_{x=a} = 0; \\ \qquad 0 \leq t \leq T; \end{cases}$$

[1]) I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla bibliografia posta al termine del lavoro.

con k_i, h_i $(i=1, 2)$ costanti; $f(x)$ continua con le sue derivate prima e seconda e tale che $f(0)=0$, $|f'(0)|<c$, con c costante ben determinata, $f'(a)=0$, $f'(x)\leq 0$ e $f''(x)\geq 0$ in tutto l'intervallo $(0, a)$; $H(t)$ continua con la sua derivata prima e non decrescente in $(0, T)$, o più generalmente a variazione limitata nello stesso intervallo.

Ricorderò infine che risulta $U^{(1)}\geq 0$ e $U^{(2)}\leq 0$ nei campi di defininizione e che $\alpha(t)$ è derivabile con derivata nulla per $t=0$.

Indico con x, $U^{(1)}$, $U^{(2)}$ e y, $V^{(1)}$, $V^{(2)}$ due soluzioni della (1) e suppongo che esista un istante $t^*\leq T$, in cui sia ad es. $x(t^*)>y(t^*)$.

Dalla (1) si ha evidentemente:

$$(2)\quad 0<x(t^*)-y(t^*)=B_1\left\{\int_0^{y(t^*)}[V^{(1)}(\xi, t^*)-U^{(1)}(\xi, t^*)]d\xi-\int_{y(t^*)}^{x(t^*)}U^{(1)}(\xi, t^*)d\xi\right\}+$$
$$+B_2\left\{\int_{x(t^*)}^{a}[V^{(2)}(\xi, t^*)-U^{(2)}(\xi, t^*)]d\xi+\int_{y(t^*)}^{x(t^*)}V^{(2)}(\xi, t^*)d\xi\right\}.$$

Posto

$$Z^{(1)}=V^{(1)}(\xi, t)-U^{(1)}(\xi, t)\quad,\quad Z^{(2)}=V^{(2)}(\xi, t)-U^{(2)}(\xi, t),$$

risulta chiaro che $Z^{(1)}$ e $Z^{(2)}$ soddisfano per $0\leq t\leq T$ rispettivamente ai sistemi:

$$(\mathrm{B}_1)\begin{cases} k_1\dfrac{\partial^2 Z^{(1)}}{\partial\xi^2}=\dfrac{\partial Z^{(1)}}{\partial t},\ 0<\xi<y(t);\\ \left[\dfrac{\partial Z^{(1)}}{\partial\xi}\right]_{\xi=0}=0,\\ Z^{(1)}(y(t), t)=-U^{(1)}(y(t), t)\leq 0,\\ \qquad y(0)=0; \end{cases}\qquad (\mathrm{B}_2)\begin{cases} k_2\dfrac{\partial^2 Z^{(2)}}{\partial\xi^2}=\dfrac{\partial Z^{(2)}}{\partial t},\ x(t)<\xi<a;\\ Z^{(2)}(\xi, 0)=0,\\ \left[\dfrac{\partial Z^{(2)}}{\partial\xi}\right]_{\xi=a}=0,\\ Z^{(2)}(x(t), t)=V^{(2)}(x(t), t)\leq 0,\\ \qquad x(0)=0. \end{cases}$$

Per questi due sistemi valgono, nelle nostre ipotesi, ben noti teoremi di esistenza ed unicità.

Considero ora, sempre per $0\leq t\leq T$, i due sistemi:

$$(\mathrm{C}_1)\begin{cases} k_1\dfrac{\partial^2 W^{(1)}}{\partial\xi^2}=\dfrac{\partial W^{(1)}}{\partial t},\ -y(t)<\xi<y(t);\\ W^{(1)}(-y(t), t)=-U^{(1)}(y(t), t)\leq 0,\\ W^{(1)}(y(t), t)=-U^{(1)}(y(t), t)\leq 0,\\ \qquad y(0)=0; \end{cases}$$

$$(\mathrm{C}_2) \begin{cases} k_2 \dfrac{\partial^2 W^{(2)}}{\partial \xi^2} = \dfrac{\partial W^{(2)}}{\partial t}, \quad x(t) < \xi < 2a - x(t)\,; \\ W^{(2)}(\xi, 0) = 0\,, \\ W^{(2)}(x(t), t) = V^{(2)}(x(t), t) \leq 0\,, \\ W(2a - x(t), t) = V^{(2)}(x(t), t) \leq 0\,, \\ \qquad x(0) = 0\,. \end{cases}$$

Essendo $\left[\dfrac{\partial Z^{(1)}}{\partial \xi}\right]_{\xi=0} = 0$ (rispettivamente $\left[\dfrac{\partial Z^{(2)}}{\partial \xi}\right]_{\xi=a} = 0$), con una riflessione rispetto alla retta $\xi = 0$ ($\xi = a$), da $Z^{(1)}$ (da $Z^{(2)}$), soluzione di (B_1) (di (B_2)), si può ottenere una soluzione regolare $W^{(1)}$ di (C_1) ($W^{(2)}$ di (C_2)). Tale soluzione, date le ipotesi, risulta come è ben noto unica e nel sottocampo $\{(0, y(t)), (0, T)\}$ ($\{(x(t), a), (0, T)\}$), coincidente con $Z^{(1)}$ (con $Z^{(2)}$).

Essendo poi la $W^{(1)}$ (la $W^{(2)}$) non positiva sul contorno regolare del campo di esistenza, tale sarà in ogni punto interno [5] e quindi anche sulla caratteristica $t = t^* \leq T$. Questo mi permette di affermare che su tale caratteristica si avrà:

$$Z^{(1)}(\xi, t^*) \leq 0 \quad \mathrm{e} \quad Z^{(2)}(\xi, t^*) \leq 0$$

e perciò dalla (2), per essere $U^{(1)} \geq 0$ e $V^{(2)} \leq 0$,

$$0 < x(t^*) - y(t^*) \leq 0\,.$$

Questa porta a concludere la coincidenza, istante per istante, di $x(t)$ con $y(t)$ e di conseguenza la asserita unicità della soluzione del problema considerato.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. DOUGLAS Jr., *A uniqueness theorem for the solution of a Stefan problem,* « Proceedings of the Am. Math. Soc. », 8 (1957), 402-408.

[2] G. W. EVANS II, *A note on the existence of a solution to a problem of Stefan,* « Q. Appl Math. » 9 (1951), 185-193.

[3] A. DATZEFF, *Sur le problème linéaire de Stefan,* « Annuaire Univ. Sofia, Fac. Sci. », Livre 1, 46 (1950), 271-325.

[4] G. SESTINI, *Esistenza di una soluzione in prolemi analoghi a quello di Stefan,* « Rivista di Mat. Univ. Parma », 3 (1952), 3-23.

[5] M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore,* Napoli 1941.