
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GUIDO ZAPPA

Sui gruppi di collineazioni dei piani di Hughes.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 12
(1957), n.4, p. 507–516.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_4_507_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sui gruppi di collineazioni dei piani di HUGHES.

Nota di GUIDO ZAPPA (a Firenze)

Sunto. - *Si studia il gruppo di collineazioni dei piani non-desarguesiani finiti recentemente introdotti da HUGHES, e se ne determina completamente la struttura nel caso del piano d'ordine 9.*

Summary. - *The collineation group of non-desarguesian finite planes recently introduced by HUGHES is studied and, in the case of the plane of order 9, completely determined.*

Recentemente HUGHES [2] generalizzando uno dei tipi di piani non desarguesiani d'ordine 9 (cioè con 10 punti su ogni retta) indicati da VEBLEN e WEDDERBURN [4] ha introdotto tutta una nuova classe di piani non desarguesiani finiti, che chiameremo piani di HUGHES.

L'ordine di un piano di HUGHES π è della forma p^{2n} , con p numero primo. Inoltre π contiene un sottopiano π_0 , d'ordine p^n , desarguesiano. HUGHES ha mostrato che π ammette un gruppo di collineazioni H ciclico d'ordine $p^{2n} + p^n + 1$. Le collineazioni di H si ottengono prolungando a tutto π le collineazioni dell'analogo gruppo ciclico ammesso da π_0 in base ad un noto teorema di SINGER [3]. Nel caso particolare $p^n = 3$, π ammette anche un gruppo di collineazioni Γ d'ordine 6, che lascia fermo ogni punto di π_0 . I gruppi H e Γ risultano permutabili elemento per elemento e privi di elementi comuni, di modo che π , sempre nel caso $p^n = 3$, viene ad ammettere il gruppo di collineazioni $H \times \Gamma$ d'ordine 78. HUGHES però lascia aperto il problema di determinare il gruppo totale di collineazioni di π , sia nel caso generale che in quello particolare $p^n = 3$.

Nella presente Nota affronto tale problema. Nel caso generale dimostro (n. 1) che ogni proiettività di π_0 può prolungarsi a tutto π , di modo che π ammette un gruppo di collineazioni G isomorfo al gruppo totale delle proiettività di π_0 . Nel caso particolare $p^n = 3$, determino (n. 3) pienamente il gruppo totale Σ delle collineazioni di π_0 . Precisamente, dimostro che $\Sigma = G \times \Gamma$, e che di conseguenza l'ordine di Σ è 33696.

Resta ancora aperto il problema di determinare il gruppo totale di collineazioni di π nel caso generale.

1. Sia R un quasicorpo del DICKSON finito d'ordine p^{2n} , contenente un campo di GALOIS F d'ordine p^n come suo centro; si ponga $q = p^{2n} + p^n + 1$. Sia V il sistema delle terne ordinate di elementi di R , e V_0 quello delle terne ordinate di elementi di F . Sia π_0 il piano desarguesiano sopra F : punto di π_0 è ogni terna appartenente a V_0 , ad eccezione della terna $(0, 0, 0)$, e con l'identificazione $(kx, ky, kz) = (x, y, z)$ per (x, y, z) in V_0 e k elemento qualunque di $F \neq 0$. È noto [3] che π_0 ammette una proiettività A di periodo q . La sua equazione può scriversi nella forma

$$\begin{aligned}x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z\end{aligned}$$

con a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) in F , e $|a_{ij}| \neq 0$.

Si noti che la A induce una trasformazione (non solo di V_0 , ma anche) di V in sè, (che chiameremo ancora A) la quale porta la terna $(0, 0, 0)$ in se stessa, ed è tale che $A(kx, ky, kz) = kA(x, y, z)$, per ogni $k \neq 0$ in F , perchè gli a_{ij} appartengono al centro F di R .

Il piano grafico finito (non desarguesiano) π , introdotto da HUGHES in [2], può allora definirsi nel modo seguente:

Diremo *punto* di π ogni terna in V , con l'eccezione della terna $(0, 0, 0)$ e con l'identificazione $(kx, ky, kz) = (x, y, z)$ per ogni $k \neq 0$ in R . Da quanto si è visto sopra, risulta che ogni potenza di A porta un punto di π in un punto di π .

Diremo *retta*: (a) ogni insieme L_t di punti verificanti un'equazione del tipo $x + yt + z = 0$, ove t è una costante $\neq 1$ oppure contenuta in R , ma non in F ; (b) ogni insieme $L_t A^m$ di punti ottenuto trasformando un insieme del tipo (a) mediante una potenza A^m di A , con $1 \leq m < q$. Si ha allora facilmente (vedi [2]) che π è un piano grafico con $q^2 + 1$ punti sopra ogni retta. Ogni retta di π_0 è contenuta in una ed una sola retta di π , con la quale può identificarsi. Le q potenze distinte di A costituiscono un gruppo di collineazioni di π , mutante π_0 in sè.

Sia ora B una qualunque proiettività di π_0 e siano

$$\begin{aligned}(1) \quad x' &= b_{11}x + b_{12}y + b_{13}z \\y' &= b_{21}x + b_{22}y + b_{23}z \\z' &= b_{31}x + b_{32}y + b_{33}z\end{aligned}$$

le sue equazioni. Sarà b_{ij} in F ($i, j = 1, 2, 3$) e $|b_{ij}| \neq 0$. Si ha facilmente (ragionando come per la A) che la B induce una trasformazione di V in sè (che diremo ancora B) la quale porta ogni

punto di π in un punto di π . Si ha subito che la B è biunivoca sui punti di π . Infatti, detto B_{ij} il complemento algebrico di b_{ij} in $\|b_{ij}\|$ si ha che, se nelle (1) si suppongono noti x', y', z' e incogniti x, y, z , e si pongono nei secondi membri di esse, in luogo di x, y, z , i valori

$$\begin{aligned} \frac{B_{11}}{|b_{ij}|} x' + \frac{B_{21}}{|b_{ij}|} y' + \frac{B_{31}}{|b_{ij}|} z' \\ \frac{B_{12}}{|b_{ij}|} x' + \frac{B_{22}}{|b_{ij}|} y' + \frac{B_{32}}{|b_{ij}|} z' \\ \frac{B_{13}}{|b_{ij}|} x' + \frac{B_{23}}{|b_{ij}|} y' + \frac{B_{33}}{|b_{ij}|} z' \end{aligned}$$

valendo in R la proprietà distributiva a sinistra, si ottengono i valori x', y', z' . Vogliamo ora provare che B è una collineazione di π , e a tal fine basterà provare che B porta rette di π (pensate come insieme di punti) in rette di π .

Sia $L_t A^m$ ($t=1$ oppure t in R , fuori di F , $0 \leq m < q$) una retta di π . Vogliamo provare che l'insieme $L_t A^m B$ ottenuto trasformando i punti di $L_t A^m$ mediante B è ancora una retta di π . A tal fine proveremo anzitutto che, presa ad arbitrio una retta $L_s A^n$ di π ($s=1$ oppure s in R fuori di F). l'insieme $L_t A^m B$ o ha un sol punto in comune con la retta $L_s A^n$, o coincide con essa. Poichè A^n porta ogni punto comune a L_s ed $L_t A^m B A^{-n}$ in un punto comune ad $L_s A^n$ ed $L_t A^m B$, e, viceversa, ogni punto comune a $L_s A^n$ e $L_t A^m B$ proviene (per effetto di A^n) da un punto comune ad L_s ed $L_t A^m B A^{-n}$, basterà provare che L_s ed $L_t A^m B A^{-n}$ o hanno un sol punto in comune, o coincidono.

Il ragionamento seguente è molto simile a quello fatto da HUGHES in [2] per provare che π è un piano grafico.

Si ponga $C = A^n B^{-1} A^{-m}$. La C , al pari di A^n , B^{-1} e A^{-m} , è una proiettività di π_0 , rappresentabile mediante una sostituzione lineare

$$\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z \\ y' &= c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z \\ z' &= c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z \end{aligned} \quad (2)$$

con c_{ij} in F ($i, j=1, 2, 3$) e $|c_{ij}| \neq 0$. Dobbiamo dimostrare che L_s e $L_t C^{-1}$ hanno a comune un sol punto o coincidono. Il punto (x, y, z) risulterà comune ad L_s ed $L_t C^{-1}$ se e solo se il punto

$$(c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z, c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z, c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z)$$

risulterà comune ad $L_s C$ e ad L_t , ossia se e solo se (x, y, z) verificherà le equazioni

$$(3) \quad x + ys + z = 0$$

$$(4) \quad (c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z) + (c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z)t + (c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z) = 0.$$

Risolvendo la (3) rispetto ad x e sostituendo in (4) si ha

$$(5) \quad yu + za + (yv + zb)t = 0$$

ove

$$u = c_{12} + c_{32} - (c_{11} + c_{31})s \quad v = c_{22} - c_{21}s$$

$$a = c_{13} + c_{33} - (c_{11} + c_{31}) \quad b = c_{23} - c_{21}.$$

Si noti che a e b sono in F . Distinguiamo vari casi:

I) $b \neq 0$. La (5) può essere scritta

$$(yv + zb)b^{-1}a + y(u - vb^{-1}a) + (yv + zb)t = 0$$

utilizzando il fatto che a e b sono in F ; od anche

$$(6) \quad (yv + zb)(b^{-1}a + t) + y(u - vb^{-1}a) = 0.$$

Se è $t = 1$ la (5) diviene

$$(7) \quad y(u + v) + z(a + b) = 0.$$

Questa, se $u + v = 0$, $a + b = 0$, può essere soddisfatta con y e z arbitrari, ed x può essere ricavato di conseguenza dalla (3). In tal caso il sistema delle (3) e (7) è equivalente alla sola (3), onde $L_t C^{-1}$ coincide con L_s . Se poi è $u + v \neq 0$, $a + b = 0$, la (7) fornisce $y = 0$, e la (3) di conseguenza $x = -z$. Allora L_s ed $L_t C^{-1}$ hanno uno ed un sol punto in comune. Ad analoga conclusione si giunge se è $a + b \neq 0$, potendosi assegnare ad y un valore arbitrario $\neq 0$, e ricavare di conseguenza z dalla (7) e successivamente x dalla (3).

Se è $t \neq 1$, quindi t non in F , essendo a e b in F , l'elemento $w = b^{-1}a + t$ è $\neq 0$. Dalla (6) segue allora,

$$(yv + zb)w = -y(u - vb^{-1}a)$$

da cui, moltiplicando ambo i membri a destra per w^{-1} e raccogliendo y a fattor comune a sinistra,

$$(8) \quad y[v + (u - vb^{-1}a)w^{-1}] + zb = 0.$$

Essendo $b \neq 0$, si può assegnare ad y un valore arbitrario $\neq 0$, e ricavare z dalla (8) e successivamente x dalla (3). Allora L_s e $L_t C^{-1}$ hanno in comune uno ed un sol punto.

II) $b = 0$, $a \neq 0$. Allora (5) diviene

$$(9) \quad y(u + vt) + za = 0.$$

Essendo $a \neq 0$, si può assegnare un valore arbitrario $\neq 0$ ad y e ricavare di conseguenza z dalla (9) e successivamente x dalla (3). Allora L_s ed $L_s C^{-1}$ hanno a comune un punto ed uno solo.

III) $a = b = 0$. La (5) diviene allora

$$(10) \quad y(u + vt) = 0.$$

Se è $u + vt = 0$, la (10) è una identità, onde il sistema delle (3) e (5) è equivalente alla sola (3), e L_s ed $L_s C^{-1}$ coincidono.

Se poi $u + vt \neq 0$, la (10) fornisce $y = 0$, e la (3), di conseguenza, $x = -z$. La L_s e la $L_s C^{-1}$ hanno allora in comune uno ed un solo punto.

Resta pertanto provato che l'insieme $L_s A^m B$, o ha a comune con una retta di π uno ed uno solo punto, o coincide con essa.

È allora subito visto che $L_s A^m B$ coincide con una retta di π . Infatti, da ognuno dei $p^{2n} + 1$ punti di $L_s A^m B$ escono $p^{2n} + 1$ rette di π . Se $L_s A^m B$ non coincidesse con alcuna retta di π , le rette uscenti dai suoi vari punti sarebbero tutte distinte, onde π verrebbe a contenere $(p^{2n} + 1)^2 = p^{4n} + 2p^{2n} + 1$ rette, mentre ne contiene solo $p^{4n} + p^{2n} + 1$.

Possiamo pertanto concludere col

TEOREMA I. - *Se R è un quasicorpo del DICKSON d'ordine p^{2n} (p primo, $n \geq 1$) il cui centro F abbia ordine p^n , π è il piano di HUGHES relativo ad R e π_0 il suo sottopiano a coordinate in F , ogni proiettività di π_0 può prolungarsi in una collineazione di π .*

2. D'ora in poi, R sia, in particolare, il quasicorpo del DICKSON d'ordine 9, e di conseguenza F il campo di GALOIS d'ordine 3. Essendo F d'ordine primo, ogni collineazione di π_0 è una proiettività. L'ordine del gruppo G delle collineazioni di π_0 vale $13 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 4 = 5616$.

Proviamo ora che:

Una collineazione di π che lasci fermo ogni punto di π_0 e un ulteriore punto P , è l'identità.

È noto [2] che se P è un punto di π non giacente in π_0 , P appartiene ad una ed una sola retta r di π_0 , la quale naturalmente contiene 4 punti di π_0 . Le rette che congiungono P con gli ulteriori 9 punti di π_0 devono essere tutte distinte, poichè ciascuna di esse, non appartenendo a π_0 , non può contenere più di un punto di quest'ultimo. E poichè le rette di π passanti per P sono in

numero di 10, si ha che ogni retta passante per P contiene un punto di π_0 (e precisamente uno solo, se essa è distinta da r).

Nè segue che, se T è una collineazione di π che lasci fermi ogni punto di π_0 ed il punto P , T lascia ferma ogni retta per P (poichè una tale retta congiunge necessariamente P con un punto di π_0 , unito per T al pari di P).

Sia ora Q un punto di π fuori di r e di π_0 , e sia s l'unica retta di π_0 cui Q appartenga. Il punto Q risulta unito per T , perchè intersezione delle rette unite s e PQ , distinte tra loro.

Sia infine M un punto di r , fuori di π_0 , e sia t una retta per M , distinta da r . Ogni punto di t , ad eccezione al più di M , è unito per T , onde t stessa è unita; tale è pertanto anche M , quale intersezione delle rette unite t ed r . Resta quindi provato che ogni punto di π è unito per T , come si voleva.

Notiamo ora che se S_1, S_2 sono due collineazioni distinte di π le quali lascino fermo ogni punto (e quindi anche ogni retta) di π_0 , esse non possono indurre la stessa sostituzione sopra i punti non contenuti in π_0 , appartenenti ad una retta r di π_0 , altrimenti $S_1^{-1}S_2$ lascerebbe fermi, oltre i punti di π_0 , anche quelli di r , e, per l'osservazione precedente, sarebbe l'identità. Pertanto il gruppo delle collineazioni di π che lascino fermo ogni punto di π_0 è isomorfo al gruppo delle sostituzioni da esse determinate sui 6 punti, fuori di π_0 , appartenenti ad una retta r di π_0 ; e tale gruppo deve a sua volta essere regolare, perchè altrimenti una sua sostituzione (e quindi anche la collineazione che la determina) lascerebbe fermo un punto fuori di π_0 senza essere l'identità. Possiamo quindi concludere affermando che:

L'ordine del gruppo formato dalle collineazioni di π che lasciano fermo ogni punto di π_0 non può superare il 6.

Ma è noto [2] che il gruppo, d'ordine 6, degli automorfismi di R induce un gruppo Γ , anch'esso d'ordine 6, di collineazioni di π che lasciano fermo ogni punto di π_0 . Pertanto Γ coincide col gruppo di tutte le collineazioni di π che lascino fermo ogni punto di π_0 .

Entro il gruppo Σ di tutte le collineazioni di π che mutano in sè π_0 abbiamo individuato due sottogruppi notevoli: G , d'ordine 5616, costituito dalle collineazioni ottenute prolungando a tutto π le collineazioni di π_0 , e Γ , d'ordine 6, costituito dalle collineazioni indotte dagli automorfismi di R , ovvero dalle collineazioni che lasciano fermo ogni punto di π_0 .

Vogliamo ora provare che è $\Sigma = G \times \Gamma$. Si ha intanto $G \cap \Gamma = 1$, perchè le collineazioni in Γ lasciano fermo ogni punto di π_0 , men-

tre tra le collineazioni in G solo l'identità gode di tale proprietà. Si ha inoltre $\Sigma = G\Gamma$ perchè, se T è una qualunque collineazione in Σ , essa, mutando π_0 in sè, vi subordina una collineazione, e quindi opera in π_0 allo stesso modo in cui vi opera una conveniente collineazione C in G . Pertanto $C^{-1}T$ lascia fermo ogni punto di π_0 , ossia coincide con una collineazione S in Γ ; vale a dire $T = CS$, da cui $\Sigma = G\Gamma$.

Resta ora da provare che ogni collineazione C in G è permutabile con ogni collineazione S in Γ . Sia $\|c_{ij}\|$ la matrice dei coefficienti della C ($i, j = 1, 2, 3$; $|c_{ij}| \neq 0$, c_{ij} in F), e sia $\mathfrak{s}$ l'automorfismo di R che dà luogo ad S . Se $\mathfrak{s}$ porta x, y, z in $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, S porta il punto $P = (x, y, z)$ nel punto $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ e C porta il punto $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ nel punto $\bar{P}' = (c_{11}\bar{x} + c_{12}\bar{y} + c_{13}\bar{z}, c_{21}\bar{x} + c_{22}\bar{y} + c_{23}\bar{z}, c_{31}\bar{x} + c_{32}\bar{y} + c_{33}\bar{z})$. Pertanto il prodotto SC porta P in $\bar{P}'$. D'altra parte, C porta P in $P' = (c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z, c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z, c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z)$; e poichè $\mathfrak{s}$ porta x, y, z in $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, e ognuno dei c_{ij} in sè (perchè ogni automorfismo di R lascia fermo ogni elemento di F), $\mathfrak{s}$ porta $c_{i1}x + c_{i2}y + c_{i3}z$ in $c_{i1}\bar{x} + c_{i2}\bar{y} + c_{i3}\bar{z}$ ($i = 1, 2, 3$) onde S porta P' in $\bar{P}'$. Ne segue che CS porta P in $\bar{P}'$, al pari di SC , e data l'arbitrarietà di P , si ha $CS = SC$. Risulta pertanto $\Sigma = G \times \Gamma$, come si era affermato. Si può quindi concludere col

TEOREMA II. - *Se π è il piano di HUGHES relativo al quasicorpo del DICKSON R d'ordine 9, e π_0 è il suo sottopiano relativo al centro F di R , il gruppo delle collineazioni di π che mutano in sè π_0 è dato dal prodotto diretto $\Sigma = G \times \Gamma$, ove G è il gruppo costituito dai prolungamenti a tutto π delle collineazioni di π_0 , e Γ è il gruppo delle collineazioni indotte in π dagli automorfismi di R . L'ordine di Σ vale $5616 \times 6 = 33696$.*

Poichè G è isomorfo al gruppo delle collineazioni del piano su $GF(3)$, ampiamente noto, e Γ al gruppo totale di sostituzioni su tre oggetti (vedi HUGHES, [2]), la struttura di Σ è da considerarsi nota.

3. Resta ora da provare che ogni collineazione di π lascia fermo π_0 , dopo di che risulterà che Σ coincide col gruppo di tutte le collineazioni di π .

Proviamo alcuni lemmi.

LEMMA I. - *Una collineazione di π appartenente a G , la quale subordini in π_0 un'omologia, è essa stessa un'omologia.*

Sia C una collineazione di π appartenente a G , la quale subordini in π_0 un'omologia e sia r l'asse di quest'ultima. Necessaria-

mente r è una retta di π_0 , e data la transitività di G sull'insieme delle rette di π_0 , non è restrittivo supporre che r coincida con la retta di equazione $y=0$. Ogni punto di π_0 appartenente ad r sarà mutato in sè da C , e ciò comporta che C sia data dalla sostituzione lineare

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y \\ y' &= a_{22}y \\ z' &= a_{23}y + a_{11}z. \end{aligned}$$

Ma una tale sostituzione muta in sè anche ogni punto di r che non sia in π_0 . Pertanto la C , considerata come collineazione di π , ha una retta di punti uniti, e quindi è un' omologia.

Si noti che il centro e l'asse di C sono i medesimi, sia che si consideri C come omologia di π che di π_0 . Si ha pertanto il

LEMMA II. - *Comunque si prendano un punto P e una retta r incidenti, appartenenti a π_0 , esiste in G qualche omologia (speciale) non banale di π , di centro P ed asse r .*

Infatti, esistono due omologie speciali non banali di π_0 , di centro P ed asse r , le quali sono necessariamente subordinate da collineazioni di π contenute in G . Per il lemma I, e per l'ultima osservazione, tali collineazioni sono omologie speciali di π , di centro P ed asse r .

LEMMA III. - *Il gruppo Σ è transitivo sull'insieme delle coppie punto-retta incidenti non appartenenti a π_0 .*

Siano P, r e P', r' due coppie punto-retta incidenti in π non appartenenti a π_0 . Vogliamo dimostrare che esiste in Σ una collineazione che porta P in P' ed r in r' .

Il gruppo Σ è certamente transitivo sui punti di π non appartenenti a π_0 , perchè tale è un suo sottogruppo d'ordine 78 considerato da HUGHES ([2], n. 3). Pertanto esiste una collineazione S in π che porta P in P' : essa porterà la retta r in una retta $\bar{r}$ per P' , non appartenente a π_0 . Sia t la retta di π_0 passante per P' . Le rette $\bar{r}$ ed r' hanno ciascuna un punto ed un solo a comune con π_0 . Siano A ed A' tali punti. Si consideri in π_0 l'omologia speciale T di asse t che porta A in A' . Il suo prolungamento a tutto π , che chiameremo del pari T , è ancora un' omologia speciale di asse t , e porta $\bar{r}$ in r' , lasciando fermo P' . Il prodotto ST porta P in P' , ed r in r' , onde il lemma risulta dimostrato.

È poi evidente che Σ è transitivo rispetto alle coppie punto-retta incidenti P, r con P ed r in π_0 . Inoltre Σ è transitivo rispetto alle analoghe coppie con P in π_0 ed r non in π_0 . Infatti se P, r e P', r' sono due coppie punto-retta incidenti con P, P' in π_0 ,

r ed r' non sono in π_0 , esiste in Σ una collineazione che porta r in r' , e questa porta anche P in P' , perchè P (P') è l'unico punto di r (di r') che appartenga a π_0 . Analogamente si vede che Σ è transitivo rispetto alle coppie punto-retta incidenti P, r con P non in π_0 , ed r in π_0 .

Pertanto:

LEMMA IV. - *Le coppie punto-retta incidenti P, r di π si suddividono rispetto a Σ in 4 sistemi di transitività: a) coppie con P ed r in π_0 ; b) coppie con P in π_0 ed r non in π_0 ; c) coppie con P non in π_0 , r in π_0 ; d) coppie con P ed r non in π_0 .*

Ora siamo in grado di dimostrare che ogni collineazione di π muta in sè π_0 . Procederemo per assurdo, e supporremo che esista una collineazione di π , la quale non muti in sè π_0 . Indichiamo con $\bar{\Sigma}$ il gruppo di tutte le collineazioni di π . La nostra ipotesi, da dimostrare assurda, equivale all'altra, che $\bar{\Sigma}$ sia più ampio di Σ .

Determiniamo i sistemi di transitività in cui si suddividono le coppie punto-retta incidenti rispetto a $\bar{\Sigma}$. Ognuno di tali sistemi o coincide con uno dei sistemi analoghi a), b), c), d) relativi a Σ , di cui al lemma IV, o è dato dall'unione di un certo numero di tali sistemi. Orbene, se $\bar{\Sigma}$ è più ampio di Σ , in $\bar{\Sigma}$ c'è una collineazione S che porta un punto P di π_0 in un punto P' non di π_0 . Il punto P dà luogo a 4 coppie punto-retta incidenti del sistema a) e a 9 coppie del sistema b), mentre il punto P' dà luogo a una coppia del sistema c) e a 12 del sistema d). Pertanto S porta certamente qualche coppia del sistema a) e qualcuna del sistema b) in qualche coppia del sistema d), onde i sistemi a), b), d), danno luogo a un unico sistema rispetto a $\bar{\Sigma}$. Ma anche il sistema c) deve appartenere al medesimo sistema rispetto a $\bar{\Sigma}$, perchè l'unica coppia del sistema c) relativa a P' proviene, per effetto di S , da una coppia del sistema a) o del sistema b). Possiamo quindi concludere affermando che:

Se $\bar{\Sigma}$ è più ampio di Σ , $\bar{\Sigma}$ è transitivo rispetto all'insieme delle coppie punto-retta incidenti.

Dal lemma I discende che, comunque si prenda una coppia punto-retta incidenti P, r in π_0 , esiste in π_0 e quindi in π qualche omologia speciale non banale di centro P ed asse r . Per l'ultima osservazione, se $\bar{\Sigma}$ è più ampio di Σ , la coppia P, r può essere portata, da una conveniente collineazione S in $\bar{\Sigma}$, in una coppia punto-retta incidenti P', r' di π arbitrariamente scelta. Allora S trasforma le omologie non banali di centro P ed asse r in omologie non banali di centro P' ed asse r' . Pertanto, data l'arbitrarietà di P' ed r' , si ha che:

Se $\bar{\Sigma}$ è più ampio di Σ , comunque si prendano in π un punto P' e una retta r' incidenti, esiste almeno un'omologia speciale non banale di centro P' ed asse r' .

Ma, per un teorema di GLEASON [1], un piano grafico finito in cui, per ogni coppia punto-retta incidenti P, r , esiste un'omologia speciale non banale di centro P ed asse r , è desarguesiano. Perciò :

Se $\bar{\Sigma}$ è più ampio di Σ , π è desarguesiano.

Poichè π non è desarguesiano (HUGHES [2]) $\bar{\Sigma}$ non può essere più ampio di Σ . Possiamo quindi concludere col

TEOREMA III. - Il gruppo Σ , di cui al teorema II, è il gruppo di tutte le collineazioni del piano di HUGHES relativo al quasicorpo del DICKSON d'ordine 9.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. M. GLEASON, *Finite Fano planes*, « Amer. J. Math. », 78, 797-807 (1956).
- [2] D. H. HUGHES, *A class of non-Desarguesian projective planes*, « Canadian J. Math. », 9, 378-388 (1957).
- [3] J. SINGER, *A theorem in finite projective geometry and some applications in number theory*, « Trans. Amer. Math. Soc. » 43, 377-385 (1938).
- [4] O. VELEN and J. H. M. WEDDERBURN, *Non desarguesian and non pascalian geometries*, « Trans. Amer. Math. Soc. », 8, 379-388 (1907).