BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GHEORGHE VRANCEANU

Sul tensore associato ad una corrispondenza fra spazi proiettivi.

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 12 (1957),
n.4, p. 489–506.*

Zanichelli

http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_4_489_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Sul tensore associato ad una corrispondenza fra spazi proiettivi.

Nota di GHEORGHE VRANCEANU (a Bucarest)

Sunto. - Si danno le condizioni alle quali deve soddisfare il tensore Π^i_{jk} che si può associare ad una corrispondenza tra due spazi proiettivi e si mostra come si può determinare la corrispondenza conoscendo il tensore Π^i_{jk} . Si dà altresì una interpretazione geometrica dei tensori covarianti Π_{jk} , Π_{jkl} , ..., associati. Si considera poi una derivazione covariante e si considerano le trasformazioni proiettive in sé di una corrispondenza e si mostra che nel caso $n=2$ il gruppo di trasformazioni in sé può avere al più 2, 3 o 4 parametri secondo che la corrispondenza è di prima, seconda o di terza specie. Per $n > 2$ il gruppo può avere al più $n^2 - n + 2$ parametri e questo massimo è raggiunto.

Summary. - The conditions to which the tensor Π^i_{jk} , associated to a correspondence between two projective spaces, must satisfy, are given. It is shown how the correspondence can be found when the tensor Π^i_{jk} is known. Geometric interpretation is also given for the associated covariant tensors Π_{jk} , Π_{jkl} . Covariant differentiation is then considered and projective self-transformations of a given correspondence. It is shown that, in the case $n=2$, the group of self-transformations can have no more than 2, 3 or 4 parameters according as the correspondence is of the first, second or third kind. For the case $n > 2$ the same group can have no more than $n^2 - n + 2$ parameters and this upper bound is reached.

1. In una Nota precedente ⁽¹⁾ ho associato ad una corrispondenza

$$(1) \quad u^i = u^i(x^1, \dots, x^n)$$

⁽¹⁾ G. VRANCEANU, *Trasformazioni puntuali tra spazi affini o proiettivi e spazi a connessione affine euclidea*. Questo Bollettino, Ser. III, Vol. XII, pp. 145-153, (1957). I risultati di questa Nota e del presente lavoro sono stati esposti in tre conferenze fatte all'Istituto di Geometria dell'Università di Bologna nei giorni 8, 9 e 12 novembre 1957.

tra due spazi proiettivi $A_n(x^1, \dots, x^n)$ e $E_n(u^1, \dots, u^n)$ un tensore Π^i_{jk} definito in A_n , le componenti di questo tensore non essendo altro che le componenti della connessione proiettiva dello spazio a connessione affine euclidea A_n , per il quale u^i sono delle coordinate cartesiane.

Altrimenti detto, indicando con Γ^i_{jk} le componenti della connessione affine dello spazio A_n , queste componenti sono definite dalle equazioni

$$(2) \quad \frac{\partial^2 u^i}{\partial x^j \partial x^k} + \Gamma^s_{jk} \frac{\partial u^i}{\partial x^s} = 0$$

e le componenti Π^i_{jk} della connessione proiettiva dalle formule

$$(3) \quad \Pi^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \frac{\delta^i_j}{n+1} \Gamma_k - \frac{\delta^i_k}{n+1} \Gamma_j$$

dove Γ_k è la connessione contratta $\Gamma_k = \Gamma^i_{ik}$. Tenendo conto delle (2) si ha

$$\Gamma_k = - \frac{\partial \log \Delta}{\partial x^k}$$

dove Δ è il determinante funzionale della trasformazione puntuale (1).

Ponendo

$$(4) \quad v = \Delta^{-\frac{1}{n+1}}$$

le formule (3) si possono scrivere

$$(5) \quad \Gamma^i_{jk} = \Pi^i_{jk} + \delta_j^i \frac{v_k}{v} + \delta_k^i \frac{v_j}{v}, \quad \left(v_k = \frac{\partial v}{\partial x^k} \right)$$

le quali esprimono le componenti della connessione affine Γ^i_{jk} mediante le componenti Π^i_{jk} e la funzione v .

Dobbiamo altresì tener conto del fatto che le componenti Γ^i_{jk} devono soddisfare alle condizioni

$$(6) \quad \Gamma^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{sk} \Gamma^s_{jl} - \Gamma^i_{sl} \Gamma^s_{jk} = 0$$

che rappresentano la condizione necessaria e sufficiente perchè le equazioni (2) formino un sistema completamente integrabile.

Vogliamo ora, utilizzando le formole (5), vedere a quali condizioni devono soddisfare le componenti Π^i_{jk} . È facile vedere, facendo i calcoli e tenendo conto delle (5), che le (6) diventano

$$(7) \quad v\Pi^i_{jkl} + \delta_k^i(v_{jl} + \Pi^s_{jl}v_s) - \delta_l^i(v_{jk} + \Pi^s_{jk}v_s) = 0,$$

dove si è posto

$$(7') \quad \Pi^i_{jkl} = \frac{\partial \Pi^i_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Pi^i_{jl}}{\partial x^k} + \Pi^i_{sk} \Pi^s_{jl} - \Pi^i_{sl} \Pi^s_{jk}.$$

Se si pone nelle formole (7) $i = l$ e si somma, otteniamo le formole

$$(8) \quad v_{jk} + \Pi^s_{jk} v_s = \frac{v}{n-1} M_{jk},$$

dove si è posto

$$(8') \quad M_{jk} = \Pi_{jk} + \frac{\partial \Pi^i_{jk}}{\partial x^i},$$

le quantità Π_{jk} essendo date dalle formole

$$(9) \quad \Pi_{jk} = \Pi^i_{sj} \Pi^s_{ik}$$

e rappresentano le componenti del tensore quadratico associato al tensore Π^i_{jk} .

In virtù delle (8), le formole (7) si scrivono

$$(10) \quad \Pi^i_{jkl} + \frac{\delta_k^i}{n-1} M_{jl} - \frac{\delta_l^i}{n-1} M_{jk} = 0$$

e rappresentano delle condizioni alle quali devono soddisfare le quantità Π^i_{jk} . Queste condizioni sono necessarie ma non sufficienti. Infatti le equazioni (8) devono avere una soluzione in v non nulla. Considerando le condizioni di integrabilità delle equazioni (8) e tenendo conto delle (10), si ottengono le condizioni

$$(11) \quad \frac{\partial M_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial M_{jl}}{\partial x^k} + M_{sk} \Pi^s_{il} - M_{sl} \Pi^s_{jk} = 0$$

che sono necessarie e sufficienti purchè il sistema (8) abbia una soluzione non nulla. Ora se queste condizioni sono verificate, il sistema (8) è completamente integrabile, dunque la funzione v dipende da $n + 1$ costanti arbitrarie. Abbiamo dunque il teorema:

La condizione necessaria e sufficiente perchè le quantità Π^i_{jk} siano componenti del tensore di una corrispondenza tra due spazi proiettivi è che esse soddisfino alle formule (10) e (11).

Supponiamo adesso che si conosca una soluzione Π^i_{sk} delle equazioni (10) e (11). In questo caso la funzione v è determinata dalle equazioni (8) astrazione fatta da $n + 1$ costanti arbitrarie. Consideriamo allora la funzione u definita dal sistema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^s \partial x^k} + \Gamma^s_{sk} \frac{\partial u}{\partial x^s} = 0$$

dove si tiene conto delle formule (5), dunque abbiamo

$$(11') \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^s \partial x^k} + \Pi^s_{sk} \frac{\partial u}{\partial x^s} + \frac{1}{v} \frac{\partial u}{\partial x^s} \frac{\partial v}{\partial x^k} + \frac{1}{v} \frac{\partial u}{\partial x^k} \frac{\partial v}{\partial x^s} = 0.$$

Consideriamo altresì la funzione

$$\alpha = vu.$$

Ne risulta facilmente, tenendo conto delle (8) che la funzione α soddisfa anche essa alle equazioni (8). Ne risulta dunque che indicando con $v^1, \dots, v^{n+1}$ gli $n + 1$ integrali indipendenti del sistema (8) si possono avere n integrali del sistema (11') prendendo

$$u^1 = \frac{v^1}{v^{n+1}}, \dots, u^n = \frac{v^n}{v^{n+1}}.$$

Ne risulta dunque che le soluzioni del sistema (8), il quale sistema dipende solamente dalla connessione proiettiva, sono coordinate omogenee dello spazio euclideo $E_n(u^1, \dots, u^n)$. Abbiamo dunque il teorema:

Essendo data una soluzione Π^i_{jk} delle equazioni (10) e (11), le quantità Π^i_{jk} si possono considerare componenti di una connessione proiettiva euclidea, la trasformazione puntuale associata essendo determinata, astrazione fatta da una proiettività.

Osserviamo ancora che nel caso in cui si abbia

$$(12) \quad M_{jk} = \Pi_{jk} + \frac{\partial \Pi^i_{jk}}{\partial x^i} = 0$$

le equazioni (8) hanno la soluzione $v = \text{costante}$ ossia esistono delle trasformazioni puntuali a determinante funzionale costante che possiedono il tensore Π^i_{jk} . Evidentemente esistono altresì altre

trasformazioni puntuali aventi lo stesso tensore ma per le quali il determinante funzionale non è costante.

2. Essendo dato il tensore Π^i_{jk} si può considerare non solamente il tensore quadratico Π_{jk} , ma anche altri tensori covarianti

$$\Pi_{jkl} = \Pi^i_{sj} \Pi^s_{gk} \Pi^g_{il}, \dots$$

Possiamo dunque considerare le forme differenziali associate

$$(13) \quad \Psi = \Pi_{jk} dx^j dx^k, \quad \Phi = \Pi_{jkl} dx^j dx^k dx^l, \dots$$

ed è facile avere un'interpretazione geometrica di tali forme. Infatti essendo dato il tensore Π^i_{jk} ed il vettore infinitesimale dx^i , le quantità

$$p_k^i = \Pi^i_{jk} dx^j$$

costituiscono un tensore misto del secondo ordine, cosicchè possiamo considerare in un punto qualunque la proiettività tra vettori definita da questo tensore

$$(14) \quad \rho v^i = p_k^i v^k.$$

Considerando allora l'equazione caratteristica di questa proiettività

$$(15) \quad |p_k^i - \rho \delta_k^i| = 0,$$

si può mostrare, con un metodo analogo a quello utilizzato nella teoria dei gruppi continui, che la somma dei quadrati delle radici (15) è data dalla forma quadratica Ψ , la somma dei cubi delle radici dalla forma Φ , etc. (2).

Osserviamo altresì che se invece della proiettività (14) legata ad un certo vettore dx^i , si considera la corrispondenza quadratica

$$(16) \quad \rho v^i = \Pi^i_{jk} v^j v^k$$

si trova la trasformazione linearizzante del prof. E. ČECH (3) e per $n = 2$ le direzioni coincidenti, ossia definite da

$$\rho v^i = \Pi^i_{jk} v^j v^k$$

(2) Vedasi: A. DOBRESCU, *Asupra ecuației caracteristice a unui grup G_r* , Analele Universității, București, pp. 5-27 (1956).

(3) E. ČECH, *Géométrie projective différentielle des correspondences entre deux espaces*, I, Casopis, 74, p. 37 (1949). Si veda anche: M. VILLA, *Problemi integrali sulle trasformazioni puntuali*, Compositio Mathematica, Vol. 12, p. 138 (1954).

ci danno, come facilmente si verifica, le direzioni caratteristiche definite dalla equazione

$$v^1 \Pi^2_{jk} v^j v^k - v^2 \Pi^1_{jk} v^j v^k = 0.$$

Vediamo adesso in quale caso la corrispondenza (16) per $n = 2$ è degenera e cioè fa corrispondere a qualunque vettore v^i un vettore di direzione fissa v^i . Per questo è necessario e basta che il rapporto

$$\frac{\Pi^1_{jk} v^j v^k}{\Pi^2_{jk} v^j v^k}$$

sia indipendente da v , ossia che siano verificate le condizioni

$$\frac{\Pi^1_{11}}{\Pi^2_{11}} = \frac{\Pi^1_{12}}{\Pi^2_{12}} = \frac{\Pi^1_{22}}{\Pi^2_{22}},$$

formule che si possono anche scrivere, tenendo conto che $\Pi^1_{11} + \Pi^2_{21} = 0$, $\Pi^1_{12} + \Pi^2_{22} = 0$, sotto la forma

$$-\frac{\Pi^2_{21}}{\Pi^2_{11}} = \frac{\Pi^1_{12}}{\Pi^2_{12}} = \frac{\Pi^1_{22}}{-\Pi^1_{12}}.$$

Esse ci mostrano, che il tensore quadratico Π_{jk} è nullo, ossia che la corrispondenza è di terza specie. Ne risulta che la corrispondenza quadratica (16) non è degenera per $n = 2$, se la trasformazione (1) non è di terza specie.

Cerchiamo adesso di vedere se esistono per $n > 2$ delle trasformazioni puntuali per le quali la trasformazione quadratica (16) è degenera in modo che tutte le forme quadratiche sono nulle salvo una, per es. se abbiamo

$$\Pi^{\alpha}_{jk} = 0 \quad (\alpha > 1).$$

In questo caso Π^{α}_{jkl} e le formule (10) ci dicono che le formule (12) sono verificate. D'altra parte, avendo

$$\Pi_k = \Pi^i_{ik} = 0,$$

ne risulta che $\Pi^1_{1k} = 0$, dunque in virtù delle (12) abbiamo $\Pi_{1k} = 0$ e questa ci porta alla conclusione che $\Pi_{kl} = 0$; la forma quadratica associata Ψ è quindi identicamente nulla e abbiamo

$$(17) \quad \frac{\partial \Pi^1_{jk}}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi^1_{jk}}{\partial x^i} = \frac{\partial \Pi^1_{jl}}{\partial x^k} \quad (j, k, l > 1).$$

Ne risulta che otteniamo il più generale tensore avente la proprietà voluta prendendo

$$(18) \quad \Pi^1_{ik} = 0, \quad \Pi^{\alpha}_{jk} = 0, \quad \Pi^1_{jk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k},$$

dove f non dipenda dalla variabile x^1 . La soluzione dipende dunque da una funzione arbitraria di $n - 1$ variabili.

3. Nella mia Nota citata ho dimostrato che le quantità Π^i_{jk} definiscono un tensore rispetto alle trasformazioni proiettive

$$(19) \quad x'^i = \frac{a_j^i x^j + a^i}{a_j^0 x^j + a^j},$$

dunque abbiamo le formule

$$(20) \quad \Pi'^i_{rs} \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} = \Pi^i_{jk} \frac{\partial x'^i}{\partial x^s},$$

proprietà dovuta al fatto che le trasformazioni proiettive soddisfano alle formule

$$(21) \quad \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{1}{n+1} \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \frac{\partial \log D}{\partial x^k} + \frac{1}{n+1} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial \log D}{\partial x^j}$$

dove D è il determinante funzionale della trasformazione (19).

Deriviamo adesso le formule (20). Abbiamo tenuto conto delle (21)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Pi'^h_{rs}}{\partial x'^p} \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} \frac{\partial x'^p}{\partial x^i} + \\ & + \Pi'^h_{rs} \left(\frac{1}{n+1} \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial \log D}{\partial x^i} + \frac{1}{n+1} \frac{\partial x'^r}{\partial x^i} \frac{\partial \log D}{\partial x^s} \right) \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} + \\ & + \Pi'^h_{rs} \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \left(\frac{1}{n+1} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} \frac{\partial \log D}{\partial x^i} + \frac{1}{n+1} \frac{\partial x'^s}{\partial x^i} \frac{\partial \log D}{\partial x^k} \right) = \frac{\partial \Pi_{jk}}{\partial x^i} \frac{\partial x'^h}{\partial x^s} + \\ & + \Pi_{jk}^s \left(\frac{1}{n+1} \frac{\partial x'^h}{\partial x^s} \frac{\partial \log D}{\partial x^i} + \frac{1}{n+1} \frac{\partial x'^h}{\partial x^i} \frac{\partial \log D}{\partial x^s} \right). \end{aligned}$$

Tenendo conto delle (20), queste formule si possono anche scrivere moltiplicando per $\frac{\partial x^i}{\partial x'^h}$ e sommando rispetto a h

$$(22) \quad \frac{\partial \Pi'^h_{rs}}{\partial x'^p} \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} \frac{\partial x'^p}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x'^h} = \frac{\partial \Pi^i_{jk}}{\partial x^i} - \frac{1}{n+1} \Pi^i_{lk} \frac{\partial \log D}{\partial x^j} - \\ - \frac{1}{n+1} \Pi^i_{jk} \frac{\partial \log D}{\partial x^i} - \frac{1}{n+1} \Pi^i_{jl} \frac{\partial \log D}{\partial x^k} + \frac{1}{n+1} \Pi^q_{jk} \delta^i_q \frac{\partial \log D}{\partial x^q}.$$

Facciamo in questa formula $i = l$ e sommiamo. Si ottiene

$$(23) \quad \frac{\partial \Pi'^h{}_{rs}}{\partial x'^h} \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} = \frac{\partial \Pi^i{}_{jk}}{\partial x^i} + \frac{n-1}{n+1} \Pi^q{}_{jk} \frac{\partial \log D}{\partial x^q},$$

formule che ci mostrano che le quantità

$$N_{jk} = \frac{\partial \Pi^i{}_{jk}}{\partial x^i}$$

si trasformano secondo le formule

$$N'{}_{rs} \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} = N_{jk} + \frac{n-1}{n+1} \Pi^q{}_{jk} \frac{\partial \log D}{\partial x^q}$$

per una trasformazione proiettiva (19). Ne risulta che le quantità N_{jk} non costituiscono un tensore e la stessa proprietà vale per la quantità M_{jk} che hanno la stessa legge di trasformazione come le N_{jk} tenendo conto del fatto che le Π_{jk} costituiscono un tensore.

Consideriamo adesso le quantità

$$(24) \quad K^i{}_{jkl} = \frac{\partial \Pi^i{}_{jk}}{\partial x^l} - \frac{1}{n-1} N_{jk} \delta^i{}_l.$$

Tenendo conto delle (22) ne risulta che queste quantità si trasformano secondo le formule

$$(25) \quad K'^h{}_{rsp} \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} \frac{\partial x'^p}{\partial x^l} \frac{\partial x^i}{\partial x'^h} = \\ = K^i{}_{jkl} - \frac{1}{n+1} \Pi^i{}_{lk} \frac{\partial \log D}{\partial x^j} - \frac{1}{n+1} \Pi^i{}_{jk} \frac{\partial \log D}{\partial x^l} - \frac{1}{n+1} \Pi^i{}_{lj} \frac{\partial \log D}{\partial x^k}.$$

Tenendo conto che i tre ultimi termini di questa formula costituiscono insieme una espressione simmetrica in j, k, l , ne risulta che le quantità simmetriche

$$K^i{}_{(jkl)} = \frac{K^i{}_{jkl} + K^i{}_{kjl} + K^i{}_{ljk}}{3}$$

hanno la stessa legge di trasformazione (25). Ne risulta dunque che le quantità

$$(26) \quad \Pi^i{}_{jkl} = K^i{}_{jkl} - K^i{}_{(jkl)}$$

costituiscono un tensore del quarto ordine che conviene chiamare tensore derivato dal tensore $\Pi^i{}_{jk}$. Tuttavia si deve osservare che,

tenendo conto delle (10) e (11), si può far sparire le derivate delle Π^i_{jk} nel tensore Π^i_{jkl} . Si può osservare altresì che il tensore Π^i_{jkl} è nullo se il tensore Π^i_{jk} è costante.

Rimane da vedere se esistono dei tensori derivati di ordine superiore o se esistono altri tensori derivati del primo ordine differenti da $\Pi^i_{jk, l}$. Noi osserviamo solamente che se deriviamo le formule di trasformazione del tensore quadratico

$$\Pi'^r_{rs} \frac{\partial x'^r}{\partial x^s} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} = \Pi_{jk}$$

otteniamo le formule

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Pi'^r_{rs} \frac{\partial x'^r}{\partial x^s} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} \frac{\partial x'^p}{\partial x^l}}{\partial x'^p} = \\ & = \frac{\partial \Pi_{jk}}{\partial x^l} - 2 \frac{\Pi_{jk}}{n+1} \frac{\partial \log D}{\partial x^l} - \frac{1}{n+1} \Pi_{lh} \frac{\partial \log D}{\partial x^j} - \frac{1}{n+1} \Pi_{jl} \frac{\partial \log D}{\partial x^h} \end{aligned}$$

e non si vede come si possano eliminare le derivate di $\log D$ in modo da ottenere in modo semplice un tensore derivato da Π_{jk} .

Vogliamo dimostrare ora che le Π^i_{jk} sono degli invarianti rispetto ad una trasformazione proiettiva delle variabili u^i

$$(27) \quad \bar{u}^i = \frac{\alpha_j^i u^j + \alpha^i}{\alpha_j^0 u^j + \alpha^0}.$$

Infatti abbiamo evidentemente le formule

$$\frac{\partial \bar{u}^i}{\partial x^j} = \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^r} \frac{\partial u^r}{\partial x^j}, \quad \frac{\partial^2 \bar{u}^i}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial^2 \bar{u}^i}{\partial u^r \partial u^s} \frac{\partial u^r}{\partial x^j} \frac{\partial u^s}{\partial x^k} + \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^r} \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^s} \frac{\partial^2 u^r}{\partial x^j \partial x^k}.$$

Indicando con $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ le componenti della connessione affine rispetto alla trasformazione puntuale tra x^i e $\bar{u}^i$, abbiamo, tenendo conto delle formule (21),

$$(\Gamma^s_{jk} - \bar{\Gamma}^s_{jk}) \frac{\partial \bar{u}^s}{\partial u^s} = \left(\frac{1}{n+1} \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^r} \frac{\partial \log d}{\partial u^s} + \frac{1}{n+1} \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^s} \frac{\partial \log d}{\partial u^r} \right) \frac{\partial u^r}{\partial u^j} \frac{\partial u^s}{\partial x^k}$$

dove d è il determinante funzionale della trasformazione (27), formule che ci danno

$$(28) \quad \bar{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \frac{1}{n+1} \delta^i_j \frac{\partial \log d}{\partial x^k} - \frac{1}{n+1} \delta^i_k \frac{\partial \log d}{\partial x^j}.$$

Ne risulta che per una trasformazione proiettiva (27) le componenti di Γ_{sk}^i subiscono una trasformazione proiettiva di WEYL, sicchè le Π_{jk}^i sono invarianti rispetto alla trasformazione (27).

4. Osserviamo che date due trasformazioni puntuali T, T'

$$u^i = u^i(x^1, \dots, x^n); \quad u'^i = u'^i(x'^1, \dots, x'^n)$$

queste trasformazioni sono proiettivamente equivalenti se esiste una trasformazione proiettiva (19) che trasforma il tensore Π_{jk}^i della trasformazione T nel tensore Π'_{jk}^i della trasformazione T' . Infatti se questo avviene si può, utilizzando una trasformazione proiettiva conveniente nello spazio A_n , supporre che la trasformazione proiettiva che trasforma Π_{jk}^i nel Π'_{jk}^i sia la trasformazione identica $x'^i = x^i$. Ne risulta allora che dobbiamo avere

$$(28') \quad \Pi'^i_{jk} = \Pi^i_{jk},$$

ossia che le Π'^i_{jk} sono le stesse funzioni delle x' che le Π^i_{jk} sono delle x . Ne risulta allora che le equazioni (8) delle due trasformazioni T e T' sono identiche, dunque i due spazi E_n e E'_n sono proiettivi. Abbiamo dunque il teorema:

La condizione necessaria e sufficiente perchè due trasformazioni puntuali siano proiettivamente equivalenti è che i tensori Π^i_{jk}, Π'^i_{jk} siano proiettivamente equivalenti (4).

Consideriamo adesso le trasformazioni proiettive in sè di una trasformazione puntuale, ossia le trasformazioni proiettive in sè del tensore Π^i_{jk} . Se

$$(29) \quad x'^i = x^i + \xi^i$$

è una trasformazione infinitesimale proiettiva che lascia invariante il tensore Π^i_{jk} , dobbiamo avere le condizioni

$$(30) \quad \frac{\Pi^i_{jk}}{\partial x^l} \xi^l + \Pi^i_{sk} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^j} + \Pi^i_{js} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^k} = \Pi^i_{jk} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^s}.$$

(4) Per una definizione di applicabilità proiettiva più generale di due trasformazioni puntuali fra piani, si veda: M. VILLA, *L'applicabilité projective de deux transformations ponctuelles*, Conferenza al IV° Congresso dei matematici cecoslovacchi, Praga, 1955 [Czechoslovak Mathematical Journal, vol. 6 (81), p. 435, 1956]; M. VILLA-L. MURACCHINI, *L'applicabilità proiettiva di due trasformazioni puntuali*, questo Bollettino, Ser. III, vol. X, p. 313 (1955).

Se la trasformazione (29) è presa come traslazione lungo l'asse x^r , le Π^i_{jk} non dipendono dalla variabile x^j .

Se esiste un gruppo semplicemente transitivo e abeliano di trasformazioni proiettive in sè di una trasformazione puntuale e se questo gruppo può essere preso come il gruppo delle traslazioni allora le Π^i_{jk} sono delle costanti. Dunque possiamo chiamare trasformazioni puntuali a connessione proiettiva costante, quelle trasformazioni per le quali esiste un sistema di coordinate proiettive, nelle quali Π^i_{jk} sono delle costanti.

Per il caso $n=2$ le trasformazioni puntuali a connessione proiettiva costante sono state determinate recentemente da G. G. VRANCEANU nel caso in cui queste trasformazioni sono di prima specie ⁽⁵⁾ ma si possono ottenere le trasformazioni anche in altri casi. Infatti essendo data la equazione delle direzioni caratteristiche,

$$(31) \quad \Pi^1_{22}(dy)^2 + 3\Pi^1_{12}dy^2dx - 3\Pi^2_{21}dydx^2 - \Pi^2_{11}dx^3 = 0$$

dove Π sono delle costanti, possiamo ridurre quest'equazione alla forma

$$(31') \quad dy[\alpha dy^2 + 3\beta dx^2] = 0$$

dove α e β sono delle costanti, il che significa che abbiamo

$$(32) \quad \Pi^2_{11} = \Pi^1_{12} = \Pi^2_{22} = 0, \quad \Pi^1_{22} = \alpha, \quad \Pi^2_{12} = -\beta, \quad \Pi^1_{11} = \beta$$

con α, β costanti.

Ne risulta che la trasformazione è di prima specie se α e β sono diverse da zero, di seconda specie se $\alpha=0$ e $\beta \neq 0$ e di terza specie se $\alpha \neq 0$ e $\beta=0$.

Scriviamo adesso le equazioni (8). Abbiamo in questo caso

$$(32') \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial v}{\partial x} - 2v\beta^2 &= 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \beta \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial v}{\partial x} + 2\alpha\beta v &= 0. \end{aligned}$$

⁽⁵⁾ Si ritrovano così delle trasformazioni puntuali già note per le quali le curve caratteristiche sono rette passanti per tre punti fissi allineati. Si veda: M. VILLA, *Caratterizzazioni differenziali di enti algebrici*, Rend. del Seminario Mat. e Fis. di Milano, vol. XXI, p. 58, (1950).

È facile vedere che nel caso $\beta \neq 0$ questo sistema si integra ponendo

$$(33) \quad v = me^{\beta x} + ce^{-2\beta x}$$

dove c è una costante e m una funzione di y soddisfacente all'equazione

$$(34) \quad m'' + 3\alpha\beta m = 0.$$

Abbiamo dunque tre soluzioni indipendenti di v prendendo

$$v^1 = m_1 e^{\beta x}, \quad v^2 = m_2 e^{\beta x}, \quad v^3 = e^{-2\beta x},$$

dove m_1, m_2 sono due soluzioni indipendenti della equazione (34).

Perciò si possono prendere come coordinate u^1, u^2 dello spazio E_2 le quantità

$$(35) \quad u^1 = m_1 e^{\beta x}, \quad u^2 = m_2 e^{\beta x}$$

e i secondi membri di queste formule sono delle funzioni intere delle variabili x, y . Se consideriamo adesso una traslazione

$$x' = x + a, \quad y' = y + b$$

si vede che le u^1, u^2 subiscono una trasformazione centro affine, dunque la trasformazione puntuale si muta in una trasformazione puntuale equivalente.

Nel caso in cui $\beta = 0$, dunque nel caso in cui la trasformazione è di terza specie, il sistema (32') ci dà

$$v = ax + b - \frac{\alpha a}{2} y^2 + cy$$

dove a, b, c sono delle costanti arbitrarie. Abbiamo dunque come soluzioni indipendenti

$$v^1 = x - \frac{\alpha}{2} y^2, \quad v^2 = y, \quad v^3 = 1$$

e perciò possiamo prendere come trasformazione puntuale

$$(36) \quad u = x - \frac{\alpha}{2} y^2, \quad v = y$$

che rappresenta una trasformazione cremoniana intera.

Abbiamo dunque il teorema:

Esistono tre tipi di trasformazioni puntuali tra piani a tensore proiettivo costante, di prima, di seconda o di terza specie.

Nel primo tipo esistono due casi a seconda che il prodotto $\alpha\beta$ è positivo o negativo, cioè secondo che le caratteristiche sono immaginarie o reali.

Supponiamo adesso di avere una corrispondenza qualunque tra due piani. Considerando un punto, per esempio l'origine delle coordinate, possiamo in quel punto supporre che il tensore proiettivo sia ridotto alla forma canonica (32) astrazione fatta da termini del primo ordine nelle x, y .

Supponiamo che un tale tensore ammetta un gruppo proiettivo di stabilità e cioè che lasci fisso il punto O . Siccome una trasformazione del gruppo proiettivo di stabilità si scrive

$$(36') \quad X = a_j^i x^j \frac{\partial f}{\partial x^i} + a_i x^i x^j \frac{\partial f}{\partial x^j},$$

i termini d'ordine zero nelle equazioni (30) si scrivono

$$(37) \quad \Pi_{sk}^i a_j^s + \Pi_{js}^i a_k^s - \Pi_{jk}^s a_s^i = 0$$

dove Π_{sk}^i sono le quantità (32). Queste formule per $i=j, k=1$ dicono che dobbiamo avere

$$(38) \quad \beta a_1^1 = 0.$$

Per $i=1, j=k=2$, otteniamo

$$(38') \quad 2\alpha a_2^2 - \alpha a_1^1 = 0.$$

Per $i=j=k=2$ e $i=2, j=k=1$ otteniamo

$$(38'') \quad 2\beta a_2^1 + \alpha a_1^2 = 0 \quad \beta a_1^2 = 0.$$

Quanto alle equazioni (37) per $i=j=1, k=2$ e $i=j=2, k=1$ esse sono verificate se le (38) e (39) sono verificate.

Ne risulta che nel caso in cui nel punto O le direzioni caratteristiche sono distinte, sicchè $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$, dobbiamo avere

$$(39) \quad a_1^1 = a_2^2 = a_1^2 = a_2^1 = 0$$

e perciò la trasformazione infinitesimale (37) contiene solamente termini del secondo ordine. In questo caso abbiamo

$$\xi^s = a_j x^j x^s$$

e i termini del primo ordine nelle formule (30) si scrivono

$$\Pi_{sk}^i(a_j x^s + \delta_j^s a_p x^p) + \Pi_{js}^i(a_k x^s + \delta_k^s a_p x^p) \equiv \Pi_{jk}^s(a_p x^p \delta_s^i + a_s x^i),$$

equazione che si scrive anche

$$(38''') \quad \Pi_{jk}^i a_p x^p + a_j x^s \Pi_{sk}^i + a_k x^s \Pi_{js}^i - \Pi_{jk}^s a_s x^i = 0.$$

Per $i = j = k = 2$ abbiamo

$$(39') \quad \beta a_2 = 0, \quad \alpha a_1 = 0.$$

Abbiamo altresì per $i = 1, j = k = 2$ e $i = 2, j = k = 1$.

$$(39'') \quad \alpha a_2 = 0, \quad \beta a_1 = 0.$$

Le equazioni (39') e (39'') ci dicono che se una almeno delle costanti α, β non è nulla allora dobbiamo avere $a_1 = a_2 = 0$. Abbiamo dunque il teorema:

Il gruppo proiettivo di trasformazioni in sé di una corrispondenza fra piani non può avere delle trasformazioni infinitesimali del secondo ordine.

Tenendo conto anche delle formule (39), ne risulta il teorema:

Una corrispondenza di prima specie fra piani non può avere trasformazioni che lascino fisso un punto.

Ne risulta altresì che il gruppo massimo di una corrispondenza di prima specie può avere al più due parametri e allora il gruppo è semplicemente transitivo.

Il massimo è raggiunto come abbiamo visto più sopra dalle trasformazioni a tensore proiettivo costante ma ci sono anche altre trasformazioni che hanno questa proprietà come ci mostra l'esempio che mi è stato dato dal prof. MURACCHINI. Si tratta della trasformazione puntuale

$$(40) \quad u = x^k, \quad v = y^l$$

dove k, l sono numeri qualunque.

Facendo la trasformazione

$$(41) \quad x' = \lambda x, \quad y' = \mu y$$

dove λ, μ sono costanti qualunque, abbiamo

$$u' = x'^k = \lambda^k x^k = \lambda^k u; \quad v' = y'^l = \mu^l v.$$

Il gruppo a due parametri (41) costituisce dunque un gruppo di trasformazioni in sè della trasformazione (40) e questo gruppo non si può ridurre con una trasformazione proiettiva al gruppo delle traslazioni. Quanto alla connessione affine definita dalla trasformazione (40) abbiamo

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1-k}{x}, \quad \Gamma^1_{22} = \frac{1-l}{y}, \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{11} = 0.$$

Ne risulta che la connessione proiettiva è data dalle formole

$$\Pi^1_{12} = -\frac{1}{3} \frac{1-l}{y}, \quad \Pi^1_{11} = -\Pi^2_{21} = \frac{1}{3} \frac{1-k}{x},$$

$$\Pi^2_{22} = -\Pi^1_{12} = \frac{1}{3} \frac{1-l}{y}, \quad \Pi^1_{22} = \Pi^2_{11} = 0$$

e l'equazione delle direzioni caratteristiche si scrive

$$dx dy \left[(1-l) \frac{dy}{y} - (1-k) \frac{dx}{x} \right] = 0.$$

Se $k=l$ le curve caratteristiche sono le rette parallele agli assi coordinati e quelle passanti per l'origine.

Sarebbe dunque interessante trovare tutte le trasformazioni puntuali di prima specie che possiedono un gruppo massimo G_2 di trasformazioni in sè. Supponiamo adesso che la corrispondenza di seconda specie, dunque che si abbia $\alpha=0$, $\beta \neq 0$. In questo caso le equazioni (38') e (39) ci dicono che possiamo avere $\alpha_2 \neq 0$, dunque la trasformazione (36') si scrive

$$(42) \quad X_j = x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + a_i x^i x' \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Tenendo conto delle (39') e (39'') ne risulta che non possono esistere due trasformazioni (42) perchè allora sarebbe una trasformazione del secondo ordine il che non può avere luogo. Dunque ne risulta che le trasformazioni puntuali di seconda specie possono avere al più un gruppo di trasformazioni in sè a tre parametri. Questo massimo è raggiunto dalle trasformazioni a tensore proiettivo costante, cioè dalle trasformazioni

$$u = e^{\beta x}, \quad v = y e^{\beta x}.$$

Infatti in questo caso il gruppo

$$x' = x + a, \quad y' = ay + b$$

lascia invariante la trasformazione.

Consideriamo adesso il caso delle trasformazioni puntuali di terza specie dunque $\beta = 0$ e $\alpha \neq 0$. In questo caso le equazioni (38') e (38'') ci danno

$$a_1^2 = 0, \quad a_2^1 = 2a_2^2.$$

Possiamo dunque avere le due trasformazioni del gruppo di stabilità, astrazione fatta dai termini del secondo ordine, sotto la forma

$$X = x^2 \frac{\partial f}{\partial x^1}, \quad Y = 2x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2}.$$

Ne risulta che il gruppo massimo di trasformazioni in sè della trasformazione puntuale può essere a quattro parametri e questo massimo è raggiunto dalle (6) che possiedono come si può facilmente vedere il gruppo G_4 dato dalle formule

$$(43) \quad x' = c^2x + ay + b, \quad y' = cy + d$$

dove c, a, b, d sono delle costanti.

Abbiamo dunque il teorema:

Una trasformazione puntuale tra piani proiettivi può possedere un gruppo di movimenti avendo al più 2, 3 o 4 parametri a seconda che la trasformazione è di prima, di seconda o di terza specie e questi massimi sono raggiunti almeno nel caso degli spazi a tensore proiettivo costante.

Naturalmente sarebbe interessante di trovare tutte le trasformazioni puntuali tra piani che ammettono gruppi massimi di movimenti proiettivi e in generale gruppi di movimenti proiettivi e transitivi.

Riguardo al caso $n > 2$, tenendo conto di un teorema che io ho dimostrato per gli spazi a connessione affine costante ne risulta che in un punto possiamo scegliere le coordinate in modo di avere ⁽⁶⁾

$$\Pi^2_{11} = 1, \quad \Pi^{\alpha}_{11} = 0 \quad (\alpha \neq 2).$$

Tenendo conto di questa riduzione alla forma canonica, possiamo dimostrare che la corrispondenza non può avere trasforma-

⁽⁶⁾ G. VRANCEANU, *Leçons de géométrie différentielle*, vol. II, Bucarest, 1957, Cap. VI.

zioni proiettive infinitesimali del secondo ordine. Infatti in questo caso le formule (38'') per $i=2, j=k=1$ si scrivono

$$\alpha_p x^p + 2a_s [x^1 + \Pi^2_{s1} x^s] - x^2 a_2 = 0 \quad (s > 1).$$

Ne risulta uguagliando a zero il coefficiente di x^1 che $a_1 = 0$ e poi i coefficienti di $x^2, \dots, x^n$ ci dicono che abbiamo $a_s = \dots = a_n = 0$ e l'equazione (38'') per $i=j=k=1$ ci dice che $a_2 = 0$, e il nostro asserto è dimostrato.

Consideriamo adesso le formule (37) per $j=k=1$. Abbiamo $2\Pi^i_{s1} a_1^s - a_2^i = 0$, sicchè le equazioni (37) rappresentano almeno n equazioni indipendenti. Di più se si considerano le (37) per $i=2, j > 2$ e $k=1$ si ottengono altre $n-2$ equazioni indipendenti. Ne risulta dunque il teorema:

Una corrispondenza tra spazi proiettivi a n dimensioni può avere al più un gruppo di trasformazioni in sè con $n^2 - n + 2$ parametri.

Questo massimo è raggiunto dalle trasformazioni cremoniane

$$u^1 = x^1, \quad u^2 = x^2 - \frac{(x^1)^2}{2}, \quad u^i = x^i \quad (i > 2).$$

Vediamo dunque che se la corrispondenza tra due spazi proiettivi è proiettiva, sicchè il tensore Π^i_{jk} è nullo, il gruppo di trasformazioni in sè contiene $n^2 + 2n$ parametri, essendo il gruppo proiettivo stesso, mentre se Π^i_{jk} non è un tensore nullo, il gruppo massimo può avere al più $n^2 - n + 2$ parametri e questo massimo è raggiunto.

5. Prima di terminare vogliamo vedere in quali condizioni un tensore proiettivo Π^i_{jk} definito in una vicinanza dello spazio proiettivo $P_n(x^1, \dots, x^n)$ può essere prolungato ad un'altra vicinanza. Supponiamo per esempio che le Π^i_{jk} sono funzioni intere delle variabili $x^1, \dots, x^n$ dunque delle serie convergenti per qualunque sistema finito delle variabili $x^1, \dots, x^n$. Si tratta di vedere se esse possono essere prolungate in un'altra vicinanza dello spazio proiettivo, per esempio quello che contiene il punto all'infinito della coordinata x^1 . Ponendo

$$(44) \quad x'^1 = \frac{1}{x^1}, \quad x'^2 = \frac{x^2}{x^1}, \quad \dots, \quad x'^n = \frac{x^n}{x^1},$$

si tratta di vedere se le Π'^i_{jk} sono regolari per $x'^1 = 0$.

Siccome abbiamo le formule inverse

$$(44') \quad x^1 = \frac{1}{x'^1}, \quad x^2 = \frac{x'^2}{x'^1}, \quad \dots, \quad x^n = \frac{x'^n}{x'^1},$$

possiamo scrivere le formule

$$\Pi'^s_{jk} \frac{\partial x^i}{\partial x'^s} = \Pi^i_{rs} \frac{\partial x^r}{\partial x'^j} \frac{\partial x^s}{\partial x'^k}.$$

Queste formule ci danno per $i = 1$

$$(45) \quad \begin{aligned} \Pi'^1_{jk} &= -\Pi^1_{jk}, \quad \Pi'^1_{1k} = \frac{1}{x'^1} \Pi^1_{1k} + \frac{\Pi^1_{rk} x'^r}{x'^1} \\ \Pi'^1_{11} &= -\frac{\Pi^1_{11}}{(x'^1)^2} - 2\Pi^1_{1r} \frac{x'^r}{(x'^1)^2} - \Pi^1_{rs} \frac{x'^r x'^s}{x'^1} \end{aligned}$$

mentre per $i > 1$ ci danno le formule

$$(46) \quad \begin{aligned} \Pi'^i_{jk} &= \frac{1}{x'^1} [\Pi^i_{jk} - \Pi^1_{jk} x'^i] \\ \Pi'^i_{1k} &= \frac{1}{(x'^1)^2} [x'^i \Pi^1_{1k} + x'^i \Pi^1_{rk} x'^r - \Pi^i_{rk} x'^r - \Pi^i_{1k}] \\ \Pi'^i_{11} &= \frac{1}{(x'^1)^3} [\Pi^i_{11} + 2\Pi^i_{1r} x'^r + \Pi^i_{rs} x'^r x'^s] - \\ &\quad - \frac{x'^i}{(x'^1)^3} [\Pi^1_{11} + 2\Pi^1_{1r} x'^r + \Pi^1_{rs} x'^r x'^s], \end{aligned}$$

dove gli indici i, j, k, r, s sono maggiori dell'unità.

Evidentemente nei secondi membri delle formule (45) e (46) dobbiamo mettere nelle quantità Π al posto di $x^1, \dots, x^n$ i loro valori dati dalle formule (44). Le formule (45) e (46) ci dicono che nel caso in cui il tensore Π è costante, le quantità Π' non possono avere tutte dei valori finiti per $x'^1 = 0$. Ne risulta dunque il teorema:

Una corrispondenza a tensore proiettivo costante non può prolungarsi nello spazio proiettivo fuori dalla vicinanza $(x^1, \dots, x^n)$ nella quale le Π sono delle costanti.

Le formule (45) e (46) ci mostrano altresì che solamente in condizioni molto speciali una corrispondenza si può prolungare allo spazio proiettivo intero, questione sulla quale ritorneremo più tardi.