Bollettino
Unione Matematica Italiana

Alois Švec

Sulla teoria delle congruenze di rette.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.3, p. 446–457.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_3_446_0>

Sulla teoria delle congruenze di rette.

Relazione di ALOIS ŠVEC (a Liberec - Cecoslovacchia)

Sunto. - *Questa Relazione riguarda alcuni risultati recenti ottenuti in Cecoslovacchia sulla teoria delle congruenze di rette e loro superficie focali.*

Summary. - *This article is concerned with some recent results obtained in Czechoslovakia in the projective differential geometry of line congruences and their focal surfaces.*

1. In questo lavoro ci si propone di riferire su alcuni risultati ottenuti recentemente in Cecoslovacchia nella teoria delle congruenze di rette e loro superficie focali; tali ricerche sono state iniziate dal prof. EDUARD ČECH.

Nel maggio 1957 ho tenuto alcune conferenze presso l'Istituto di Geometria «L. Cremona» dell'Università di Bologna e questa Relazione contiene un riassunto dei risultati esposti.

Mi sia permesso di ringraziare il Direttore dell'Istituto di Geometria prof. MARIO VILLA per avermi invitato a tenere queste conferenze offrendomi così la preziosa occasione di conoscere direttamente l'attività svolta dal suo Istituto.

2. Si definisce (v. [10]) nel modo seguente una *congruenza a connessione proiettiva*:

Sia dato un dominio σ nel piano euclideo (σ non gioca che un ruolo di spazio dei parametri); a ciascun punto (u, v) faccio corrispondere uno spazio proiettivo locale $S_3(u, v)$, ed in questo una retta $p(u, v)$. Siano ora (u_1, v_1), (u_2, v_2) due punti del dominio σ; allora ad ogni arco γ che li unisce corrisponde una omografia fra gli spazi $S_3(u_1, v_1)$ ed $S_3(u_2, v_2)$. In ciascun spazio locale scelgo un riferimento locale A_1, A_2, A_3, A_4 (con la nota condizione $[A_1A_2A_3A_4] = 1$) in modo che la retta p passi per A_1, A_2. L'insieme delle omografie fra gli spazi locali è dato dalle equazioni

$$\begin{aligned} &\nabla A_i = \omega_{ij} A_{ij} \qquad i, j = 1, \dots, 4; \\ &\omega_{ij} = a_{ij}(u, v)du + b_{ij}(u, v)dv; \\ &\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} + \omega_{44} = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

in modo analogo a quello che si adotta per gli spazi a connessione proiettiva.

Per le congruenze di rette si possono definire in modo evidente le *superficie sviluppabili*, i *fuochi* e i *piani focali*. Si possono scegliere i riferimenti locali relativi ad una congruenza non parabolica in modo che le (1) siano:

$$\begin{aligned}
\nabla A_1 &= \omega_{11}A_1 + (hdu + \alpha_1 dv)A_2 + duA_3, \\
\nabla A_2 &= (\alpha_2 du + kdv)A_1 + \omega_{22}A_2 + dvA_4, \\
\nabla A_3 &= \omega_{31}A_1 + \omega_{32}A_2 + \omega_{33}A_3 + (\beta_2 du + hdv)A_4, \\
\nabla A_4 &= \omega_{41}A_1 + \omega_{43}A_2 + (kdu + \beta_1 dv)A_3 + \omega_{44}A_4,
\end{aligned} \tag{2}$$

dove $dudv = 0$ sono le sviluppabili ed A_1, A_2 i fuochi. I cambiamenti ammessi dei riferimenti locali sono

$$\begin{aligned}
A_1 &= \rho\bar{A}_1, \\
A_2 &= \sigma\bar{A}_2, \\
A_3 &= \alpha_{31}\bar{A}_1 + \rho u'^{-1}\bar{A}_3, \\
A_4 &= \alpha_{32}\bar{A}_2 + \sigma v'^{-1}\bar{A}_4 \\
\rho^2\sigma^2 &= u'v',
\end{aligned} \tag{3}$$

i cambiamenti dei parametri

$$u = u(\bar{u}), \quad v = v(\bar{v}); \tag{4}$$

si è posto $u' = \dfrac{du}{d\bar{u}}$ *ecc. Per le (3), (4) si ha*

$$\begin{aligned}
\bar{h} &= \rho^{-1}\sigma u'h, & \bar{k} &= \rho\sigma^{-1}v'k, \\
\bar{\alpha}_1 &= \rho^{-1}\sigma v'\alpha_1, & \bar{\alpha}_2 &= \rho\sigma^{-1}u'\alpha_2, \\
\bar{\beta}_1 &= \rho\sigma^{-1}u'^{-1}v'^2\beta_1, & \bar{\beta}_2 &= \rho^{-1}\sigma u'^2 v'^{-1}\beta_2.
\end{aligned} \tag{5}$$

Si introduce la congruenza correlativa (o la *dualizzazione*) della congruenza $\mathfrak{L}$ considerando ogni spazio locale come uno spazio correlativo S_3^* dove la retta p^* è determinata dal fascio di piani aventi per asse la retta p; l'insieme delle omografie fra gli spazi S_3^* coincide con l'insieme delle omografie fra gli spazi S_3. Se si introducono, come d'abitudine, i piani analitici E_i per la dualizzazione $\mathfrak{L}^*$ si hanno le equazioni fondamentali

$$\begin{aligned}
\nabla E_3 &= -\omega_{33}E_3 - (kdu + \beta_1 dv)E_4 - duE_1, \\
\nabla E_4 &= -(\beta_2 du + hdv)E_3 - \omega_{44}E_4 - dvE_2, \\
\nabla E_1 &= -\omega_{31}E_3 - \omega_{41}E_4 - \omega_{11}E_1 - (\alpha_2 du + kdv)E_2, \\
\nabla E_2 &= -\omega_{32}E_3 - \omega_{42}E_4 - (hdu + \alpha_1 dv)E_1 - \omega_{22}E_2.
\end{aligned} \tag{6}$$

La dualizzazione ha come fuochi E_3, E_4 ed è in *corrispondenza sviluppabile* con $\mathfrak{L}$. Si possono *orientare* le congruenze $\mathfrak{L}$ ed $\mathfrak{L}^*$ chiamando primi (risp. secondi) fuochi A_1 ed E_3 (risp. A_2 ed E_4). È chiaro che i fuochi descrivono una *varietà di König*. Le asintotiche delle varietà (A_1) ed (E_4) - o risp. (A_2) ed (E_3) - sono

$$\beta_2 du^2 + 2h du dv + \alpha_1 dv^2 = 0, \quad \alpha_2 du^2 + 2k du dv + \beta_1 du^2 = 0; \tag{7}$$

essendo le sviluppabili date da $du dv = 0$, il significato geometrico delle curve

$$\beta_2 du^2 + \alpha_1 dv^2 = 0, \qquad \alpha_2 du^2 + \beta_1 dv^2 = 0 \tag{8}$$

è noto.

3. I più semplici *invarianti differenziali* di una congruenza sono le *forme elementari*

$$i_1 = \frac{h\, du}{\alpha_1 dv}, \quad i_2 = \frac{k dv}{\alpha_2 du}, \quad i_1^* = \frac{k du}{\beta_1 dv}, \quad i_2^* = \frac{h dv}{\beta_2 du}. \tag{9}$$

Gli *invarianti scalari* sono:

$$I = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1\beta_2}, \quad I_1 = i_1 i_2^* = \frac{h^2}{\alpha_1\beta_2}, \quad I_2 = i_2 i_1^* = \frac{k^2}{\alpha_2\beta_1}. \tag{10}$$

Il primo è l'invariante di WÄLSCH. Le forme più importanti sono le *forme puntuale, planare e focale di 1^a^ e 2^a^ specie:*

$$\varphi = \alpha_1\alpha_2 du dv, \quad \varphi^* = \beta_1\beta_2 du dv, \quad F_1 = \alpha_1\beta_1 \frac{dv^3}{du}, \quad F_2 = \alpha_2\beta_2 \frac{du^3}{dv}, \tag{11}$$

introdotte dal prof. E. ČECH ([2] - [4]). Per il significato geometrico v. [4]. Introduco due altre forme

$$\psi_1 = (a_{22} - a_{44}) du, \qquad \psi_2 = (b_{11} - b_{33}) dv \tag{12}$$

il cui significato geometrico è finora ignoto.

4. Siano date due congruenze $\mathfrak{L}$ ed $\mathfrak{L}^x$ a connessione in corrispondenza puntuale sviluppabile. Il prof. ČECH ha trovato (in [4]) il significato geometrico dell'uguaglianza di ciascuna delle forme (11) per $\mathfrak{L}$ ed $\mathfrak{L}^x$ quando queste siano immerse in uno spazio proiettivo ordinario, ma tale significato sussiste anche per le congruenze a connessione proiettiva.

Servendosi della rappresentazione delle congruenze sulla quadrica di KLEIN ho ottenuto (in [7]) un altro significato; la Nota [10] contiene un significato basato sulla proprietà delle transformazioni linearizzanti delle corrispondenze fra le superficie focali.

Per la deformazione proiettiva d'ordine 2 delle congruenze $\mathfrak{L}$ ed $\mathfrak{L}^x$ a connessione si ha il seguente teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè le congruenze $\mathfrak{L}$ ed $\mathfrak{L}^x$ siano in deformazione proiettiva (d'ordine due) è che esse siano nello stesso tempo in deformazione

1. *puntuale* $(\varphi = \varphi^x)$,
2. *planare* $(\varphi^* = \varphi^{x*})$,
3. *focale di 1° specie* $(F_1 = F_1^x)$,
4. *focale di 2° specie* $(F_2 = F_2^x)$,
5. *che conservi le curve* (8_1),
6. *che conservi le curve* (8_2),
7. *definita da* $\psi_1 = \psi_1^x$,
8. *definita da* $\psi_2 = \psi_2^x$;

le deformazioni 1. - 6. non sono indipendenti: se le due congruenze sono in tre deformazioni esse sono pure in tutte sei. Le congruenze di rette $\mathfrak{L}$ ed $\mathfrak{L}^x$ sono in deformazione proiettiva, si possono quindi specializzare i riferimenti locali in modo che l'omografia che realizza questa deformazione sia della forma $KA_i^x = A_i (i = 1, \dots, 4)$. Le dualizzazioni $\mathfrak{L}^*$ ed $\mathfrak{L}^{x*}$ sono pure in deformazione proiettiva e l'omografia che la realizza è $KE_i^x = E_i (i = 1, \dots, 4)$.

Questo teorema è una generalizzazione diretta del teorema del prof. ČECH di cui parlerò nel seguito.

5. Siano date due congruenze $\mathfrak{L}$ ed $\mathfrak{L}^x$ in corrispondenza sviluppabile C. Si può definire la *deformazione puntuale* (cioè $\varphi = \varphi^x$) in questo modo: È possibile estendere C a una corrispondenza puntuale C_p fra $\mathfrak{L}$ ed $\mathfrak{L}^x$ in modo che per ogni (u, v) esista un'omografia H fra $S_3(u, v)$ ed $S_3^x(u, v)$ tale che per ogni punto $z \in p(u, v)$, $K(u, v)$ sia tangente alla corrispondenza C_p relativa al punto z considerato; si dice che H realizza la deformazione puntuale. La *deformazione planare* può essere definita come la deformazione puntuale delle dualizzazioni $\mathfrak{L}^*$ ed $\mathfrak{L}^{x*}$.

Le congruenze $\mathfrak{L}$ ed $\mathfrak{L}^x$ a connessione siano in deformazione proiettiva e l'omografia che realizza questa deformazione sia $KA_i^x = A_i$. $\mathfrak{L}$ ed $\mathfrak{L}^x$ sono necessariamente in deformazione puntuale e planare; per le omografie che le realizzano, si ha

$$
(13)\quad
\begin{aligned}
&HA_1^x=A_1, && H^*A_1^x=A_1,\\
&HA_2^x=\quad A_2, && H^*A_2^x=\quad A_2,\\
&HA_3^x=\beta_{31}A_1+(h-h^x)A_2+A_3, && H^*A_3^x=-\beta_{31}A_1-(h-h^x)A_2+A_3,\\
&HA_4^x=(k-k^x)A_1+\beta_{42}A_2\quad +A_4, && H^*A_4^x=-(k-k^x)A_1-\beta_{42}A_2\quad +A_4,
\end{aligned}
$$

$$
\beta_{31}=a_{11}-a_{22}-a_{11}^x+a_{22}^x,\ \beta_{42}=b_{22}-b_{11}-b_{22}^x+b_{11}^x.
$$

Chiamerò la deformazione proiettiva fra $\mathfrak{L}$ ed $\mathfrak{L}^x$ *debolmente semisingolare di prima (seconda) specie* se K realizza il contatto analitico d'ordine 1 delle prime (seconde) superficie focali. La deformazione debolmente semisingolare di prima e seconda specie si chiama *debolmente semisingolare.*

TEOREMA. – *Se $\mathfrak{L}$ ed $\mathfrak{L}^x$ sono in deformazione proiettiva le cinque affermazioni seguenti sono equivalenti:*

a) *la deformazione proiettiva è debolmente semisingolare di prima specie,*

b) $\mathrm{i}_1=\mathrm{i}_1^x$,

c) $\mathrm{i}_2^*=\mathrm{i}_2^{*x}$,

d) $\mathrm{I}_1=\mathrm{I}_1^x$,

e) *le omografie* K, H, H* *danno la stessa omografia nel fascio delle tangenti alla prima superficie focale.*

Si ha un teorema analogo per la semisingolarità di seconda specie.

$\mathfrak{L}$ ed $\mathfrak{L}^x$ sono in *deformazione proiettiva singolare* (risp. *fortemente singolare*) se K realizza la deformazione d'ordine 2 (risp. 3) delle superficie focali. Se $\mathfrak{L}$ ed $\mathfrak{L}^x$ sono in deformazione singolare, le omografie K, H, H^x coincidono, ma non viceversa; vedere nel seguito il riassunto dei risultati del prof. ČECH per le congruenze di S_3.

Se $\mathfrak{L}$ ed $\mathfrak{L}^x$ sono in deformazione singolare e K realizza il contatto d'ordine 3 delle prime superficie focali, la deformazione è fortemente singolare. Si ha il

TEOREMA FONDAMENTALE. – *Due congruenze di rette a connessione proiettiva in deformazione proiettiva fortemente singolare sono identiche.*

6. Sia data una congruenza a connessione proiettiva $\mathfrak{L}$, a questa congruenza associo quello che chiamerò lo *spazio di Klein a connessione proiettiva* $\mathcal{K}(\mathfrak{L})$: a ciascun $(u, v)\in\sigma$ faccio corrispondere uno spazio S_5 con una quadrica $\mathcal{K}(u, v)$ che rappresenta le rette dello spazio locale $S_3(u, v)$ della retta $p(u, v)$. Il riferimento locale in $S_5(u, v)$ sia formato dalle rette $p_{ij} = [A_i A_j]$, $i < j$; si ha su ciascuna $\mathcal{K}(u, v)$ un punto $p = p_{12}$ che rappresenta la retta p di $\mathfrak{L}$. Nell'insieme degli spazi S_5 sia introdotta la connessione

$$(14) \qquad \nabla p_{ij} = \omega_{ik} p_{kj} + \omega_{jk} p_{ik} \qquad (p_{ij} = -p_{ij})$$

di evidente significato geometrico. Qui $\mathcal{K}(\mathfrak{L})$ è naturalmente una varietà di KÖNIG dove gli spazi locali sono $S_5(u, v)$ con i centri $p(u, v)$. La corrispondenza fra $\mathfrak{L}$ ed $\mathfrak{L}^x$ dà luogo ad una corrispondenza fra $\mathcal{K}(\mathfrak{L})$ e $\mathcal{K}(\mathfrak{L}^x)$; considerando le omografie tangenti e le trasformazioni linearizzanti corrispondenti si possono ottenere nuovi significati geometrici delle deformazioni considerate come pure delle uguaglianze $\psi_i = \psi_i^x$ (v. [9] e [7]).

7. Finora ho studiato le congruenze di rette come un oggetto a sè, ma è possibile studiare le congruenze immerse nello *spazio rigato* (a quattro dimensioni) *a connessione proiettiva.*

Lo spazio rigato a connessione proiettiva è dato in modo evidente dalle equazioni

$$(15) \qquad \nabla A_i = \omega_{ij} A_j\,;\ i, j = 1, \ldots, 4\,;\ \sum_1^4 \omega_{ii} = 0\,;$$

dove ω_{ij} sono forme di PFAFF in $du_1, \ldots, du_4$. Suppongo $[\omega_{13}\omega_{14}\omega_{23}\omega_{24}] \neq 0$, in modo analogo al caso di uno spazio a connessione proiettiva si possono verificare le condizioni d'integrabilità

$$(16) \qquad [d\omega_{ij}] = [\omega_{ik}\omega_{kj}] + R_{ij}^{\alpha\mu\beta\nu}[\omega_{\alpha\mu}\omega_{\beta\nu}]$$

dove la somma è fatta per $k = 1, 2, 3, 4$; $\alpha, \beta = 1, 2$ e $\mu, \nu = 3, 4$.

Ora la congruenza è evidentemente data dalle equazioni $u_i = u_i(u_1, v_2)$, $i = 1, \ldots, 4$. Per l'analisi dettagliata dei differenti tipi di congruenze cfr. la mia Nota [9].

Ho risolto — nel caso generale, con risposta negativa — la questione di sapere se una congruenza in uno spazio rigato a connessione proiettiva è in deformazione proiettiva d'ordine 2 con una congruenza d'uno spazio rigato piano; questione assai analoga a quella considerata dal prof. MURACCHINI nel suo lavoro *Sulla applicabilità proiettiva delle superficie...* (Czech. Math. Journal 5, (80), 1955, pp. 274-288).

8. Voglio ora comunicare gli importanti risultati del prof, ČECH ([4] e [5]) sulla *deformazione proiettiva delle congruenze di rette nello spazio proiettivo* S_3, dei quali i risultati precedenti sono una generalizzazione. Dalle condizioni d'integrabilità per una congruenza in S_3 segue inoltre $h = k = 0$. *Per le congruenze* $\mathfrak{L}$ *si possono imporre arbitrariamente due condizioni indipendenti, che possono dipendere pure da* u, v, *fra le forme* φ, φ^*, F_1, F_2; *tali congruenze esistono sempre e dipendono da sei funzioni arbitrarie di una variabile.* Ad es. le congruenze, per cui u, v sono i parametri sviluppabili e per le quali $\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = f_i(u, v)$ $(i = 1, 2;$ f_i arbitrarie) dà le asintotiche della i^{esima} superficie focale, esistono e dipendono da sei funzioni d'una variabile. Le congruenze R possono essere definite come le congruenze per le quali si possono scegliere u, v in modo che $du^2 - dv^2 = 0$ siano le asintotiche; quindi *il teorema del prof Čech contiene come caso particolare il risultato di E. Cartan.* La deformazione proiettiva delle congruenze si decompone in sei prime deformazioni di cui al teorema del n. 4, le condizioni $\psi_i = \psi_i^x$ essendo sempre soddisfatte per una corrispondenza sviluppabile. La nozione di deformazione singolare è stata introdotta nel 1920 (E. Cartan, *Sur le problème général de la déformation,* C. R. du Congr. Strasbourg): se l'omografia K (che realizza la deformazione proiettiva) realizza pure la deformazione proiettiva d'ordine 2 delle prime superficie focali; noi parliamo della deformazione proiettiva singolare. *La condizione necessaria e sufficiente perchè la deformazione sia singolare è che le omografie* K, H, H^* (v. n. 5) *coincidono.* Ma è possibile, non essendo C singolare, che esistano fuori della p dei punti pei quali K, H ed H^* coincidono; questi punti formano allora uno dei due piani focali e noi parliamo di *deformazione semisingolare* (di 1ª e 2ª). *Le deformazioni semisingolari dipendono da nove funzioni d'una variabile.*

9. Siano $\mathfrak{L}$ ed $\mathfrak{L}^x$ in deformazione proiettiva C, sia $KA_1^x = A_i$ l'omografia osculatrice C_p una estensione puntuale data dalle equazioni $C_p A_i^x = A_i$, $(i = 1, 2)$. *Le deformazioni singolari sono caratterizzate dalla proprietà d'essere totalmente asintotiche*, cioe di trasformare (mediante C_p) asintoticamente ciascuna superficie rigata sghemba contenuta in $\mathfrak{L}$. Se la deformazione non è semisingolare esiste una *decomposizione* (*canonica*) di $\mathfrak{L}$ in ∞^1 superficie rigate sghembe che corrispondono asintoticamente alle loro immagini in $\mathfrak{L}^x$. Tralascio di considerare il caso della deformazione semisingolare. La Memoria [5] contiene i risultati del prof. Čech sulla deformazione proiettiva delle congruenze W. Si può considerare la dualizzazione d'una congruenza W come una deformazione proiettiva di modo che nel caso generale si può definire la *decomposizione canonica* di $\mathfrak{L}$ in ∞^1 superficie rigate sghembe.

Diremo che $\mathfrak{L}$ è una congruenza *a dualizzazione asintotica* se la decomposizione canonica corrisponde a una delle due famiglie di asintotiche delle superfie focali. Si ha il seguente risultato:

Ciascuna congruenza W ammette al più ∞^6 deformate proiettive che non appartengono ad alcun complesso lineare e che non sono a dualizzazione asintotica. Ciascuna congruenza W a dualizzazione asintotica ammette delle deformate proiettive che sono a dualizzazione asintotica e che dipendono da una funzione arbitraria di una variabile: essa ammette pure una deformata proiettiva che è una congruenza appartenente ad un complesso lineare.

10. Passiamo allo studio delle deformazioni proiettive delle congruenze di rette immerse in $S_n (n \geq 4)$; cfr. [6]); la soluzione per $n \geq 5$ è facile: *la deformazione proiettiva è equivalente alla deformazione puntuale* (definita come al n. 5). In S_4 le congruenze che sono in deformazione proiettiva d'ordine 2 con una congruenza data dipendono da 8 funzioni d'una variabile; è possibile decomporre la deformazione proiettiva in deformazioni semplici.

In [8] studio più in dettaglio la deformazione delle congruenze in S_5. Gli spazi tangenti della congruenza $\mathfrak{L}$ lungo le sue rette inducono nello spazio duale la congruenza $\mathfrak{L}^*$ chiamata la sua *dualizzazione.* I fuochi della dualizzazione sono gli iperpiani osculatori delle superficie focali di $\mathfrak{L}$. Si possono definire anche le forme puntuali, planari e focali; su ogni superficie focale si ha un tritessuto di *quasi-asintotiche* γ_{23}. Due congruenze $\mathfrak{L}$ ed $\mathfrak{L}^x$ sono in *bideformazione* proiettiva del 2° ordine se per ciascuna coppia di rette corrispondenti esiste un'omografia che realizza simultaneamente il contatto d'ordine 2 per le congruenze $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}^x$ ed $\mathfrak{L}^*$, $\mathfrak{L}^{x*}$. *La bideformazione è equivalente all'insieme delle deformazioni: puntuale, planare, focali e quasi asintotiche. Le coppie di congruenze in bideformazione esistono e dipendono da una funzione di due variabili.*

Non è difficile estendere questi risultati alle congruenze situate in uno spazio di dimensione pari o dispari e trovare ad es. gli elementi lineari proiettivi; ma i calcoli sono assai lunghi.

11. Non è difficile generalizzare la teoria delle congruenze di rette situate in S_3 allo studio di un sistema $S_{n-1}(u_1, \ldots, u_n)$ di spazi subordinati ad $n-1$ dimensione d'uno spazio S_{2n-1}, supponendo che la varietà dei fuochi $V^n_{n-2} \subset S_{n-1}$ si decomponga in n S_{n-2} indipendenti. La nota [14] studia il caso speciale $n=2$ delle *famiglie* ∞^3 (*o complessi*) *di piani di* S_5 del tipo considerato; le equazioni fondamentali relative si possono scrivere nella forma

$$
(17)\qquad
\begin{aligned}
dA_1 &= \omega_{11}A_1 + a_1\omega_2A_2 + b_1\omega_3A_3 + \omega_1A_4 \\
dA_2 &= c_1\omega_1A_1 + \omega_{22}A_2 + e_1\omega_3A_3 + \omega_2A_5 \\
dA_3 &= f_1\omega_1A_1 + g_1\omega_2A_2 + \omega_{33}A_3 + \omega_3A_6 \\
dA_4 &= \omega_{41}A_1 + \omega_{42}A_2 + \omega_{43}A_3 + \omega_{44}A_4 + a_2\omega_1A_5 + b_2\omega_1A_6 \\
dA_5 &= \omega_{51}A_1 + \omega_{52}A_2 + \omega_{53}A_3 + c_2\omega_2A_4 + \omega_{55}A_5 + e_2\omega_2A_6 \\
dA_6 &= \omega_{61}A_1 + \omega_{62}A_2 + \omega_{63}A_3 + f_2\omega_3A_4 + g_2\omega_3A_5 + \omega_{66}A_6 ;
\end{aligned}
$$

i complessi considerati dipendono da sei funzioni di due variabili.

Chiamo (A_i), $i = 1, 2, 3$, le *varietà focali*; si può decomporre ogni varietà focale in uno strato di superficie ciascuna delle quali ha per piano tangente proprio il piano del complesso, mentre ciascuna superficie dello strato considerato ha una rete coniugata alle tangenti $[A_iA_j]$, $[A_iA_k]$.

I complessi che sono in deformazione puntuale con un complesso dato dipendono da diciotto funzioni d'una variabile ; si può decomporre la deformazione puntuale in sei deformazioni semplici. Lo scopo di tale lavoro è quello di mostrare, con un esempio particolare almeno, dettagliatamente la situazione che viene descritta, rimanendo però sulle generali, nel lavoro di L. MURACCHINI, *Sulle trasformazioni puntuali inviluppi di omografie*, Boll. Un. Mat. (3), 8, 390-398 (1953).

12. I lavori [11] - [13] danno una soluzione completa del problema della *deformazione proiettiva d'ordine 3 della superficie, con una rete coniugata, in* S_5.

Il prof. A. TERRACINI ha trovato (*Nuove ricerce sull'incidenza di piani infinitamente vicini*, Atti Torino, vol. 73, 1937-38) le condizioni analitiche perchè una superficie F a rete coniugata in S_5 sia proiettivamente deformabile (deformazione C_3).

Ho trovato le condizioni geometriche per la deformabilità. Supponiamo che le due trasformate di LAPLACE (y_1), (y_{-1}) d'una superficie (y) siano esse pure delle superficie. Allora *la condizione necessaria e sufficiente per la deformabilità proiettiva della superficie* (y) *è che le due congruenze* $[yy_1]$, $[yy_{-1}]$ *siano delle congruenze* W (definite dalla corrispondenza delle quasi-asintotiche γ_{23} delle superficie focali). Si dimostra senza difficoltà che in tale caso ogni congruenza della successione di LAPLACE generata da (y) è W. Non è difficile dare le condizioni geometriche nel caso in cui una o due trasformate di LAPLACE degenerino.

Le superficie deformabili con due trasformate di LAPLACE *non degeneri dipendono da dieci funzioni d'una variabile; se ne degenera una sola le superficie dipendono da sette funzioni d'una variabile; se degenerano entrambe, le superficie deformabili sono le soluzioni d'un sistema completamente integrabile*

$$
(18) \qquad \begin{aligned} &x_{uv} = 0\,, \\ &x_{vvv} = kx + U_1 x_u + V_1 x_v + U_2 x_{uu} + V_2 x_{vv} + x_{uuu}\,, \\ &k = \text{cost.}\,, \qquad U_i = U_i(u), \qquad V_j = V_j(v) \end{aligned}
$$

e dipendono da quattro funzioni d'una variabile. Ho trovato altre proprietà caratteristiche delle superficie (18).

Si può dare una *costruzione geometrica* di tale superficie analoga a quella trovata da B. SEGRE per le reti R che hanno due trasformate di LAPLACE degeneri (B. SEGRE, *Intorno alla teoria delle superficie proiettivamente deformabili e alle equazioni deformabili ad esse collegate.* Mem. della Acc. Italia, Vol. II, N. 3, 1931). Scegliamo in S_5 due piani, sghembi o aventi un punto comune al più, α_2 e α_2' e per ciascuno di essi conduciamo uno spazio a tre dimensioni ($\alpha_2 \subset \alpha_3$ e $\alpha_2' \subset \alpha_3'$). Sia O un punto intersezione di α_3 e α_3' e scegliamo due curve γ e γ' (non piane) passanti per O e immerse rispettivamente in α_3, α_3'. Sia ora un punto arbitrario di γ', β_3 lo spazio congiungente α_2 con P e Q la traccia della retta OP su α_2'; sia $\bar{\gamma}$ la proiezione della γ nello spazio β_3 dal punto Q. Al variare di P su γ', il luogo delle proiezioni considerate è una superficie (18).

Tutta la teoria delle superficie deformabiii a rete coniugata di S_5 ha molte analogie con la teoria delle reti R.

13. Infine voglio esporre alcuni risultati di carattere diverso utilizzando la teoria delle corrispondenze linearizzanti delle trasformazioni allo studio delle superficie.

In uno spazio P_3 a connessione proiettiva si consideri una superficie α. Il relativo riferimento mobile può essere particolarizzato (E. CARTAN) in modo che risulti:

$$
(19) \qquad \begin{aligned} &\omega_3 = 0,\ \omega_{13} = (1 + h)\omega_2\,,\ \omega_{23} = (1 - h)\omega_1\,, \\ &\omega_{12} = \beta\omega_1 + (\cdot)\omega_2\,,\ \omega_{21} = (\cdot)\omega_1 + \gamma\omega_{21}\,, \\ &[(\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33})\omega_1\omega_2] = 0\,. \end{aligned}
$$

La quantità h è un invariante (la torsione) della superficie. Le curve di DARBOUX generalizzate, introdotte da E. CARTAN sono date da

$$
(20) \qquad \varphi_0 \equiv \beta\omega_1^3 + \gamma\omega_2^3 = 0, \quad \psi_0 \equiv (1 - h)\beta\omega_1^3 + (1 + h)\gamma\omega_2^3 = 0\,.
$$

Si può definire per la superficie α una superficie duale α^* la quale è una varietà di KÖNIG. Studiando la corrispondenza asintotica fra α e α^* si riesce a trovare il significato geometrico dei due tritessuti di caratteristiche di α e α^*

$$(21) \qquad (1+h)\beta\omega_1{}^3 + (1-h)\gamma\omega_2{}^3 = 0, \quad \beta\omega_1{}^3 - \gamma\omega_2{}^3 = 0$$

e ciò fornisce il significato geometrico dell'invariante h e delle curve (20).

Introduco poi gli *elementi lineari proiettivi* di α e α^*

$$(22) \qquad \begin{aligned} \varphi &= \frac{\beta\omega_1{}^3 + \gamma\omega_2{}^3}{2\omega_1\omega_2}, \\ \varphi^* &= \frac{(1-h)^2\beta\omega_1{}^3 + (1+h)^2\gamma\omega_2{}^3}{2(1-h^2)\omega_1\omega_2} \end{aligned}$$

i quali vengono conservati appunto dalle deformazioni proiettive della superficie α e, rispettivamente, α^*.

Se ci si limita alle superficie immerse nello spazio proiettivo ordinario, allora ho introdotto (v. [15]) le corrispondenze K-linearizzanti d'ordine 3 della trasformazione fra α e α^*, nella quale si esige il contatto del 3° ordine fra le proiezioni da una retta di curve corrispondenti.

Per mezzo di tale nozione ho trovato il significato geometrico della omografia

$$\alpha_0 x + \alpha_1 x_u + \alpha_2 x_v \to \alpha_1[x x_u x_{uv}] - \alpha_2[x x_v x_{uv}] +$$
$$+ \left(\alpha_1 \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} + \alpha_2 \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} + 3\alpha_0\right)[x x_u x_v]$$

la quale ad ogni retta canonica, di parametro λ, fa corrispondere la retta canonica di parametro $1 + 3\lambda$.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. ČECH, *Déformation ponctuelle des congruences de droites* (in russo con un riassunto dettagliato in francese), « Czech. Math. Journal », 5(80), 1955, pp. 234-237.

[2] — — *Deformazioni di congruenze di rette*, « Rend. del Sem. Mat. dell'Università e Politecnico di Torino », 14, 1954-55, pp. 55-66.

[3] — — *Congruenze di rette*, « C. I. M. E. », Corso estivo di Geom. proiettivo differenziale, Pavia, 1955.

[4] — — *Transformations développables des congruences de droites*, « Czech. Math. Journal », 6(81), 1956, pp. 260-286.

[5] — — *Déformation projective des congruences W*, « Czech. Math. Journal » 6(81), 1956, pp. 401-414.

[6] A. Švec, *Déformation projective des congruences de droites dans S_n*, » Czech. Math. Journal », 5(80), 1955, pp. 546-558.

[7] — — *Rémarques sur la théorie des déformations des congruences de droites*, « Czech. Math. Journal » 7(82), 1957, pp. 66-72.

[8] — — *Les congruences de droites dans S_5*, « Pubblicazioni della Fac. di Scienze Brno » 832, 1957.

[9] — — *Congruences de droites dans les espaces réglés à connexion projective*, « Czech. Math. Journal » 7(82), 1957, pp. 96-114.

[10] — — *Congruences de droites à connexion projective*. Non pubblicato.

[11] — — *Déformation projective de certaines surfaces à réseau conjugué*, « Czech. Math. Journal », 5(80), 1955, pp. 559-572.

[12] — — *Déformations projectives des surfaces à réseau conjugué dans S_5*. « Czech. Math. Journal » 6(81), 1956, pp. 118-124.

[13] — — *Problémes d'existence de la déformation projective des surfaces de* S_5 *possédant un réseau conjugué*, « Czech. Math. Journal », 6(81), 1956, pp. 125-138.

[14] — — *Certaines enveloppes des familles ∞^3 d'homographies dans S_5* « Czech. Math. Journal » 7(82), 1957, pp. 57-65.

[15] — — *L'élement linéaire projectif d'une surface plongée dans l'espace à connexion projective*. Non pubblicato.

[16] — — *Rémarque sur les droites canoniques d'une surface*. Non pubblicato.