Bollettino
Unione Matematica Italiana

Gian Carlo Corazza, Carlo Montebello

Trasformate di Hankel e di Fourier nel calcolo dei diagrammi di radiazione.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.3, p. 436–438.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_3_436_0>

Trasformate di Hankel e di Fourier nel calcolo dei diagrammi di radiazione (*).

Nota di Gian Carlo Corazza e Carlo Montebello (a Roma)

Sunto. - *Si dimostra che il diagramma di radiazione di una antenna ad apertura circolare può essere scritto sotto forma di una serie nel cui elemento generico figura il prodotto di una trasformata di* Hankel *per una trasformata di* Fourier.

Summary. - *The radiation pattern of a circular aperture antenna can be expressed as a series, whose typical element contains the product of a* Hankel *transform by a* Fourier *transform.*

1. Il diagramma di radiazione di un'antenna può ottenersi moltiplicando il diagramma relativo all'elemento tipico, dipolo elettrico o magnetico, per un fattore, cui si dà il nome di fattore spaziale o di cortina, che tiene conto della distribuzione nello spazio e delle ampiezze relative dei vari elementi (1).

È già stato mostrato (2) che, nel caso di un'antenna ad apertura rettangolare, il fattore di cortina può esprimersi, qualora siano soddisfatte alcune ipotesi, come prodotto di due trasformate di Fourier. Nel presente articolo si dimostra che, per una apertura circolare, ipotesi analoghe portano a scrivere il fattore di cortina sotto forma di una serie nel cui elemento generico figura il prodotto di una trasformata di Hankel per una trasformata di Fourier. Tale serie si riduce, in un caso particolare, ad una serie di Fourier.

2. Si consideri una apertura circolare piana di raggio unitario. Il punto P, in cui si vuol calcolare il campo, è individuato, in coordinate sferiche, dalla terna r, θ, φ; quello generico sulla apertura, Q, ha coordinate polari ρ, γ.

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Superiore delle Poste e delle Telecomunicazioni - Roma.

(1) S. A. Schelkunoff, *Electromagnetic Waves*, Van Nostrand, New York, 1951, Cap. IX, 3.

(2) J. F. Ramsey, *Fourier Transforms in Aerial Theory*, Marconi Review, 139, (1946).

Indicata con $f(\rho, \gamma)$ la funzione di illuminazione ([3]), che per il momento supporremo reale, il fattore di cortina è il modulo della seguente quantità complessa:

$$\Psi(\theta, \varphi) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(\rho, \gamma) \exp[ju\rho \cos(\gamma - \varphi)]\rho d\rho d\gamma, \tag{1}$$

in cui è $u = \beta \operatorname{sen} \theta$, con $\beta = 2\pi/\lambda$ e λ lunghezza d'onda. Poichè il punto P è situato a grande distanza da Q, le coordinate θ e φ che compaiono nella (1) sono indipendenti dalle variabili di integrazione.

Tenuto conto dello sviluppo ([4]):

$$\exp(j z \cos\alpha) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n j^n J_n(z) \exp(-jn\alpha), \tag{2}$$

la (1) si può scrivere:

$$\Psi = \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} f(\rho, \gamma) \left\{ \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n j^n J_n(u\rho) \exp[-jn(\gamma - \varphi)] \right\} d\gamma. \tag{3}$$

Essendo la serie (2) totalmente convergente ([5]), se si fa l'ipotesi che la $f(\rho, \gamma)$ sia esprimibile come prodotto di due funzioni limitate $f_1(\rho)$ e $f_2(\gamma)$, nella (3) si può integrare termine a termine e si ha:

$$\Psi = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n j^n \exp(jn\varphi) \int_0^1 f_1(\rho) J_n(u\rho)\rho d\rho \int_0^{2\pi} f_2(\gamma) \exp(-jn\gamma) d\gamma. \tag{4}$$

([3]) Tale funzione coincide con una delle componenti cartesiane del campo elettrico o magnetico sull'apertura. Se le componenti sono più di una, per ciascuna di esse si avrà una funzione di illuminazione generalmente differente dalle altre ed in tal caso il calcolo del fattore di cortina andrà condotto separatamente per ogni componente.

([4]) La (2) si ottiene ponendo $t = j \exp(-j\alpha)$, nella classica formula generatrice delle funzioni di Bessel:

$$\exp\left[\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n t^n J_n(z),$$

per la quale si veda, ad es.: G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge, 1922, 2. 1.

([5]) G. N. Watson, op. citata, 2. 1.

Ponendo:

$$F_1(\rho) = \begin{cases} f_1(\rho) & \text{per} \quad 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 & \text{per} \quad \rho > 1 \end{cases} \tag{5}$$

$$F_2(\gamma) = \begin{cases} f_2(\gamma) & \text{per} \quad 0 \leq \gamma \leq 2\pi \\ 0 & \text{per} \quad \gamma < 0 \text{ e } \gamma > 2\pi \end{cases} \tag{6}$$

la (4) può anche essere scritta:

$$\Psi = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \, j^n \exp(jn\varphi) \int_0^\infty F_1(\rho) J_n(u\rho)\rho d\rho \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(\gamma) \exp(-jn\gamma) d\gamma. \tag{7}$$

Gli integrali che compaiono al secondo membro sono, nell'ordine, trasformate di HANKEL e di FOURIER [6]; ne discende che il fattore di cortina è esprimibile mediante una serie il cui elemento generico contiene il prodotto di due trasformate, una di HANKEL, l'altra di FOURIER.

3. La (7) può essere scritta:

$$\Psi = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \, C_n \exp(jn\varphi), \tag{8}$$

avendo posto:

$$C_n = j^n \int_0^\infty F_1(\rho) J_n(u\rho)\rho d\rho \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(\gamma) \exp(-jn\gamma) d\gamma. \tag{9}$$

Per ogni valore $\overline{\theta}$ di θ, la (7) si riduce quindi allo sviluppo in serie di FOURIER della funzione $\Psi(\overline{\theta}, \varphi)$.

4. Il metodo ora esposto, si estende senza difficoltà al caso di funzioni di illuminazione complesse, cioè tali che sia:

$$f(\rho, \gamma) = f_r(\rho, \gamma) + jf_i(\rho, \gamma). \tag{10}$$

Infatti, essendo $f_r(\rho, \gamma)$ ed $f_i(\rho, \gamma)$ funzioni reali, basterà applicare per ciascuna di esse quanto si è detto in precedenza.

Gli autori desiderano ringraziare il Prof. A. GHIZZETTI per gli utili suggerimenti.

[6] Tabelle delle suddette trasformate si trovano in: A. ERDÉLYI; W. MAGNUS; F. OBERHETTINGER; F. G. TRICOMI, *Tables of Integrals Transforms*, Mc Graw-Hill, New York, 1954, Cap. III e Cap. VIII.