Bollettino
Unione Matematica Italiana

Carlo Pucci

A proposito di un teorema riguardante la misura di involucri di insiemi.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.3, p. 420–421.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_3_420_0>

A proposito di un teorema riguardante la misura di involucri di insiemi.

Nota di CARLO PUCCI (a Roma)

Sunto. - *Si corregge la dimostrazione di un teorema precedentemente pubblicato.*

Summary. - *Correction of the proof of a theorem previously published.*

Sia X un insieme dello spazio euclideo E_n, ad n dimensioni sia X_ρ, $\rho > 0$, l'insieme dei punti di E_n che distano da X meno di ρ. Indichiamo con $\mathfrak{F}X_\rho$ la frontiera di X_ρ, con $f(\rho)$ la misura secondo, LEBESGUE di X_ρ; poniamo

$$\bar{\mu}(X) = \lim_{\rho \to 0}{}'' \frac{f(\rho)}{2\rho}, \qquad \underline{\mu}(X) = \lim_{\rho \to 0}{}' \frac{f(\rho)}{2\rho}.$$

Se $\bar{\mu}(X) = \underline{\mu}(X)$, X è misurabile secondo MINKOVSKI e $\mu(X)$ indica la sua misura.

Fissato comunque un insieme limitato X *in* E_n, *eccettuato un insieme di valori di* ρ *di misura nulla, per* $\rho > 0$ *risulta* $f(\rho)$ *derivabile*, $\mathfrak{F}X_\rho$ *misurabile secondo Minkovski e*

$$f'(\rho) = \mu(\mathfrak{F}X_\rho).$$

La dimostrazione di questo teorema data in una precedente nota (1) non è corretta come mi ha fatto gentilmente osservare MARTIN KNESER che mi ha pure indicato il seguente procedimento.

Sia x_2 un punto con distanza x positiva dall'insieme X. Associamo ad ogni punto x_2 esterno ad X un punto x_0 di $\mathfrak{F}X$ con $\overline{x_2x_0} = x$. Fissato un numero λ maggiore di 1 indichiamo con x_1 il punto del segmento di estremi x_0 e x_2 tale che $\lambda\overline{x_1x_0} = x$. Indichiamo con y_2 un altro punto esterno ad X ed analogamente con y_0 il suo associato su $\mathfrak{F}X$ e con y_1 il punto del segmento di estremi y_2 e y_0 tale che $\lambda\overline{y_1y_0} = \overline{y_0y_2}$. M. KNESER ha provato che

$$x_2y_2 \leq \lambda x_1y_1 \text{ (2)}. \tag{1}$$

Fissato un numero positivo ρ se x_2 varia nell'insieme $X_{2\lambda\rho-\rho} - X_\rho$ il corrispondente punto x_1 varia in un certo insieme L e dalla (1) segue che la corrispondenza così stabilita fra i due insiemi è biunivoca. Si osserva facilmente che $L \subset (\mathfrak{F}X_\rho)_{\rho-\frac{\rho}{\lambda}}$ e quindi per la (1)

$$f(2\lambda\rho - \rho) - f(\rho) \leq \lambda^n \text{ misura } (\mathfrak{F}X_\rho)_{\rho-\frac{\rho}{\lambda}}.$$

Dividendo primo e secondo membro per $2(\lambda - 1)\rho$ e facendo tendere λ ad 1 se esiste $f'(\rho)$ si ottiene

$$f'(\rho) \leq \underline{\mu}(\mathfrak{F}X_\rho).$$

Come è già stato osservato nella nota indicata in (1) $f(\rho)$ ha quasi ovunque derivata per $\rho > 0$ e

$$f'(\rho) \geq \overline{\mu}(\mathfrak{F}X_\rho);$$

pertanto il teorema è provato e così rimane valida la dimostrazione del teorema successivo.

(1) *Alcune proprietà degli involucri*, « Rend. Acc. Lincei » (8); 20 (1956), pag. 297.

(2) MARTIN KNESER, *Uber den Rand von Parallelkörpern* « Math Nachr. » 5, (1951) pag. 251.