Bollettino
Unione Matematica Italiana

Nicola Ginatempo

Su un teorema di Betti.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.2, p. 312–315.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_2_312_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Su un teorema di Betti.

Nota di NICOLA GINATEMPO (a Messina)

Sunto. - *Come al n. 1 e 2.*

1. È noto che tutte le soluzioni in numeri interi relativi di una equazione indeterminata di primo grado

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = c \tag{1}$$

con $a_1 . a_2, \ldots, a_n, c$ interi relativi e gli a_k primi tra loro, si ottengono da una di esse ad es. dalla $\bar{x}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ con le formule

$$x_r = \bar{x}_r + \sum_{s=1}^{n} p_{rs} a_s \qquad (r = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

al variare dei parametri p_{rs}, in tutti i modi possibili nell'insieme dei numeri relativi, ma con la ulteriore restrizione che i valori dei parametri suddetti formino una matrice emisimmetrica (cioè $p_{rr} = 0$, $p_{rs} = - p_{sr}$).

2. Nel caso di due variabili x_1, x_2 e cioè con riferimento alla equazione

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = c$$

con a_1, a_2 primi tra loro, le formule (2) diventano del tipo

$$(3) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \bar{x}_1 + a_2 t \\ x_2 &= \bar{x}_2 - a_1 t \end{aligned}$$

e tutte le soluzioni in numeri interi si ottengono al variare di t nell'insieme dei numeri interi relativi.

Le formule (3) sono d'immediata dimostrazione ([1]). Le (2) invece non sono immediate e furono date dal BETTI senza dimostrazione ([2]) nel 1850.

Successivamente ([3]) le formule di BETTI furono dimostrate dal GIUDICE ([4]) e dal MIGNOSI ([5]) e poi riprese dal PETTINEO ([3]); tuttavia non riteniamo inutile darne qui un'altra dimostrazione che dal punto di vista didattico si presenta più semplice e quindi più vantaggiosa.

3. Da quanto precede risulta che il teorema di BETTI è vero per $n = 2$ cioè nel caso della equazione indeterminata in due variabili.

Ammettiamo, perciò, che il teorema sia vero per l'equazione indeterminata in $n - 1$ variabili e dimostriamolo, di conseguenza vero nel caso generale dell'equazione in n variabili.

Infatti se $\bar{x}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ è una soluzione della equazione indeterminata (1), che necessariamente esiste ([6]), avendo supposto che essa abbia i coefficienti primi tra loro, ne segue

$$(4) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k \bar{x}_k = c$$

Se $\widehat{x}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ è un'altra soluzione, di valori interi relativi, della (1), diversa dalla prima le differenze $\widehat{x}_k - \bar{x}_k$ per

([1]) Cfr. BERTRAND J., *Traité elementaire d'algebre,* trad. it. Firenze 1862, p. 291.

([2]) BERTRAND J., l. c. in ([1]) p. 293.

([3]) Cfr. PETTINEO B., *Sull'analisi indeter. ecc.*, le Matematiche Catania, VI, p. 33.

([4]) Cfr. GIUDICE F., « Giorn. mat. di Battaglini » v. 36, p. 227.

([5]) Cfr. MIGNOSI G., *Le formule di Betti.* Es. Mat. Circ. mat. Catania v. 8, a. 1936.

([6]) Cfr. CALAPSO R., *Matematiche complementari,* fasc. I.

$k = 1, 2, \ldots, n$ non sono tutte nulle, ne segue

$$(5) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k \widehat{x}_k = c$$

e possiamo supporre che sia ad es. $\bar{x}_n - \widehat{x}_n \neq 0$ e sottraendo dalla (5) la (4)

$$(6) \quad a_1(\widehat{x}_1 - \bar{x}_1) + a_2(\widehat{x}_2 - \bar{x}_2) + \ldots + a_{n-1}(\widehat{x}_{n-1} - \bar{x}_{n-1}) = - a_n(\widehat{x}_n - \bar{x}_n).$$

Sia d il massimo comun divisore dei numeri $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ (certamente diverso da zero); esso, come è noto ([6]), deve appartenere al modulo dei detti numeri cioè si ha

$$(7) \qquad d = a_1 m_1 + a_2 m_2 + \ldots + a_{n-1} m_{n-1}$$

con $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$ interi relativi noti.

Dividendo la (6) per il prodotto $d(\widehat{x}_n - \bar{x}_n)$, che, per le ipotesi fatte, è diverso da zero si ha

$$\frac{\frac{a_1}{d}(\widehat{x}_1 - \bar{x}_1) + \ldots + \frac{a_{n-1}}{d}(\widehat{x}_{n-1} - \bar{x}_{n-1})}{\widehat{x}_n - \bar{x}_n} = - \frac{a_n}{d}$$

in cui i coefficienti del primo numeratore risultano primi tra loro come lo sono anche a_n e d; ne segue che i termini della frazione a primo membro sono equimultipli secondo un fattore intero relativo opportuno t dei termini corrispondenti della frazione a secondo membro e cioè

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_1(\widehat{x}_1 - \bar{x}_1) + \ldots + a_{n-1}(\widehat{x}_{n-1} - \bar{x}_{n-1}) = a_n t d \\ x_n - \bar{x}_n = - t d \end{array} \right. .$$

Eliminiamo d tra la (7) e la seconda delle (8) e abbiamo

$$(9) \qquad x_n = x_n - a_1 t m_1 - a_2 t m_2 - \ldots - a_{n-1} t m_{n-1} .$$

Moltiplichiamo la (7) per $a_n t$ e confrontiamo con la prima delle (8), allora

$$(10) \qquad \widehat{x}_k - \bar{x}_k = a_n t m_k \qquad k = 1, 2, \ldots, n - 1$$

è una soluzione particolare della equazione indeterminata in $n - 1$ variabili

$$(11) \qquad \sum_{k=1}^{n-1} a_k (x_k - \bar{x}_k) = a_n t d$$

ma per una siffatta equazione il teorema di BETTI è stato ammesso vero e cioè tutte e sole le soluzioni in numeri interi relativi della (11) sono date dalle formule

$$x_k - \bar{x}_k = a_n t m_k + \sum_{h=1}^{n-1} p_{kh} a_h \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

al variare dei parametri p_{kh} in tutti i modi possibili nell'anello assoluto ma con la ulteriore condizione che i valori di questi parametri formino una matrice, di ordine $n-1$, emissimetrica (cioè $p_{kk} = 0$, $p_{kh} = -p_{hk}$).

Se a queste si unisce la (9) si ha facilmente

$$(12)\qquad \begin{aligned} x_k &= \bar{x}_k + p_{k1} a_1 + p_{k2} a_2 + \ldots + p_{k,n-1} a_{n-1} + (t m_k) a_n \\ x_n &= \bar{x}_n + (-t m_1) a_1 + (-t m_2) a_2 + \ldots + (-t m_{n-1}) a_{n-1} + p_{nn} a_n \end{aligned}$$

in cui $p_{nn} = 0$ e per $tm_1 = p_{n,1}$, $tm_2 = p_{n2}$, ..., $tm_{n-1} = p_{n,n-1}$ coincidono con le (2) che si dovevano dimostrare.

Questioni proposte.

A quali condizioni debbono soddisfare i numeri interi a, b, c, d, e, f, in guisa da aversi

$$a + b + c = d + e + f, \qquad abc = def$$

e posto $2s = a + b + c = d + e + f$ risultino simultaneamente quadrati perfetti i numeri

$$s-a, \quad s-b, \quad s-c, \quad s-d, \quad s-e, \quad s-f$$

Es. $a = 370$, $b = 493$, $c = 845$, $d = 325$, $e = 529$, $f = 754$.

A. MOESSNER