Bollettino
Unione Matematica Italiana

Ettore Carruccio

I fondamenti dell'analisi matematica nel pensiero di Agostino Cauchy.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.2, p. 298–307.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_2_298_0>

I fondamenti dell'analisi matematica nel pensiero di Agostino Cauchy (1)

di ETTORE CARRUCCIO (a Torino).

Sunto. - *Le esigenze del rigore nell'analisi matematica si affermano nell'opera di* A. CAUCHY, *sulla base della concezione dell'infinito matematico potenziale, con l'esatta definizione dei concetti fondamentali del calcolo, e la precisazione delle condizioni e dei valori per cui sussistono le singole formule.*

(1) Conferenza tenuta il 16 maggio 1957 all'Università di Torino, subito dopo quella del Prof. A. TERRACINI, pubblicata in questo stesso fascicolo.

Dopo quasi cent'anni dalla sua dipartita dalla terra, la nobile figura di AGOSTINO CAUCHY ci è venuta incontro evocata dal Prof. TERRACINI sullo sfondo dell'Università di Torino, e sorge in noi vivo il desiderio d'intrattenerci ancora con lo spirito del sommo Scienziato.

Tante cose egli avrebbe da dirci sugli sterminati campi delle matematiche da lui coltivati, sulle verità ultrasensibili da lui predilette, sulla carità fraterna, sulle bellezze della natura e dell'arte.

Ma un cenno anche fugace ai molteplici aspetti della figura di CAUCHY richiederebbe molto più tempo di quello di cui disponiamo e rischierebbe di essere troppo frammentaria ed incompleta.

È forse quindi meglio scegliere un aspetto soltanto della mente poliedrica del nostro matematico, nella speranza di cogliere in modo meno inadeguato alcune linee essenziali del suo pensiero.

Uno degli aspetti più luminosi dell'attività matematica di CAUCHY è costituito dalla sua sistemazione dei fondamenti dell'analisi infinitesimale con un mirabile rigore che trova riscontro nel rigore morale che il nostro matematico volle imporre alla sua vita.

I problemi dell'infinito sono stati oggetto di profonde meditazioni fin dall'Antichità, da diversi punti di vista, tra i quali si distinguono: l'infinito inteso come assoluto (attributo della Divinità), l'infinito fisico in senso spaziale e temporale, infine nel mondo del pensiero puro, l'infinito matematico. Nella considerazione del quale si presentano due indirizzi diversi a seconda che si ammetta la legittimità, sia pure con opportune cautele, dell'introduzione dell'infinito matematico attuale, oppure questo venga respinto e si accetti soltanto l'infinito matematico potenziale.

Quest'ultima posizione venne strenuamente difesa da ARISTOTELE, ed ha il suo coronamento nel metodo di esaustione, con cui gli antichi rendevano rigorosi i loro procedimenti infinitesimali.

Invece per esigenze euristiche, vedute filosofiche diverse da quelle affermate da ARISTOTELE, ed influenza del mondo dell'arte, dal metodo degli indivisibili nella scuola galileiana all'indirizzo leibniziano, la costruzione del calcolo infinitesimale nell'era moderna si è in un primo tempo prevalentemente delineata secondo le ispirazioni derivanti dall'infinito matematico attuale.

Anche della presente conferenza sarà pubblicato un testo più completo nel vol. 16° dei « Rendiconti del Seminario matematico » dell'Università e Politecnico di Torino.

Tale indirizzo particolarmente propizio da un punto di vista euristico, doveva successivamente essere superato di fronte ai paradossi cui si andava incontro specialmente nell'uso di serie divergenti ed indeterminate, e per il maturare di una più vigile coscienza critica. Questa, preannunciata da LAGRANGE, GAUSS, CARNOT, RUFFINI, si doveva affermare vittoriosamente con ABEL, BOLZANO e specialmente con CAUCHY ed i suoi continuatori.

Come riferisce il MOIGNO nelle « *Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral* », CAUCHY prendendo in esame i paradossi dell'infinito (la successione dei numeri interi si può porre in corrispondenza biunivoca con una sua parte opportunamente scelta, p. es. l'insieme dei quadrati) conclude che non è lecito considerare attualmente esistente un'infinità di oggetti, d'accordo con la veduta di ARISTOTELE sull'argomento (e in disaccordo con GALILEO).

I rigorosi criteri adottati nei fondamenti e negli sviluppi dell'analisi infinitesimale dal CAUCHY così vengono da lui spiegati nell'Introduzione al « *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique* » pubblicato a Parigi nel 1821 (pagg. II - IV dell'ed. di Parigi 1897).

« Per quanto riguarda i metodi ho cercato di dar loro tutto il rigore che si esige in geometria, in modo di non ricorrere in alcun caso alle ragioni ricavate dalla generalità dell'algebra » (estendendo cioè l'applicazione delle formule algebriche al di fuori del campo per il quale sono state dimostrate). « Le ragioni di questo genere — continua CAUCHY — quantunque ammesse abbastanza comunemente, sopratutto nel passaggio dalle serie convergenti alle serie divergenti, e dalle quantità reali alle espressioni immaginarie, non possono essere considerate, a mio parere, che come induzioni atte a far presentire talvolta la verità, ma che poco si accordano con l'esattezza così vantata delle scienze matematiche. Si deve anche osservare ch'esse tendono a far attribuire alle formule algebriche un'estensione indefinita, mentre in realtà la maggior parte di queste formule sussistono unicamente sotto certe condizioni, e per certi valori delle quantità in esse racchiuse. Determinando queste condizioni e questi valori, e fissando in maniera precisa il senso delle notazioni di cui mi servo, faccio sparire ogni incertezza ».

In queste parole di CAUCHY vi è tutto un programma di ricostruzione dell'analisi su salde basi, secondo i criteri che tuttora dominano il nostro pensiero matematico, ma che quando furono formulati, pur rispondendo a sentite esigenze, urtavano contro vecchie abitudini mentali e tradizioni indiscutibili gloriose: mirabili progressi nel campo dell'analisi erano stati compiuti proprio con quei metodi arditi che CAUCHY condannava nel 1821. Egli infatti diceva (*op. cit.* pag. IV): « ... ho dovuto ammettere parecchie proposizioni che appariranno forse alquanto dure alla prima impressione. Per esempio nel capitolo VI dichiaro *che una serie divergente non ha somma*; nel cap. VII che un'equazione immaginaria è soltanto la rappresentazione simbolica di due equazioni tra quantità reali ... ».

La costruzione rigorosa dell'analisi infinitesimale secondo CAUCHY si basa come è noto sul concetto di limite, d'infinito ed infinitesimo potenziali.

Traduco dal *Cours d'Analyse* (pag. 19) le definizioni originarie di CAUCHY di questi concetti fondamentali.

« Quando i valori successivamente attribuiti ad una stessa variabile s'avvicinano indefinitamente ad un valore fisso, in modo da finire per differirne tanto poco quanto si voglia, quest'ultimo valore è chiamato il limite di tutti gli altri. Così per esempio un numero irrazionale è il limite delle diverse frazioni che ne forniscono i valori via via più approssimati. In geometria la superficie del cerchio è il limite verso il quale convergono le superficie dei poligoni inscritti, mentre il numero dei loro lati cresce sempre di più, etc.

Quando i valori numerici successivi di una stessa variabile decrescono indefinitamente, in modo da divenire minori di qualsiasi numero assegnato, questa variabile diviene ciò che si chiama un infinitesimo (infiniment petit) o una quantità infinitamente piccola. Una variabile di questa specie, ha zero per limite.

Quando i valori numerici successivi di una stessa variabile crescono sempre di più in modo da divenire maggiori di qualsiasi numero dato, si dice che questa variabile ha per limite *l'infinito positivo*, indicato con il segno ∞, se si tratta d'una variabile positiva, e *l'infinito negativo*, indicato con la notazione $-\infty$ se si tratta di una variabile negativa ».

A pag. 26 compare la notazione « lim » senza però « $x \rightarrow a$ »: p. es. $\lim A^x$, $\lim \sin x$.

Quando il limite è indeterminato CAUCHY adopera una doppia parentesi. P. es. per x tendente a zero.

$$\lim \left(\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \pm \infty.$$

Troviamo in CAUCHY anche la classe dei limiti di una funzione « Se si suppone che la variabile x converga verso zero si avrà

$$\lim\left(\left(\sin\frac{1}{x}\right)\right)=M(-1,+1)$$

considerato che l'espressione $\lim\left(\left(\sin\frac{1}{x}\right)\right)$ ammetterà un'infinità di valori compresi tra i loro estremi -1 e $+1$ » (*op. cit.* pagg. 29-30).

Cauchy parla anche di massimo limite e minimo limite di una funzione, concetti ripresi dai matematici contemporanei.

« Leibniz e Newton — scriveva Hermann Weil — avevano chiara la visione che nel calcolo infinitesimale vi è soltanto un passaggio al limite; non si rendevano però chiaro conto, che tale passaggio non ha solo il compito di determinare il valore del limite, ma deve anzitutto *garantire l'esistenza* di esso. È questo il motivo per cui Leibniz aveva ancora idee confuse sulla somma delle serie infinite .... A poco a poco i matematici si resero conto dell'importanza fondamentale che ha, in tutta l'analisi, l'idea di limite .... Ma solo Cauchy comprenderà a fondo l'argomento. Con il suo famoso criterio di convergenza delle serie, egli stabilirà la condizione perchè un algoritmo infinito produca un numero come suo valore limite ». (Cfr. L. Geymonat, *Storia e filosofia dell'analisi infinitesimale,* Torino, 1947, pag. 171).

La concezione di funzione di variabile reale basata sul puro concetto di corrispondenza fra due variabili alla maniera di Dirichlet, viene sostanzialmente anticipato da Cauchy che supera la precedente concezione euleriana di funzione come « expression de calcul »; traduco da Cauchy (*op. cit.* pag. 31):

« Quando delle quantità variabili sono talmente legate fra loro che, essendo dato il valore di una di esse, se ne può ricavare il valore di tutte le altre, si concepiscono ordinariamente queste quantità come espresse mediante una di esse che prende allora il nome di *variabite indipendente*; e le altre quantità espresse mediante la variabile indipendente sono chiamate *funzioni* di questa variabile ».

Con analoghe espressioni si considera il caso in cui le variabili indipendenti sono più d'una.

Altro concetto fondamentale dell'analisi di Cauchy è quello di continuità delle funzioni:

« *La funzione* f(x) *sarà continua rispetto ad* x *in un dato intervallo, se in questo, un accrescimento infinitamente piccolo della variabile produce sempre un accrescimento infinitamente piccolo della funzione stessa* » (*op. cit.* pag. 43).

(La definizione assume carattere preciso tenendo presenti le precedenti definizioni di infinitamente piccolo).

Altrimenti la funzione diviene discontinua, si ha una soluzione di continuità.

Fra gli algoritmi infiniti hanno assunto particolare rilievo fin dall'Antichità le serie, che si presentano sotto la forma di somma d'infiniti addendi (anche se questa locuzione può essere considerata imprecisa).

Si pensi al paradosso di ZENONE, di ACHILLE e della TARTARUGA, alle serie che si presentano nel periodo delle origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna e più oltre.

Tuttavia nonostante i brillanti risultati ottenuti mediante l'impiego delle serie, la relativa teoria mancava di solide basi, come ad esempio risulta dalle discussioni relative alla serie geometrica:

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

che per $x = 1$ diventa

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

e secondo LEIBNIZ ed EULERO assumeva il valore $\frac{1}{2}$ .... .

Intorno al 1820, CAUCHY con diverse memorie presentate all'Académie des Sciences attirò l'attenzione dei matematici sui gravi pericoli ed errori ai quali si andava incontro servendosi di serie divergenti.

Tali comunicazioni, racconta il VALSON, suscitarono un vero allarme tra i matematici che si erano serviti delle serie nei loro lavori, senza le cautele indicate da CAUCHY per evitare i pericoli dovuti alla divergenza. In particolare LAPLACE aveva fatto largo uso delle serie nella sua grande opera *Mécanique céleste*: le ricerche di CAUCHY compromettevano le basi di tale costruzione. LAPLACE ebbe un momento di « *effroi* ». Si racconta che uscito dalla seduta in cui CAUCHY aveva esposto le sue prime ricerche, entrò precipitosamente a casa e non ne uscì prima di aver verificato la convergenza delle serie adoperate. In verità LAPLACE era stato bene ispirato dal suo genio e il suo lavoro era irrepresibile: ma se l'eccentricità dell'orbita terrestre fosse stata maggiore raggiungendo un certo valore (0, 66...) la meccanica celeste di LAPLACE sarebbe caduta in rovina.... .

Sorvolando, per motivi di brevità sulla definizione d'integrale di CAUCHY preannunciata dal MENGOLI, e sulle ricerche riguardanti le condizioni di esistenza di integrali delle equazioni differenziali ordinarie e a derivate parziali, prendiamo ora rapidamente in esame una delle principali costruzioni del pensiero del nostro matematico nel campo dell'analisi: la teoria delle funzioni di variabile complessa.

In quest'ordine di idee consideriamo una variabile indipendente della forma

$$z = x + iy$$

ed una funzione

$$\varphi(z) = u + iv.$$

Secondo l'interpretazione geometrica dei numeri complessi siano x ed y le coordinate di un punto di un piano, u e v quelle di un punto di un altro piano. La funzione $\varphi(z)$ permette di stabilire una relazione che fa corrispondere ad un punto del primo piano un punto del secondo. Affinchè sussista un'opportuna analogia tra le funzioni di variabile reale e quelle di variabile complessa devono essere soddisfatte alcune condizioni. Non basta che sia determinato il valore della funzione $\varphi(z)$ ma occorre che sia determinata anche la sua derivata indipendentemente dal cammino che si segue per avvicinarsi al punto di coordinate x e y. Ciò si verifica quando u e v soddisfano le note equazioni:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

che costituiscono le condizioni dette da CAUCHY di *monogeneità.*

Appunto dalle condizioni di monogeneità (esistenza ed unicità della derivata) si ricava l'indipendenza dell'integrale di una funzione di variabile complessa dalla linea d'integrazione.

In quest'ordine di idee accenniamo appena ai risultati fondamentali contenuti in una memoria presentata da CAUCHY alla Accademia delle Scienze di Torino nel 1831, riguardanti il cerchio di convergenza sul piano complesso, all'interno del quale è convergente una serie di potenze.

E ricordiamo l'identità stabilita da CAUCHY delle sue funzioni di variabile complessa con quelle che LAGRANGE aveva chiamato funzioni analitiche.

Inoltre la celebre formula della teoria delle funzioni di variabile complessa:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(x)}{x - z}\, dx$$

ci mostra che una tale funzione non può avere un valore arbitrario in ogni punto del campo di definizione come le funzioni di variabile reale; ma $f(z)$ in un punto qualunque di un campo C nel quale essa sia continua e finita, può essere espressa mediante i valori assunti da essa in tutti i punti del contorno C del campo stesso.

Gli sviluppi mirabilmente armonici della teoria delle funzioni di variabile complessa fondata da CAUCHY, condussero l'ENRIQUES alle seguenti suggestive considerazioni:

« Questa veduta ha un significato filosofico che importa mettere in luce. Mentre le funzioni di variabile reale (secondo la definizione che di esse si dà con DIRICHLET) appariscono enti puramente artificiali e convenzionali, che si costruiscono dando ad arbitrio i loro valori, in corrispondenza a quelli della variabile, all'opposto le funzioni di variabile complessa rispondono, per così dire, ad una realtà intelligibile, data fuori del nostro pensiero, cioè ad un mondo d'idee platoniche, in accordo colle concezioni di quei matematici che discendono direttamente dai *realisti* del Medioevo. In altri termini esse appaiono (per esempio agli occhi di HERMITE) come *specie* che il matematico naturalista scopre o descrive, ma non inventa ». (Cfr. F. ENRIQUES, *Le matematiche nella storia e nella cultura*, Bologna 1938, pag. 214).

Così si delineano due aspetti complementari, solo apparentemente incompatibili del pensiero matematico, che si presentano con varie sfumature nei più grandi matematici dei tempi antichi e moderni: la matematica intesa come costruzione della mente umana, la matematica contemplazione di verità d'un mondo iperuranio.

Anche la distinzione fra funzioni monogene e non monogene con esempi di queste ultime, non fu in un primo tempo apprezzata da tutti i matematici. È interessante leggere quanto scrive a questo proposito lo storico delle matematiche M. MARIE contemporaneo di CAUCHY.

« L'invenzione più disgraziata di un grand'uomo è sempre quella per la quale i suoi discepoli professano la più grande ammirazione: non vi è allievo di CAUCHY che, nel suo riassunto delle teorie del Maestro, non presenti in primo piano la visione da cui fu ingannato, in quel sogno in cui gli apparvero le funzioni non monogene. CAUCHY credette di dover immaginare delle pseudo-funzioni, incapaci di servire a qualsiasi cosa, ma che non dovessero essere monogene, cioè di cui la derivata fosse sempre indeterminata: egli non sapeva che le funzioni non si inventano, ma che si scoprono nell'analisi delle leggi dei fenomeni. Noi lasceremo da parte le funzioni di origine metafisica di cui CAUCHY fu l'inventore e che nessuno avrà mai occasione di impiegare ». (M. MARIE, *Histoire des sciences mathématiques et physique*, vol. XII, Parigi, 1888, pag. 147).

È quasi superfluo aggiungere che queste vedute indicate dal MARIE, più brillanti che fondate, sono ben lontane dal cammino della matematica quale oggi s'intende....

Abbiamo visto che CAUCHY sosteneva che una formula d'analisi deve essere applicata sotto certe condizioni, e ad un campo ben determinato di valori delle variabili che ivi compaiono.

Ebbene estendendo tale suo atteggiamento mentale, CAUCHY ebbe anche ben chiara la visione dei limiti delle applicazioni della matematica alla realtà.

Gioverà leggere le sue considerazioni sull'argomento (*Cours d'Analyse*... pag. V): « Del resto, se da una parte ho cercato di perfezionare l'analisi matematica, dall'altra son lontano dal pretendere che questa analisi debba bastare a tutte le scienze del ragionamento. Senza dubbio, nelle scienze che si chiamano naturali, il solo metodo che si possa applicare con successo consiste nell'osservare i fatti e a sottomettere poi le osservazioni al calcolo. Ma sarebbe un grave errore pensare che non si trova certezza che nelle dimostrazioni geometriche o nella testimonianza dei sensi; e quantunque nessuno finora abbia tentato di provare mediante l'analisi, l'esistenza di Augusto o di Luigi XIV, ogni uomo sensato converrà che questa esistenza è così certa per lui come quella del quadrato dell'ipotenusa o del teorema di MAC LAURIN.

Ciò che dico qui di un fatto storico può applicarsi ugualmente ad una gran quantità di questioni di religione di morale di politica. Persuadiamoci dunque che esistono delle verità oltre quelle dell'algebra e delle realtà oltre gli oggetti sensibili. Coltiviamo con ardore le scienze matematiche, senza volerle estendere al di là del loro dominio... ».

Incontriamo interessanti sviluppi di queste vedute, con riferimenti polemici alle posizioni di LAPLACE, anche nel carteggio di CAUCHY e di RUFFINI, secondo un'ordine di idee già trattato dal Prof. TERRACINI.

Del resto CAUCHY e RUFFINI erano destinati ad intendersi e non soltanto nel campo dell'analisi matematica, avevano in comune i principi religiosi e morali e la fermezza del carattere, per cui entrambi, in diverse circostanze, di tempo e di luogo, avevano preferito perdere le loro cattedre piuttosto che pronunciare giuramenti contrari alle loro coscienze.

Entrambi pur coltivando con ardore le ricerche matematiche, dedicavano gran parte della loro attività al sollievo dell'umanità sofferente. In armonia con i principi sopra esposti sulla realtà che trascende i domini della matematica, CAUCHY volentieri spaziava con la sua mente oltre le frontiere dell'analisi.

Egli ad esempio mirava a ritrovare nei testi biblici il segreto di un ritmo da lungo tempo dimenticato, per rendere sensibile al nostro orecchio, mediante un miglior sistema di lettura, la bellezza e l'armonia dei testi originali della Genesi e dei Salmi. Egli lasciò una ricostruzione della prosodia ebraica mediante poche semplici regole. Fu questa la principale occupazione degli ultini venti anni della sua vita. In questi studi egli ritrovava nella sua vecchiezza il vigore della gioventù, i ricordi della sua infanzia; (anche suo padre si era dedicato a quei problemi).

Ma ormai è tempo di concludere il nostro fugace incontro con lo spirito di AGOSTINO CAUCHY, meditando un pensiero a lui caro manifestato presso la tomba del suo amico il matematico BINET:

« Je vous laisse franchir en esprit l'intervalle immense qui sépare les sciences de la terre si limitées si bornées en tous sens, même quand elles sont cultivées, par des hommes d'un mérite supérieur, des verités sublimes de la divine science... ».