BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MARIO CURZIO

Sul reticolo dei sottogruppi di composizione di alcuni gruppi finiti.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.2, p. 284–289.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_2_284_0>

Sul reticolo dei sottogruppi di composizione di alcuni gruppi finiti.

Nota di MARIO CURZIO (a Napoli)

Sunto. - *Si caratterizzano i gruppi finiti risolubili* G *pei quali il reticolo dei sottogruppi di composizione è isomorfo al reticolo dei sottogruppi d'un* p-*gruppo finito* G'. *Si dimostra che, eccetto se* G' *è ciclico,* G e G' *hanno necessariamente lo stesso ordine.*

Sia G un gruppo d'ordine finito ed $L(G)$ il reticolo (1) dei suoi sottogruppi. I sottogruppi di composizione (2) di G costituiscono un sottoreticolo sottomodulare $\varphi(G)$ di $L(G)$; lo studio di $\varphi(G)$ è stato iniziato da H. WIELANDT [2] nel 1939. Recentemente G. ZAPPA ha caratterizzato i gruppi risolubili finiti pei quali $\varphi(G)$ è distributivo [3] oppure modulare [4]; in una mia nota [5] vengono conseguite alcune proposizioni relative a $\varphi(G)$. Circa quest'ultimo reticolo, sono tuttora aperti diversi problemi; tra l'altro, non mi consta che qualche Autore abbia preso in considerazione il seguente problema:

Dato un gruppo G', *determinare i gruppi* G *pei quali* φ(G) *e* φ(G') *risultano isomorfi.*

La questione anzidetta è risolta nel presente lavoro, supponendo G finito e risolubile, G' p-gruppo finito. I risultati conseguiti si compendiano nei Teor. I e II.

1. In questo num. si determinano i gruppi risolubili finiti G pei quali il reticolo $\varphi(G)$ è isomorfo al reticolo $\varphi(G')$ relativo ad un p-gruppo ciclico G'. Si caratterizzano cioè, i gruppi G per cui $\varphi(G)$ si riduce ad una catena.

All'uopo si premettono i seguenti:

LEMMA I. – *Sia* G *un gruppo finito e* K *il suo derivato. Condizione necessaria e sufficiente affinchè* G *possegga un sol sottogruppo normale di indice primo, è che* G/K *sia un* p-*gruppo ciclico.*

(1) Per ciò che concerne i reticoli si rimanda al trattato [1].

(2) Sia G un gruppo ed H un suo sottogruppo. H dicesi di composizione in G se appartiene almeno ad una serie di composizione di G.

LEMMA II. – *Un gruppo d'ordine finito* N *a sottogruppi di Sylow ciclici è metaciclico* (3) *ed è generato da due elementi* x, y *tali che:*

a) $$x^m = y^n = 1, \quad yxy^{-1} = x^r, \quad r^n \equiv 1 \pmod{m}$$

b) $$N = m \cdot n, \quad D[m.\ n(r-1)] = 1.$$

Il *Lemma II* è dovuto a H. ZASSENHAUS [6], il *Lemma I* sarà provato alla fine di questo numero.

Si è ora in grado di dimostrare il seguente:

TEOREMA I. – *Sia* G *un gruppo risolubile finito. Condizione necessaria e sufficiente affinchè* φ(G) *sia una catena, è che* G *risulti un gruppo d'uno dei tipi sottoindicati:*

(1) *Ciclico d'ordine potenza d'un numero primo.*

(2) *A sottogruppi di Sylow ciclici e avente ordine* $p^\alpha q^\beta$ (p, q *numeri primi,* $p > q$), *godente inoltre della proprietà che l'unico suo sottogruppo di Sylow relativo a* p *è centralizzante di se stesso.*

La condizione è necessaria.

Sia $\varphi(G)$ una catena. Se G è un p-gruppo, G è ovviamente ciclico e quindi del tipo (1). Sia invece G d'ordine divisibile per almeno due distinti numeri primi; in tal caso, si mostrerà che G è del tipo (2). Poichè $\varphi(G)$ è una catena e G è risolubile, esiste in G un solo sottogruppo normale d'indice primo; si dica q tale indice. Per il *Lemma I*, il fattoriale G/K è ciclico d'ordine q^β. Riducendosi ad una catena, $\varphi(G)$ è un reticolo distributivo; allora per un teorema [3] di G. ZAPPA, il gruppo G è a sottogruppi di SYLOW ciclici e quindi supersolubile (4). L'essere G supersolubile, comporta che K sia speciale [7]. Il reticolo $\varphi(K)$ è una catena quale sottoreticolo di $\varphi(G)$, essendo K speciale ne segue (5) che K è ciclico d'ordine p^α (p numero primo). L'ordine di G vale quindi $p^\alpha q^\beta$; è $p \neq q$, altrimenti, contro l'ipotesi G sarebbe d'ordine potenza di un numero primo. Inoltre $p > q$; infatti: se fosse $p < q$, G quale gruppo supersolubile possederebbe [7] un sottogruppo normale H d'ordine q^β e si avrebbe $G = H \times K$ contro l'ipotesi che $\varphi(G)$ sia una catena. Per provare che G è del tipo (2), basta ora riconoscere che K coincide col proprio centralizzante K'. Poichè K è abeliano, si ha $K' \supseteq K$; pertanto K' è normale e $\varphi(K')$ è un

(3) Sia G un gruppo finito e K il suo derivato. G dicesi metaciclico se G e G/K sono entrambi ciclici.

(4) Un gruppo finito a sottogruppi di Sylow ciclici è supersolubile [3].

(5) Sia G un gruppo speciale finito. Se $\varphi(G) \equiv L(G)$ è una catena, G è di necessità un p-gruppo ciclico.

sottoreticolo di $\varphi(G)$. Inoltre, essendo K' a sottogruppi di SYLOW ciclici, è facile riconoscere che K' è abeliano. Si supponga per assurdo che K' abbia indice $q^{\beta'}$ $(0 \leq \beta' < \beta)$; in tal caso, $\varphi(K')$ non è una catena contro l'ipotesi che G abbia una sola serie di composizione. Dunque, K' ha indice q^{β} e conseguentemente $K \equiv K'$.

La condizione è sufficiente.

Se G è del tipo (1), $\varphi(G)$ è evidentemente una catena. Sia dunque G del tipo (2). Vale allora il *Lemma* II e si ha: $N = p^{\alpha}q^{\beta}$, inoltre è immediato che G non è abeliano.

Risulta: $m, n > 1$, se fosse ad es. $m = 1$, il sottogruppo $\{x\}$ generato da x sarebbe identico e si avrebbe $G = \{y\}$ negando la ipotesi che G non sia abeliano. Per la condizione $D[m, n(r-1)]$ 1 essendo: $m, n > 1$, $p^{\alpha}q^{\beta} = mn$; i numeri m, n valgono p^{α}, q^{β}. È ordinatamente: $m = p^{\alpha}$, $n = q^{\beta}$; infatti il derivato [6] K di G ha ordine m, se fosse $m = q^{\beta}$, G essendo supersolubile possederebbe un sottogruppo normale H d'ordine p^{α} [7] e si avrebbe $G = H \times K$ ciò che è assurdo poichè G non è abeliano. Il fattoriale G/K ha ordine q^{β} ed è ciclico perchè G è metaciclico; per il *Lemma* I, G possiede un sol sottogruppo normale d'indice primo. Un sottogruppo M di G avente indice $q^{\beta'}$ $(0 \leq \beta' < \beta)$ è normale poichè contiene K; onde $\varphi(M)$ è un sottoreticolo di $\varphi(G)$. Il sottogruppo M non è abeliano in quanto se ciò non fosse, apparterrebbe al centralizzante K' di K contro l'ipotesi che K e K' coincidano. Il sottogruppo M è non abeliano ed ha i sottogruppi di SYLOW ciclici, perciò, ragionando come su G, si riconosce che M possiede un sol sottogruppo normale d'indice primo. Infine, tenendo presente che $\varphi(K)$ è una catena (K è un p-gruppo ciclico), resta provato che anche $\varphi(G)$ è una catena.

OSSERVAZIONE. – La condizione (2) di cui al Teor. I equivale alla seguente, peraltro meno espressiva:

(2′) G *è a sottogruppi di Sylow ciclici, ha ordine* $p^{\alpha}q^{\beta}$ (p, q *primi,* $p > q$) *e gode della proprietà di non essere abeliano insieme ad ogni suo sottogruppo d'indice* $q^{\beta'}$ $(0 \leq \beta' < \beta)$.

A conclusione di questo numero, si dimostra ora il Lemma I:

La condizione è necessaria.

Abbia G un sol sottogruppo normale *d'* indice primo. Se G/K non fosse un p-gruppo ciclico, G/K, poichè abeliano, possederebbe due distinti sottogruppi (necessariamente normali) d'indici primi.

Da ciò e dall'omomorfismo di G su G/K seguirebbe l'esistenza in G di due distinti sottogruppi normali aventi indici primi. Ciò sarebbe contro l'ipotesi.

La condizione è sufficiente

Sia G/K, un p–gruppo ciclico. Essendo G omomorfo su G/K, G possiede un sottogruppo normale d'indice primo. Si supponga per assurdo che G possegga due sottogruppi normali M, N d'indici primi. I gruppi G/M e G/N sono abeliani poichè d'ordini primi; onde, M e N contengono K. Da ciò segue che M/K e N/K hanno indici primi nel fattoriale G/K. Si è giunti ad un assurdo in quanto G/K è un p–gruppo ciclico e pertanto possiede un sol sottogruppo d'indice primo.

2. Ora e nel seguito si useranno le notazioni seguenti:

> G è un gruppo risolubile d'ordine finito.
> G' è un p–gruppo non ciclico d'ordine p^α.
> Se H è un elemento di $\varphi(G)$, H' è l'elemento di $\varphi(G')$ omologo di H in un eventuale isomorfismo tra i reticoli $\varphi(G)$ e $\varphi(G')$.

Inoltre, poichè essenziale per ciò che segue, si ricorda che in un p–gruppo ogni sottogruppo è di composizione, sicchè: $\varphi(G') \equiv L(G')$.

Ciò premesso si osservi che:

1) *Sia* P *un* p*–gruppo d'ordine* $\mathrm{p}^{\mathrm{m}} (\mathrm{m} \geq 3)$. *Se ogni sottogruppo massimo di* P *è ciclico,* P *o è ciclico o isomorfo al gruppo dei quaternioni.*

Quanto sopra è immediata conseguenza di ben noti teoremi relativi ai p–gruppi (ad es. cfr. [6]).

Si è ora in grado di provare il:

TEOREMA II. – *Se* $\varphi(\mathrm{G})$ *e* $\varphi(\mathrm{G}')$ *sono isomorfi,* G *e* G′ *hanno ugual ordine e sono strutturalmente isomorfi* (6).

La dimostrazione sarà condotta per induzione rispetto ad α. Non essendo G' ciclico è $\alpha \geq 2$.

Sia $\alpha = 2$:

Il gruppo G' non è ciclico e ha ordine p^2, perciò $\varphi(G')$ non è nè catena nè prodotto di catene. Essendo G risolubile (7), l'ordine m di G vale qr o q^2 (q, r numeri primi distinti). Se $m = qr$, $\varphi(G)$ è una catena (di lunghezza 2) o il prodotto di due catene (di lunghezza 1); pertanto, $\varphi(G)$ e $\varphi(G')$ non possono essere isomorfi e si nega l'ipotesi. Se invece $m = q^2$, $\varphi(G)$ e $\varphi(G')$ sono isomorfi a condizione che $p = q$. Dunque, se $\alpha = 2$, l'asserto è provato.

(6) Due gruppi G, G' diconsi strutturalmente isomorfi se sono isomorfi i reticoli $L(G)$, $L(G')$.

(7) In un gruppo risolubile finito i fattori di composizione sono tanti quanti i divisori primi dell'ordine del gruppo.

Sia $\alpha > 2$:

In primo momento si supponga p dispari.

Essendo G' non ciclico e valendo la 1), esisterà in G' almeno un sottogruppo massimo H' non ciclico. Sia w un isomorfismo tra $\varphi(G)$ e $\varphi(G')$; il sottogruppo $H = w^{-1}(H)$ è normale massimo in G e, poichè G è risolubile, vi ha indice primo q. I reticoli $\varphi(H)$ e $\varphi(H')$ sono evidentemente isomorfi. Il sottogruppo H' ha ordine $p^{\alpha-1}$ e non è ciclico, per l'ipotesi d'induzione e perchè H è risolubile al pari di G, H ha ordine $p^{\alpha-1}$. Dunque, G ha ordine $p^{\alpha-1}q$.

Siccome G' non è ciclico, esisterà in G' un sottogruppo massimo K' distinto da H', si ponga: $w^{-1}(K') = K$, $w^{-1}(H \cap K)' = H \cap K$, è ovviamente $H' \cap K' = (H \cap K)'$.

Il reticolo $\varphi(G/H \cap K)$ è isomorfo al reticolo R dei sottogruppi di composizione di G contenenti $H \cap K$, mentre $\varphi(G'/H' \cap K')$ è isomorfo al reticolo R' dei sottogruppi di G' contenenti $H' \cap K'$. Dall'essere R ed R' isomorfi segue che anche $\varphi(G/H \cap K)$ e $\varphi(G'/H' \cap K')$ sono isomorfi. Il fattoriale $G'/H' \cap K'$ ha ordine p^2 e non è ciclico possedendo due distinti sottogruppi massimi $H'/H' \cap K'$ e $K'/H' \cap K'$; onde, per l'ipotesi d'induzione e per la risolubilità di $G/H \cap K$, il fattoriale $G/H \cap K$ ha ordine p^2. Ciò comporta che $H \cap K$ abbia ordine $p^{\alpha-3}q$ (l'ordine di G è $p^{\alpha-1}q$); ma, è di necessità $p = q$ in quanto $H \cap K$ è sottogruppo di H e perciò $p^{\alpha-3}q$ deve dividere l'ordine $p^{\alpha-1}$ di H. Pertanto, G ha ordine p^α al pari di G'; inoltre G e G' sono strutturalmente isomorfi poichè:

$$\varphi(G) \equiv L(G), \quad \varphi(G') \equiv L(G').$$

Provato così l'asserto nel caso che p sia dispari, si supponga ora $p = 2$;

Il teor. è vero se G' ha ordine 2^3:

Se G' non è isomorfo al gruppo dei quaternioni, col procedimento di induzione di cui sopra, si prova che anche G ha ordine 2^3. Sia invece G' isomorfo al gruppo dei quaternioni. Poichè non ciclico G' possiede due distinti sottogruppi massimi A', B'. I reticoli $\varphi(G/A \cap B)$ e $\varphi(G'/A' \cap B')$ risultano isomorfi. Essendo $G/A \cap B$ risolubile e $G'/A' \cap B'$ quadrinomio, per l'ipotesi d'induzione è anche $G/A \cap B$ quadrinomio. Pertanto G ha ordine 2^2q (q num. primo). Sia $q \neq 2$. Allora, $A \cap B$, normale in G, ha ordine q, e pertanto esso è l'unico sottogruppo Q di G (necessariamente di SYLOW) avente ordine q. Essendo Q ciclico, tale è il suo automorfo [8]; onde, il centralizzante C di Q deve avere in G fattoriale

[8] L'automorfo d'un gruppo G è il gruppo costituito dagli automorfismi di G.

ciclico e quindi C deve avere indice 1 o 2. In entrambi i casi, C possiede un sottogruppo S d'ordine 2 il quale è normale in ogni sottogruppo di SYLOW che lo contenga ed è permutabile con Q elemento per elemento.

Pertanto S è normale minimo in G al pari di Q. Dunque, $\varphi(G)$ e $\varphi(G')$ non possono essere isomorfi possedendo G' un sol sottogruppo (normale) minimo (il suo centro). L'assurdo cui si è pervenuti, prova che $q=2$ e che conseguentemente G ha ordine 2^3.

Il teor. è vero se G' ha ordine 2^α $(\alpha > 3)$:

Infatti: col procedimento d'induzione usato per p dispari, si riconosce che anche G ha ordine 2^α.

Il Teor. II è pertanto dimostrato, ne è immediata conseguenza la ben nota proposizione:

2) *Sia* G′ *un gruppo non ciclico d'ordine potenza d'un numero primo. Ogni gruppo speciale finito strutturalmente isomorfo a* G′, *ha lo stesso ordine di* G′.

3. I Teor. I e II caratterizzano i gruppi risolubili finiti G pei quali $\varphi(G)$ è isomorfo al reticolo dei sottogruppi d'un qualunque p-gruppo finito. Si noti però che se un gruppo H è tale da essere $\varphi(H)$ isomorfo al reticolo $\varphi(G')$ relativo ad un p-gruppo G', H non è di necessità risolubile nè almeno composto; si pensi ad es. ad un qualunque gruppo semplice H, allora $\varphi(H)$ é isomorfo al reticolo $\varphi(G')$ relativo ad un gruppo d'ordine primo.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. BIRKHOFF, *Lattice Theory*, « Am. Math. Soc. Colloq. Pubbl. », (1949) (25).

[2] H. WIELANDT, *Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen*, « Math. Zeitschr. », (1939) (45), pp. 209-244.

[3] G. ZAPPA, *Sui gruppi finiti risolubili per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è distributivo*, « Boll. U.M.I. », (1956) (11), pp. 150-157.

[4] G. ZAPPA, *Sui gruppi finiti per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è modulare*. « Boll. U.M.I. », (1956) (11), pp. 315-318.

[5] M. CURZIO, *Alcune osservazioni sul reticolo dei sottogruppi di un gruppo finito*, « Ric. di Mat. », (1957) (6-1) [in corso di stampa].

[6] H. ZASSENHAUS, *Lehrbuch der Gruppentheorie*, Leipzig, Teubner, (1937).

[7] G. ZAPPA, *Sui gruppi supersolubili*, « Rend. Sem. Mat. Roma », (1938) (2), pp. 323-330.