Bollettino
Unione Matematica Italiana

Alfredo Rizzi

Osservazioni sulle classi di Fréchet delle funzioni di ripartizione a più variabili.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.2, p. 269–277.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_2_269_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1957.

Osservazioni sulle classi di Fréchet delle funzioni di ripartizione a più variabili. (*)

Nota di ALFREDO RIZZI (a Roma)

Sunto. - *Viene studiata la classe di* FRÉCHET *delle funzioni di ripartizione a tre e a quattro variabili.*

In una nota pubblicata nel 1951 ([1]) M. FRECHET, riprendendo delle ricerche di C. GINI ([2]) e di T. SALVEMINI ([3]), ha studiato la classe delle funzioni di ripartizione doppie $\Phi(xy)$ ([4]) che soddisfano alle seguenti condizioni:

$$\lim_{x \to \infty} \Phi(xy) = \Psi_1(x)$$

$$\lim_{y \to \infty} \Phi(xy) = \Psi_2(y)$$

dove $\Psi_1(x)$ e $\Psi_2(y)$ sono due funzioni di ripartizione assegnate.

Tale classe di funzioni viene chiamata *classe di* FRECHET.

Lo studio della classe di FRÉCHET si è dimostrato particolarmente utile per lo sviluppo della teoria delle variabili causali doppie ([5]), dimodochè, volendo passare allo studio delle variabili causali di dimensione superiore, sembra necessario definire una analoga classe di funzioni nel caso di distribuzioni a più di due variabili.

La classe di FRECHET delle funzioni di ripartizioni triple è stata inizialmente studiata da J. BASS ([6]) e successivamente da

(*) Comunicazione tenuta il 24-5-1956 al « Seminario di Statistica Metodologica » della Facoltà di Scienze Statistiche Demografiche ed Attuariali dell'Università di Roma. Il sunto della comunicazione è stato pubblicato in « Statistica », fascicolo Aprile-Giugno 1956, pag. 337.

([1]) Vedi: M. FRÉCHET, *Sur les tableaux de correlation dont les marges sont données,* « Annales de l'Universitè de Ljon » s, III fesc. 4: « Sciences » 1951.

([2]) Vedi: C. GINI, *Nuovi contributi alla teoria delle relazioni statistiche,* « Atti del R. Ist. Ven. di Scienze Lettere ed Arti », Tomo LXXIV 1914-15

([3]) Vedi: T. SALVEMINI, *Sugl' indici di Omofilia,* « Atti della Soc. It. Stat » 1939.

([4]) Vedi: G. POMPILJ, *Teoria dei campioni,* Veschi, Roma 1952.

([5]) Vedi: G. POMPILJ, loc. cit.

([6]) Vedi: J. BASS, *Sur la compatibilitè de fonctions de repartition,* « Comptes Rendus », 1955.

R. FERON [7] in maniera che su questo argomento ci si limiterà a dare solo qualche ulteriore complemento, mentre la presente Nota sarà essenzialmente dedicata allo studio della classe di FRECHET delle funzioni di ripartizione quadruple. In particolare, nel caso delle funzioni a tre variabili, viene studiata la classe delle funzioni di ripartizione triple associata a due variabili causali doppie soddisfacenti ad un'opportuna condizione e vengono svolte ulteriori considerazioni, mentre nel caso delle funzioni a quattro variabili viene studiata la classe delle funzioni di ripartizione associate a quattro variabili casuali semplici, oppure a due variabili casuali doppie, oppure, infine. ad una variabile casuale semplice e ad una tripla.

I. - Generalità.

Nella nota citata di M. FRÉCHET [8] viene dimostrato che, per ogni copia di funzioni di ripartizione $\Psi_1(x)$ e $\Psi_2(y)$, esiste sempre una classe $\Gamma(\Psi_1, \Psi_2)$ di funzione di ripartizione doppie che hanno distribuzioni marginali $\Psi_1(x)$ e $\Psi_2(y)$.

Per ogni funzione $\Phi(xy)$ di Γ valgono le disuguagliaze

$$\text{Magg.}\ \{0,\ \Psi_1(x)+\Psi_2(y)-1\} \leq \Phi(xy) \leq \min.\ \{\Psi_1(x),\ \Psi_2(y)\}.$$

Inoltre le funzioni:

$$\Phi_0(xy) = \text{Magg.}\ \{0,\ \Psi_1(x)+\Psi_2(y)-1\}$$
$$\Phi_1(xy) = \min.\ \{\Psi_1(x),\ \Psi_2(y)\}$$

sono funzioni di ripartizione e per di più appartengono alla classe $\Gamma(\Psi_1, \Phi_2)$; vengono pertanto chiamate rispettivamente la minima e la massima funzione della classe di FRÉCHET. L'interesse di queste due funzioni, già considerate da T. SALVEMINI [9]. è poi accresciuto dal fatto che, come ha dimostrato G. DALL'AGLIO [10], il massimo

[7] Vedi: R. FERON, *Sur les tableaux de correlation dont les marges sont donnèes. Cas de l'espace a trois dimensions*, « Annales de L'Istitute Statistiques de l'Universitèe de Paris », 1956.

[8] Vedi: M. FRÉCHET, loc. cit. [1].

[9] Vedi: T. SALVEMINI, loc. cit. [3].

[10] Vedi: G DALL'AGLIO, *Sugli estremi dei momenti delle funzioni di ripartizione*, « Annali della Scuola Normale di Pisa », S. III, Vol. 10, fasc. 1-2, 1956.

e il minimo dell' integrale:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} | y - mx - p |^r \, d\,\Phi(xy), \qquad (r \geq 1).$$

al variare della funzione $\Phi(xy)$ nella classe di FRÉCHET, si ha in corrispondenza dell' una o dell' altra delle suddette funzioni a seconda che il parametro m sia maggiore o minore di zero.

* * *

Siano $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ tre variabili casuali (v. c.) semplici le cui funzioni di ripartizione saranno indicate con $\Phi(x)$, $\Psi(y)$, $\Theta(z)$.

Si definisce la classe di FRECHET delle funzioni di ripartizione triple associate a tre v. c. come l' insieme delle funzioni di ripartizione che verificano la condizione

$$\lim_{\substack{y \to \infty \\ x \to \infty}} \Phi(xyz) = \Theta(z); \qquad \lim_{\substack{x \to \infty \\ z \to \infty}} \Phi(xyz) = \Psi(y)$$

$$\lim_{\substack{y \to \infty \\ z \to \infty}} \Phi(xyz) = \Phi(x).$$

Per ogni terna di valori x, y, z. la $\Phi(xyz)$ deve soddisfare ([11]) la seguente disuguaglianza:

$$\text{Magg.} \{ 0,\ \Phi(x) + \Psi(y) + \Theta(z) - 2 \} \leq \Phi(xyz) \leq \min. \{ \Phi(x),\ \Psi(y),\ \Theta(z) \}.$$

La funzione che in ogni punto dello spazio assume il valore

$$\Phi_{\text{I}}(xyz) = \min. \{ \Phi(x),\ \Psi(y),\ \Theta(z) \}$$

è di ripartizione ed appartiene alla classe di FRECHET, mentre a differenza di quello che accade nel caso di due variabili, la funzione

$$\Phi_{\text{II}}(xyz) = \text{Magg.} \{ 0,\ \Phi(x) + \Psi(y) + \Theta(z) - 2 \}$$

non è generalmente di ripartizione. Si conclude, quindi, che l' insieme delle funzioni di ripartizione associate a tre v. c. è dotato di massimo ed in generale non di minimo.

Nel caso tridimensionale accanto alla classe di FRECHET con le tre distribuzioni marginali semplici assegnate, si può considerare anche il caso in cui si conosca una distribuzione marginale doppia ed una semplice pervenendo così alla classe delle funzioni di

([11]) Vedi: R. FERON, loc. cit. ([7]).

ripartizione triple che verificano le seguenti relazioni:

$$\lim_{z \to \infty} \Phi(xyz) = \Phi(xy)\,; \qquad \lim_{\substack{y \to \infty \\ z \to \infty}} \Phi(xyz) = \Theta(z)$$

In questo caso, per ogni terna di valori x, y, z, si hanno sempre le disuguaglianze:

$$\text{Magg.}\,\{0,\ \Phi(xy) + \Theta(z) - 1\} \leq \Phi(xyz) \leq \min.\,\{\Phi(xy),\ \Theta(z)\}$$

ma in generale le funzioni che assumono in ogni punto dello spazio ordinario rispettivamente il:

$$\text{Magg.}\,\{0,\ \Phi(xy) + \Theta(z) - 1\}$$
$$\min.\,\{\Phi(xy),\ \Theta(z)\}$$

non sono di ripartizione.

* * *

Altri risultati di M. Fréchet e di J. Bass saranno ricordati a suo luogo nel seguito di questa Nota.

II. - Osservazioni sulle classi di Fréchet delle funzioni di ripartizione triple.

1) *La classe di* Fréchet *delle funzioni di ripartizione triple associata a due v.c. doppie.*

Siano $\Phi(xy)$. $\Psi(xz)$ due funzioni di ripartizione doppie verificanti la condizione:

$$\lim_{y \to \infty} \Phi(xy) = \lim_{z \to \infty} \Psi(xz) = \Phi(x). \tag{1}$$

Si definisce l'insieme delle funzioni di ripartizione triple associate a due v.c. doppie $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$. $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})$ soddisfacenti la condizione (1), come l'insieme delle funzioni di ripartizione che verificano la condizione

$$\lim_{z \to \infty} \Phi(xyz) = \Phi(xy)\,; \qquad \lim_{y \to \infty} \Phi(xyz) = \Psi(xz). \tag{2}$$

Imponendo a $\Phi(xyz)$ di essere una funzione di ripartizione si trova, con semplici calcoli, che deve soddisfare, in ogni punto x, y, z, la relazione

$$\text{Magg.}\,\{0,\ \Psi(xz) - \Phi(x) + \Phi(xy)\} \leq \Phi(xyz) \leq \min\,\{\Psi(xz),\ \Phi(xy)\}.$$

Le funzioni che assumono in ogni punto il:

$$\text{Magg.}\,\{0,\ \Psi(xz) - \Phi(x) + \Phi(xy)\} \text{ e } \min.\,\{\Psi(xz),\ \Phi(xy)\}$$

non sono, ovviamente, di ripartizione in quanto nel caso in cui, ad esempio,

$$\Psi(xz) = \text{Magg.} \{ 0,\ \Phi(x) + \Theta(z) - 1 \}$$

ci si riduce all'ultimo caso ricordato nelle generalità.

La sola condizione (1) garantisce l'esistenza di funzioni di ripartizione in tre variabili soddisfacenti alla (2), ma, come ha osservato J. Bass [12] la cosa non si può estendere senz'altre condizioni al caso di tre funzioni di ripartizione doppie $\Phi(xy)$, $\Psi(xz)$, $\Theta(yz)$ soddisfacenti alle condizioni:

$$\lim_{y \to \infty} \Phi(xy) = \lim_{z \to \infty} \Psi(xz);$$

$$\lim_{x \to \infty} \Phi(xy) = \lim_{z \to \infty} \Theta(yz);$$

$$\lim_{x \to \infty} \Psi(xz) = \lim_{y \to \infty} \Theta(yz);$$

infatti le predette condizioni sono solo *necessarie ma non sufficienti* per garantire l'esistenza di una funzione di ripartizione $\Phi(xyz)$ che soddisfa alle condizioni:

$$\lim_{z \to \infty} \Phi(xyz) = \Phi(xy)\ ; \qquad \lim_{y \to \infty} \Phi(xyz) = \Psi(xz)\ ; \qquad \lim_{z \to \infty} \Phi(xyz) = \Theta(yz).$$

2) *Ulteriori osservazioni.*

Alle condizioni precedenti si può aggiungere, analogamente a quanto è stato fatto da M. Fréchet per il caso bidimensionale [13], che assegnate $\Phi(x)$, $\Psi(y)$, $\Theta(z)$ esiste almeno una funzione di ripartizione che ha $\Phi(x)$, $\Psi(y)$, $\Theta(z)$ come funzioni marginali.

Inoltre per esservi una sola soluzione occorre che sia $\mathfrak{X}$, che $\mathfrak{Y}$, che $\mathfrak{Z}$ assumano un valore costante. Uguagliando infatti una funzione della classe (ad esempio quella corrispondente alla indipendenza) colla massima si ha:

$$\Phi(x) \cdot \Psi(y) \cdot \Theta(z) = \min \{ \Phi(x),\ \Psi(y),\ \Theta(z) \}$$

dalla quale relazione si deduce quanto asserito.

In generale la classe di Fréchet conterrà quindi infinite funzioni, di ripartizione; è chiaro inoltre che ogni funzione compresa tra $\Phi_0(xyz)$ e $\Phi_1(xyz)$ è una funzione della classe.

(12) Vedi: J. Bass, loc. cit. (6).

(13) Vedi: M. Frechet, *Sur les tableaux de correlation dont les marges sont donnèes*, « Comptes Rendus », 1956.

Inoltre la differenza tra due soluzioni è minore o uguale di

$K(xyz) = \text{min.}\,\{\Phi(x),\ \Psi(y),\ \Theta(z)\} - \text{Magg.}\,\{0,\ \Phi(x) + \Psi(y) + \Theta(z) - 2\}$

ed è:

$$0 \leq K(xyz) \leq \frac{2}{3}\,.$$

III. - Le classi di Fréchet delle funzioni di ripartizione quadruple

1) *La classe di Fréchet associata a quattro v.c. semplici.*

Siano $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ $\mathcal{X}_4$ quattro v.c. semplici le cui funzioni di ripartizione saranno indicate con $\Phi_i(x_i)$, $(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$.

Si definisce la classe di Fréchet delle funzioni di ripartizione associata alle quattro v.c. come l'insieme delle funzioni di ripartizione quadruple che verificano le condizioni:

$$\lim_{\substack{x_i \to \infty \\ x_j \to \infty \\ x_k \to \infty}} \Phi(x_1 x_2 x_3 x_4) = \Phi_l(x_l) \quad \text{con } i \neq j \neq k \neq l \quad (i,\ j,\ k,\ l = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Per determinare gli estremi di detta classe occorre ricordare che una qualsiasi funzione della classe deve essere non decrescente anche rispetto a tre, due, o ad una sola variabile; cioè se (x_i, x_{i2}) sono due valori assunti dalla v.c. $\mathcal{X}_i$, con $x_i \leq x_{i2}$ la variazione quadrupla, le quattro variazioni triple, le sei variazioni doppie e le quattro variazioni semplici devono essere non negative.

Ricordiamo che si definisce la variazione quadrupla di una funzione di ripartizione quadrupla ([14]) nella seguente maniera:

$$\begin{aligned} {}^4\Delta\,\Phi(x_1x_2x_3x_4) = {} & \Phi(x_{12}x_{22}x_{32}x_{42}) - \Phi(x_{12}x_{22}x_{32}x_4) - \Phi(x_{12}x_{22}x_3x_{42}) + \\ & - \Phi(x_{12}x_2x_{32}x_{42}) - \Phi(x_1x_{22}x_{32}x_{42}) + \Phi(x_{12}x_{22}x_3x_4) + \\ & + \Phi(x_{12}x_2x_{32}x_4) + \Phi(x_{12}x_2x_3x_{42}) + \Phi(x_1x_2x_{32}x_{42}) + \\ & + \Phi(x_1x_{22}x_{32}x_4) + \Phi(x_1x_{22}x_3x_{42}) - \Phi(x_1x_2x_{32}x_4) + \\ & - \Phi(x_1x_2x_3x_{42}) - \Phi(x_{12}x_2x_3x_4) - \Phi(x_1x_{22}x_3x_4)\,; \end{aligned}$$

e facendo tendere successivamente $x_{12}x_{22}x_{32}x_{42}$ a $+\infty$, tenuto conto della relazione $0 \leq \Phi(x_1x_2x_3x_4)$ si trova che una qualunque $\Phi(x_1x_2x_3x_4)$

([14]) Vedi: G. Pompilj, loc. cit. ([4]).

della classe in questione deve soddisfare la seguente disuguaglianza:

$$(3)\quad \text{Magg.}\left\{\begin{array}{l}
0 \\
\Phi_{134}+\Phi_{124}-\Phi_{14} \\
\Phi_{134}+\Phi_{234}-\Phi_{34} \\
\Phi_{124}+\Phi_{234}-\Phi_{24} \\
\Phi_{123}+\Phi_{234}-\Phi_{23} \\
\Phi_{123}+\Phi_{134}-\Phi_{13} \\
\Phi_{123}+\Phi_{124}-\Phi_{12} \\
\Phi_{124}+\Phi_{123}+\Phi_{134}+\Phi_{234}+ \\
-\Phi_{12}-\Phi_{13}-\Phi_{23}-\Phi_{24}-\Phi_{34}+ \\
-\Phi_{14}+\Phi_{1}+\Phi_{2}+\Phi_{3}+\Phi_{4}-1
\end{array}\right\} \leq \Phi(x_1x_2x_3x_4) \leq \min.\left\{\begin{array}{l}
\Phi_{134} \\
\Phi_{124} \\
\Phi_{123} \\
\Phi_{234} \\
\Phi_{4}-\Phi_{34}-\Phi_{24}-\Phi_{14}+\Phi_{124}+ \\
+\Phi_{234}+\Phi_{134}; \\
\Phi_{3}-\Phi_{34}-\Phi_{23}-\Phi_{13}+\Phi_{134}+ \\
+\Phi_{123}+\Phi_{234}; \\
\Phi_{2}-\Phi_{24}-\Phi_{23}-\Phi_{12}+\Phi_{124}+ \\
\Phi_{123}+\Phi_{234}; \\
\Phi_{1}-\Phi_{4}-\Phi_{13}-\Phi_{12}+\Phi_{123}+ \\
+\Phi_{124}+\Phi_{134}
\end{array}\right.$$

ove si è indicato con Φ_{ijk} la funzione di ripartizione $\Phi_{ijk}(x_ix_jx_k)$, con Φ_{ij} la $\Phi_{ij}(x_ix_j)$, con Φ_i la $\Phi_i(x_i)$, $(ijk = 1, 2, 3, 4)$.

Ma il più grande valore che Φ_{ijk} può assumere in ogni punto è

$$\min. \{\Phi_i, \Phi_j, \Phi_k\}$$

ed il più piccolo è:

$$\text{Magg.} \{0, \Phi_i + \Phi_j + \Phi_k - 2\}.$$

Analogamente per Φ_{ij} per cui la (3) si riduce a

$$\text{Magg.} \{0, \Phi_1+\Phi_2+\Phi_3+\Phi_4-4+\text{Magg.} \{(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4)\} \leq$$
$$\leq \Phi(x_1x_2x_3x_4) \leq \min. \{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4\}.$$

* * *

Si vuole dimostrare che la funzione che assume in ogni punto il

$$\min. \{\Phi_1(x_1), \Phi_2(x_2), \Phi_3(x_3), \Phi_4(x_4)\}$$

è di ripartizione e quindi in esso si individua la massima funzione della classe di Frechet in questione.

Per la dimostrazione basterà verificare le proprietà caratteristiche di una funzione di ripartizione ([15]).

([15]) Vedi: G. Pompilj, loc. cit. ([4]).

Si ha:

a) $$\lim_{x_1 \to -\infty} \Phi_2(x_1x_2x_3x_4) = \lim_{x_2 \to -\infty} \Phi_2(x_1x_2x_3x_4) = \lim_{x_3 \to -\infty} \Phi_2(x_1x_2x_3x_4) =$$
$$= \lim_{x_4 \to -\infty} \Phi_2(x_1x_2x_3x_4) = 0.$$

ove per comodità di scrittura si è indicato con $\Phi_2(x_1x_2x_3x_4)$ il:

$$\text{min.}\ \{\Phi_1(x_1),\ \Phi_2(x_2),\ \Phi_3(x_3),\ \Phi_4(x_4)\}$$

b) $$\lim_{\substack{x_1 \to \infty \\ x_2 \to \infty \\ x_3 \to \infty \\ x_4 \to \infty}} \Phi_2(x_1x_2x_3x_4) = 1$$

c) Date quattro coppie di valori (x_{i1}, x_{i2}) con $i = 1, 2, 3, 4$ ed $x_{i1} \leq x_{i2}$, la variazione quadrupla, le sei doppie e le quattro semplici devono essere non negative.

Infatti, ammesso ad esempio $\Phi_1 \geq \Phi_2 \geq \Phi_3 \geq \Phi_4$, si ha:

$$\begin{aligned} {}^4\Delta\ \Phi_2(x_1x_2x_3x_4) = {} & \Phi_2(x_{12}x_{22}x_{32}x_{42}) - \Phi_4 - \Phi_2(x_3x_{42}) - \Phi_2(x_2x_{32}x_{42}) + \\ & - \Phi_2(x_1x_{22}x_{32}x_{42}) + \Phi_4 + \Phi_4 + \Phi_4 + \Phi_2(x_3x_{42}) + \\ & + \Phi_2(x_2x_{32}x_{42}) + \Phi_2(x_3x_{42}) - \Phi_2(x_3x_{42}) - \Phi_4 - \Phi_4 + \\ & - \Phi_4 + \Phi_4 = \Phi_2(x_{12}x_{22}x_{32}x_{42}) - \Phi_2(x_{12}x_{22}x_{32}x_{42}) \geq 0. \end{aligned}$$

Per una qualunque delle variazioni triple, ad esempio quella rispetto ad x_1, x_2, x_3 si ha:

$$\begin{aligned} {}_{x_1x_2x_3}{}^3\Delta\ \Phi_2(x_1x_2x_3x_4) = {} & \Phi_2(x_{12}x_{22}x_{32}x_4) - \Phi_2(x_3x_4) - \Phi_2(x_2x_{32}x_4) + \\ & - \Phi_2(x_1x_{22}x_{32}x_4) + \Phi_2(x_3x_4) + \Phi_2(x_3x_4) + \Phi_2(x_2x_{32}x_4) + \\ & - \Phi_2(x_3x_4) = \Phi_2(x_{12}x_{22}x_{32}x_4) - \Phi_2(x_1x_{22}x_{32}x_4) \geq 0 \end{aligned}$$

se, per semplicità si ammette, $\Phi_1 \geq \Phi_2 \geq \Phi_3$.

Analogamente per variazioni doppie e le semplici.

* * *

La funzione che assume in ogni punto il

$$\text{Magg.}\ \{0,\ \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 - 4 + \text{Magg.}(\Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_3,\ \Phi_4)\}.$$

non è di ripartizione giacchè la variazione quadrupla non è sempre non negativa.

2) *La classe di* Fréchet *associata a due v.c. doppie.*

Detta classe si definisce come l'insieme delle funzioni di ripartizione che verificano la:

$$\lim_{\substack{x_1 \to \infty \\ x_2 \to \infty}} \Phi(x_1x_2x_3x_4) = \Phi_{34}(x_3x_4)$$

$$\lim_{\substack{x_3 \to \infty \\ x_4 \to \infty}} \Phi(x_1x_2x_3x_4) = \Phi_{12}(x_1x_2).$$

Con considerazioni analoghe alle precedenti si trova che ogni funzione della classe deve soddisfare la limitazione

$$\text{Magg.}\,\{0,\ \Phi_{12} + \Phi_{34} - 2 + \text{Magg.}\,(\Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_3,\ \Phi_4)\} \leq$$
$$\leq \Phi(x_1x_2x_3x_4) \leq \text{min.}\,\{\Phi_{12},\ \Phi_{34}\}.$$

Le funzioni che assumono in ogni punto il

$$\text{min.}\,\{\Phi_{12}\Phi_{34}\} \text{ o il Magg.}\,\{0,\ \Phi_{12} + \Phi_{34} - 2 + \text{Magg.}\,(\Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_3,\ \Phi_4)\}$$

non sono di ripartizione.

Che la funzione

$$\text{min.}\,\{\Phi_{12};\ \Phi_{34}\}$$

non sia di ripartizione è di immediata verifica, nel caso, ad esempio in cui:

$$\Phi_{12} \geq \Phi_{34};\ \Phi_{12}(x_{12}x_{22}) \geq \Phi_{34}(x_{32}x_{42});\ \Phi_{12}(x_{12}x_2) \geq \Phi_{34}(x_{32}x_{42})$$
$$\Phi_{12}(x_1x_2) \leq \Phi_{34}(x_{32}x_{42});\ \Phi_{12}(x_1x_{22}) \geq \Phi_{34}(x_{32}x_{42})$$

nel qual caso:

$$^4\Delta = -\ \Phi_{34}(x_{32}x_{42}) + \Phi_{32}(x_{32}x_4) + \Phi_{34}(x_3x_{42}) + \Phi_{12}(x_1x_2) +$$
$$-\ \text{min.}\,\{\Phi_{12}(x_1x_2);\ \Phi_{34}(x_3x_{42})\} - \text{min.}\,\{\Phi_{12}(x_1x_2);\ \Phi_{34}(x_{32}x_4)$$

quantità che può essere anche negativa.

3) *La classe di* FRÉCHET *associata ad una v.c. semplice e ad una tripla.*

Sia $\Phi(x_1x_2x_3x_4)$ una funzione della classe verificante la relazione

$$\lim_{\substack{x_2 \to \infty \\ x_3 \to \infty \\ x_4 \to \infty}} \Phi_1(x_1x_2x_3x_4) = \Phi_1(x_1);\quad \lim_{x_1 \to \infty} \Phi(x_1x_2x_3x_4) = \Phi_{234}(x_2x_3x_4).$$

Per ogni funzione della classe si deve avere:

$$\text{Magg.}\,\{0,\ \Phi_{134} + \Phi_2 - 2 + \text{Magg.}\,\{\Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_3,\ \Phi_4\} \leq \Phi(x_1x_2x_3x_4) \leq$$
$$\leq \text{min.}\,\{\Phi_{234};\ \Phi_1\} = \Phi_2(x_1 \ldots x_4)$$

È ovvio che le due funzioni che assumono in ogni punto $\Phi_1(x_1x_2x_3x_4)$ o $\Phi_2(x_1x_2x_3x_4)$ non sono di ripartizione

* * *

Vi sarebbero ancora altri casi da studiare prima di chiudere queste prime ricerche sulle classi di FRÉCHET delle funzioni di ripartizione quadruple, ma questi nuovi casi non porterebbero, concettualmente, nulla di nuovo; così pure nulla di nuovo si troverebbe estendendo queste prime considerazioni alle classi di FRECHET delle funzioni di ripartizione a più di quattro variabili.