CARLA VAGHI

Energia di campi spazio-temporali emisimmetrici.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.2, p. 264–268.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_2_264_0>

Energia di campi spazio-temporali emisimmetrici.

Nota di CARLA VAGHI (a Milano)

Sunto. - *Si determina l'espressione del tensore energetico e del vettore che riassume le azioni ponderomotrici dei campi emisimmetrici spazio-temporali che estendono il campo elettromagnetico di* MAXWELL *e quello mesonico di* YUKAWA.

1. In alcune Note Lincee [1] B. FINZI ha dedotto le equazioni di campi che generalizzano il campo elettromagnetico Maxwelliano e quello mesonico di YUKAWA, da un principio di minimo riguardante una azione elettromagnetica generalizzata, e ne ha studiato alcune proprietà. Le equazioni generali di tali campi, rappresentati da tensori emisimmetrici dello spazio-tempo, contengono cinque costanti universali (quattro puri numeri, la quinta avente dimensioni di una lunghezza); successivamente UDESCHINI ha mostrato che, se si vogliono rispettare alcune late condizioni fisiche, di tali costanti disponibili a priori, due sole possono ritenersi non nulle: la lunghezza universale λ, che interviene nel campo di PROCA-YUKAWA, e il puro numero μ [2].

In questa Nota riprendo lo studio dei suddetti campi (nel vuoto) e determino l'espressione del tensore energetico, valendomi di un elegante procedimento istituito da HILBERT per il campo elettromagnetico [3]. Deduco poi il vettore spazio-temporale che riassume le azioni ponderomotrici del campo, ottenendo per esso una espressione del tutto analoga a quella dei corrispondenti vettori di MAXWELL e di YUKAWA.

(1) Cfr. B. FINZI: *Sul principio della minima azione e sulle equazioni elettromagnetiche che se ne deducono,* Rend. Acc. Lincei (8), 12, (1952), pp. 378-382, 477-480; *Sopra una estensione dei campi elettromagnetici,* Rend. Acc. Lincei (8), 13, (1952) pp. 211-215.

(2) Cfr. P. UDESCHINI: *Sopra un campo estendente quello elettromagnetico.* Rend. Acc. Lincei (8), 13, (1952) pp. 246-253.

(3) Cfr. D. HILBERT: *Die Grundlagen der Physik,* Nachrichten von der Königlichen Gesell. der Wissenschaften zu Gottingen, 1915, pp. 395-407; 1917, pp. 53-76; Math. Annalen, 92, (1924) pp. 1-32.

2. Nello spazio-tempo quadridimensionale riemanniano, il campo viene rappresentato (nel vuoto) da un unico tensore doppio emisimmetrico $F_{\beta\alpha} = -F_{\alpha\beta}$, e la distribuzione di cariche dal vettore J^α Riferendosi a tre coordinate spaziali $x^1\ x^2\ x^3$ e alla coordinata temporale x^0, la metrica abbia la seguente forma:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (4). \tag{1}$$

Poichè il determinante $g = \| g_{\alpha\beta} \|$ è negativo, si definisca come tensore di Ricci (reale) il tensore quadruplo emisimmetrico che ha le seguenti componenti:

(2)

$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ se gli indici non sono distinti,

$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \pm \sqrt{-g}$ se gli indici sono distinti e rispettivamente formano una permutazione di classe pari o di classe dispari rispetto alla fondamentale 0, 1, 2, 3.

Il tensore $F_{\alpha\beta}$ si decompone ([5]) nella somma di un tensore irrotazionale $H_{\alpha\beta}$ e di uno solenoidale $K_{\alpha\beta}$; $H_{\alpha\beta}$ è l'opposto del gradiente del primo potenziale Φ_α; $K_{\alpha\beta}$ è il rotore del secondo potenziale Ψ_ρ (Φ_α e Ψ_ρ sono entrambi vettori solenoidali):

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta} &= H_{\alpha\beta} + K_{\alpha\beta} = \Phi_{\beta/\alpha} - \Phi_{\alpha/\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} \Psi^{\rho/\sigma} = \\ &= \Phi_{\beta,\alpha} - \Phi_{\alpha,\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} g^{\rho\lambda} g^{\sigma\mu} \Psi_{\lambda,\mu} \end{aligned} \tag{3}$$

Le equazioni tensoriali alle quali soddisfa $F_{\alpha\beta}$ sono state dedotte da un principio di stazionarietà, rispetto ai potenziali Φ_α e Ψ_ρ, dell'azione:

$$\mathfrak{L} = \int_\tau L d\tau \tag{4}$$

ove τ indica una generica regione dello spazio-tempo. Le variazioni $\delta\Phi_\alpha$ e $\delta\Psi_\rho$ sono supposte nulle sul contorno γ della regione τ. La densità d'azione generalizzata, qualora si tengano presenti le citate condizioni fisiche poste da Udeschini ([6]), è data dalla seguente espressione:

$$L = \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \Phi_\alpha J^\alpha - \frac{1}{2\lambda^2} \Phi_\alpha \Phi^\alpha - \frac{\mu}{2\lambda^2} \Psi_\alpha \Psi^\alpha. \tag{5}$$

([4]) Si sottintende la sommatoria rispetto a indici omonimi che si saturano. Nel seguito la virgola è simbolo di derivazione ordinaria e la lineetta inclinata è simbolo di derivata tensoriale nella metrica (1).

([5]) Cfr. B. Finzi, l. c. ([1]) p. 380.

([6]) Cfr. P. Udeschini, l. c. ([2]).

Pertanto le equazioni di campo sono [7]:

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\,\varepsilon_{\alpha\beta\rho\gamma}F^{\alpha\beta/\rho} = \dfrac{\mu}{\lambda^2}\,\Psi_\gamma \\[2ex] F_{\alpha\beta}{}^{/\beta} = J_\alpha + \dfrac{1}{\lambda^2}\,\Phi_\alpha . \end{cases}$$

La costante $1/\lambda$ (avente le dimensioni del reciproco di una lunghezza) è in sostanza la costante caratteristica del campo di PROCA-YUKAWA; la costante μ è un puro numero. Se $\mu = 0$ e $1/\lambda \neq 0$, il tensore $F_{\alpha\beta}$ che obbedisce alle (6) si riduce alla sua parte irrotazionale $H_{\alpha\beta}$ e rappresenta il campo mesonico vettoriale reale.

Se $1/\lambda = 0$, $F_{\alpha\beta}$ si riduce ancora alla sua parte irrotazionale $H_{\alpha\beta}$, e rappresenta il campo elettromagnetico Maxwelliano secondo la concezione di MINKOWSKI.

3. Per calcolare il tensore energetico dei campi individuati dalla (6), ci si può valere di un procedimento che generalizza quello usato da HILBERT per il campo elettromagnetico Maxwelliano e che fa capo ad un principio variazionale [8]: si faccia variare l'azione (4) variando soltanto le componenti del tensore fondamentale $g_{\alpha\beta}$ e non i potenziali e la distribuzione di cariche; inoltre restino invariate le componenti $g_{\alpha\beta}$ sul contorno γ di τ. Si ponga tale variazione sotto la forma:

$$\delta\Omega = -\frac{1}{2}\int_\tau E_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}d\tau$$

il tensore doppio simmetrico $E_{\alpha\beta}$ che vi compare rappresenta il tensore energetico.

Osserviamo innanzitutto che l'elemento di estensione $d\tau$ si può esprimere così:

$$d\tau = \sqrt{-g}\;dx$$

ove dx indica il prodotto dei quattro differenziali delle coordinate. Prendendo la variazione rispetto a $g_{\alpha\beta}$ si ha perciò:

$$\delta d\tau = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\,g^{\alpha\beta}g\delta g_{\alpha\beta}dx = -\frac{1}{2}\,g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}d\tau .$$

(7) Le (6) corrispondono alle equazioni (14) di UDESCHINI, l. c. (2) con la sola differenza che il rotore del tensore doppio è la metà di quello indicato da UDESCHINI e che, essendo ε reale, entrambi i potenziali sono reali.

(8) Cfr. D. HILBERT - l. c. (3).

Ora, se indichiamo con l la densità d'azione del campo neutro, $l = L + \Phi_\alpha J^\alpha$, avremo:

$$\delta \int_\tau l d\tau = \int_\tau \left(\frac{\partial l}{\partial g^{\alpha\beta}} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} l \right) \delta g^{\alpha\beta} d\tau. \tag{7}$$

D'altra parte l'integrale

$$\int_\tau \Phi_\alpha J^\alpha d\tau = \int_\tau \Phi_\alpha J^\alpha \sqrt{-g}\ dx$$

è indipendente da $g_{\alpha\beta}$, perchè tale deve riguardarsi sia il potenziale Φ_α che la densità vettoriale $\sqrt{-g}\ J^\alpha$, rappresentante la distribuzione di cariche (9). Ne segue:

$$\delta \mathfrak{L} = \delta \int_\tau l d\tau$$

e quindi:

$$E_{\alpha\beta} = -2 \frac{\partial l}{\partial g^{\alpha\beta}} + g_{\alpha\beta} l. \tag{8}$$

Per calcolare $E_{\alpha\beta}$ osserviamo che, indicato con $*K_{\alpha\beta}$ il coniugato di $K_{\alpha\beta}$:

$$*K_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\gamma\delta\alpha\beta} K^{\gamma\delta} = \Psi_{\beta,\alpha} - \Psi_{\alpha,\beta}$$

l si può esprimere nella seguente forma:

$$l = \frac{1}{4} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} (H_{\alpha\beta} H_{\gamma\delta} - *K_{\alpha\beta} *K_{\gamma\delta}) + \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} H_{\alpha\beta} K_{\gamma\delta} -$$
$$- \frac{1}{2\lambda^2} \Phi_\alpha \Phi_\beta g^{\alpha\beta} - \frac{\mu}{2\lambda^2} \Psi_\alpha \Psi_\beta g^{\alpha\beta}.$$

Tenendo presente che la variazione dell'integrale

$$\int_\tau H_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta} d\tau = \int_\gamma \Phi_\beta K^{\alpha\beta} n_\alpha d\gamma \quad (10)$$

è nulla, si ottiene immediatamente per $E_{\alpha\beta}$ la seguente espressione:

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} = {} & H_{\alpha\gamma} H^{\gamma}_{\cdot\beta} + \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} H_{\gamma\delta} H^{\gamma\delta} - *K_{\alpha\gamma} *K^{\gamma}_{\cdot\beta} - \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} *K_{\gamma\delta} *K^{\gamma\delta} + \\ & + \frac{1}{\lambda^2} \Phi_\alpha \Phi_\beta - \frac{1}{2\lambda^2} g_{\alpha\beta} \Phi_\gamma \Phi^\gamma + \frac{\mu}{\lambda^2} \Psi_\alpha \Psi_\beta - \frac{\mu}{2\lambda^2} g_{\alpha\beta} \Psi_\gamma \Psi^\gamma. \end{aligned} \tag{9}$$

(9) Cfr. A. D. Fokker, *De virtueele verplatsingen van het electromagnetische en van het zwaartekrachtsveld bij de toepassing van het variatiebeginsel van Hamilton*, Amst. Akad. Versl., 25, pp. 1067-1084 (1917).

(10) Cfr. A. M. Pratelli - *Principî variazionali del campo elettromagnetico*, Annali Sc. Norm. Sup. Pisa (3), 7, 1953, pp. 161-203, form. (5.16) di p. 189.

Poichè

$$ {}^*K_{\alpha\gamma}{}^*K^{\gamma}_{.\beta} = K_{\alpha\gamma}K^{\gamma}_{.\beta} + \frac{1}{2}\, g_{\alpha\beta}K_{\gamma\delta}K^{\gamma\delta} $$

la (9) si può porre nella seguente forma:

$$ \begin{aligned} E_{\alpha\beta} = {} & H_{\alpha\gamma}H^{\gamma}_{.\beta} - K_{\alpha\gamma}K^{\gamma}_{.\beta} + \frac{1}{\lambda^2}\Phi_\alpha\Phi_\beta + \frac{\mu}{\lambda^2}\Psi_\alpha\Psi_\beta + \\ & + \frac{1}{4}\, g_{\alpha\beta}\left(H_{\gamma\delta}H^{\gamma\delta} - K_{\gamma\delta}K^{\gamma\delta} - \frac{2}{\lambda^2}\Phi_\gamma\Phi^\gamma - \frac{2\mu}{\lambda^2}\Psi_\gamma\Psi^\gamma\right). \end{aligned} \tag{9'} $$

Questo tensore doppio simmetrico dello spazio-tempo è il tensore energetico del campo generalizzato: esso si riduce, per campi irrotazionali, al tensore energetico di PROCA-YUKAWA che comprende come caso particolare (per $1/\lambda = 0$) anche quello del campo di MAXWELL.

4. Il vettore k_α, che sintetizza le azioni ponderomotrici del campo, è la divergenza del tensore energetico (9'). Questa definizione costituisce la naturale estensione di quella vigente nel campo elettromagnetico, dove k_α riassume la potenza specifica di corrente e la forza ponderomotrice per unità di volume:

$$ k_\alpha = E_{\alpha\beta}{}^{/\beta}, \tag{10} $$

$$ \begin{aligned} E_{\alpha\beta}{}^{/\beta} = {} & H_{\alpha\gamma}H^{\gamma}_{.\beta}{}^{/\beta} - \frac{1}{2}\,(K_{\alpha\gamma/\delta} + K_{\delta\alpha/\gamma} + K_{\gamma\delta/\alpha})K^{\gamma\delta} + \frac{1}{\lambda^2}(\Phi_{\alpha/\gamma} - \Phi_{\gamma/\alpha})\Phi^\gamma + \\ & + \frac{\mu}{\lambda^2}(\Psi_{\alpha/\gamma} - \Psi_{\gamma/\alpha})\Psi^\gamma = H_{\alpha.}^{\gamma}H_{\gamma\beta}{}^{/\beta} - \frac{1}{4}\, K^{\gamma\delta}\varepsilon_{\delta\gamma\rho\alpha}\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}K_{\mu\nu/\sigma} + \\ & + \frac{1}{\lambda^2}(\Phi_{\alpha/\gamma} - \Phi_{\gamma/\alpha})\Phi^\gamma + \frac{\mu}{\lambda^2}(\Psi_{\alpha/\gamma} - \Psi_{\gamma/\alpha})\Psi^\gamma . \end{aligned} $$

Per la (6) si ha:

$$ \begin{aligned} E_{\alpha\beta}{}^{/\beta} = {} & H_{\alpha}{}^{\gamma}\left(J_\gamma + \frac{1}{\lambda^2}\Phi_\gamma\right) - \frac{1}{2}\, K^{\gamma\delta}\varepsilon_{\gamma\delta\rho\alpha}\frac{\mu}{\lambda^2}\Psi^\rho + \\ & + \frac{1}{\lambda^2}(\Phi_{\alpha/\gamma} - \Phi_{\gamma/\alpha})\Phi^\gamma + \frac{\mu}{\lambda^2}(\Psi_{\alpha/\gamma} - \Psi_{\gamma/\alpha})\Psi^\gamma \end{aligned} $$

da cui, con semplici calcoli:

$$ k_\alpha = H_{\alpha\gamma}J^\gamma . \tag{10'} $$

Il vettore che dà le azioni ponderomotrici nel campo generalizzato si ottiene quindi componendo il vettore che dà la distribuzione di cariche con la sola parte irrotazionale del tensore di campo.