Bollettino Unione Matematica Italiana

Mario Italiani

L'intorno di un punto unito a Jacobiano nullo in una trasformazione puntuale fra spazi.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.2, p. 254–263.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_2_254_0>

L'intorno di un punto unito a Jacobiano nullo in una trasformazione puntuale fra spazi.

Nota di Mario Italiani (a Modena)

Sunto. - *Si studiano le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari sovrapposti nell'intorno di un punto unito in cui il determinante Jacobiano sia nullo. Si determina un riferimento proiettivo intrinseco e si assegnano significati geometrici agli invarianti della trasformazione.*

Summary. - *Point-transformations between two coincident linear spaces are studied in the neighbourhood of a fixed point in which the Jacobi determinant is null. An intrinsic frame and geometrical significance for the invariants of the transformation are obtained.*

1. L'intorno di una coppia di punti O, O', corrispondenti in una trasformazione puntuale T fra due spazi lineari S, S', è stato studiato [1] nel caso di una coppia regolare e in quello di una coppia che sia a Jacobiano nullo. È stato poi studiato [2] il caso particolare in cui S, S' coincidono, come pure i due punti O, O' (e costituiscono pertanto un punto unito in T) ma soltanto nel caso regolare.

Scopo della presente Nota è quello di studiare l'intorno di un punto unito in cui sia nullo lo Jacobiano, cioè il caso particolare in cui si verificano insieme due delle circostanze sopra dette.

(1) M. Villa, *Le trasformazioni puntuali tra due spazi lineari.* I. Intorno del 2° ordine - II. Intorno del 3° ordine. Riferimenti intrinseci - III. Trasformazioni cremoniane osculatrici, « Atti Acc. Naz. Lincei-Rend. », (8) 4, 55-61, 192-196, 295-303 (1948).

M. Villa e G. Vaona, *Le trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo.* I. Intorno del 2° ordine - II. Intorno del 3° ordine. Riferimenti intrinseci, « Atti Acc. Naz. Lincei-Rend. », (8) 6, 184-188. 278-282 (1949).

(2) C. Longo, *Trasformazioni puntuali nell'intorno di un punto unito,* « Atti Acc. Naz. Lincei-Rend. », (8) 8, 320-325 (1950).

M. Villa, *Una cubica collegata ad un punto unito in una trasformazione puntuale,* « Atti Acc. Ligure Sc. Lett. », 9. 1-11 (1952).

L. Muracchini, *Sulle trasformazioni puntuali tra piani proiettivi sovrapposti,* « Boll. Un. Mat. Ital. », (3) 9, 360-366 (1954).

L. Cantoni, *Sulle trasformazioni puntuali fra spazi proiettivi sovrapposti nell'intorno di un punto unito,* « Boll. Un. Mat. Ital. », (3) 10, 212-223 (1955).

Per la determinazione del riferimento intrinseco si fa uso della nozione di corrispondenza linearizzante seguendo un procedimento che M. VILLA ha già utilizzato a tale scopo ([3]). Tale nozione, come lo stesso VILLA ha osservato, sussiste anche nel caso dello Jacobiano nullo. È sufficiente in generale, la considerazione dell'intorno del secondo ordine per conseguire lo scopo indicato. I numeri da 2 a 8 sono dedicati al caso di spazi a dimensione r qualunque. Nei numeri da 8 a 11 si fa un esame particolare del caso in cui la trasformazione operi tra spazi ordinari, mentre il n. 12 è dedicato alle trasformazioni tra piani.

2. Si consideri una trasformazione puntuale T di uno spazio lineare $S_r (r > 2)$ in sè e sia O un punto unito per la T in cui il determinante Jacobiano sia nullo con caratteristica massima.

Assunto il punto O come origine di un sistema di coordinate proiettive non omogenee, le equazioni della T, nell'intorno di O, risulteranno della seguente forma:

$$x_i' = \sum_j a_j^i x_j + [2| \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, r)$$

dove con [2] si indica un complesso di termini di grado ≥ 2 ed è:

$$a_j^r = \sum_s \lambda_s a_j^s \qquad (s = 1, 2, \ldots, r-1).$$

La T subordina fra le direzioni uscenti da O una omografia singolare Ω la quale ammette come spazi singolari una retta (stazionaria) ed un iperpiano (fisso), la prima di equazioni

$$\sum_j a_j^s x_j = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, r-1)$$

il secondo di equazione

$$x_r = \sum_s \lambda_s x_s .$$

([3]) M. VILLA, *Progressi recenti nella teoria delle trasformazioni puntuali*, « Conferenze del Sem. di Mat. di Bari », n. 10 (1955).

G. VAONA, *Sulla trasformazione linearizzante di una corrispondenza puntuale tra spazi lineari*, « Boll. Un. Mat. Ital. », (3) 6, 293-299 (1951).

M. VILLA, *Problemi integrali sulle trasformazioni puntuali*, « Compositio mathematica », 12, 137-146 (1954).

M. VILLA, *Ancora sui riferimenti intrinseci delle trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo*, « Scritti Matematici in onore di F. SIBIRANI », Zuffi, Bologna, 1956.

L. CANTONI, *Sulle corrispondenze linearizzanti e sui riferimenti intrinseci in una coppia a Jacobiano nullo*, « Boll Un. Mat Ital. », (3) 11, 402-411 (1956).

Supposto che la retta stazionaria e l'iperpiano fisso non si appartengano, si potrà assumere la retta stazionaria come retta

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{r-1} = 0$$

e l'iperpiano fisso come iperpiano

$$x_r = 0$$

ottenendo così le condizioni

$$a_r^s = 0 \qquad \lambda_s = 0.$$

L'omografia Ω subordina fra gli S_{r-2} per O dell'iperpiano fisso e gli iperpiani per la retta stazionaria una proiettività ω non singolare.

Indicate con

$$\begin{cases} v_1x_1 + v_2x_2 + \dots + v_{r-1}x_{r-1} = 0 \\ x_r = 0 \end{cases}$$

le equazioni di un S_{r-2} per O dell'iperpiano fisso, l'equazione dell'iperpiano corrispondente risulta la seguente:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + \dots + u_{r-1}x_{r-1} = 0 \tag{1}$$

dove

$$\rho u_p = \sum_s a_p^s v_s \qquad (s,\ p = 1,\ 2, \dots,\ r-1). \tag{2}$$

Le (2) possono anche essere interpretate come le equazioni della proiettività ω' subordinata dalla ω nella stella di centro O tra gli S_{r-2} dell'iperpiano fisso e gli S_{r-2} segati sullo stesso iperpiano fisso dagli iperpiani (1).

Se gli $r-1$ S_{r-2} uniti in tale proiettività sono tutti distinti, ad essi possono venir assegnate le equazioni

$$\begin{cases} x_s = 0 \\ x_r = 0 \end{cases} \qquad (s = 1,\ 2, \dots,\ r-1)$$

il che porta

$$a_p^s = 0 \qquad (s \neq p)$$

3. A seguito delle scelte operate, le equazioni della trasformazione T si possono scrivere nel modo seguente;

$$\begin{cases} x_s' = a_s x_s + \sum\limits_{ij} a_{ij}^s x_i x_j + [3] \\ x_r' = \sum\limits_{ij} a_{ij}^r x_i x_j = [3] \end{cases} \qquad \begin{array}{l} a_{ij} = a_{ji} \\ (s = 1,\ 2, \dots,\ r-1) \\ (i,\ j = 1,\ 2, \dots,\ r) \end{array}$$

dove [3] indica un complesso di termini di grado ≥ 3 ed i coefficienti a_s sono tutti diversi fra loro.

A questo proposito si può osservare che i coefficienti a_s sono degli invarianti di carattere topologico il cui significato si ottiene facilmente considerando le omografie tangenti

$$\begin{cases} x_s' = \dfrac{a_s x_s}{1 + \sum\limits_h b_h x_h} & (h = 1, 2, \dots, r) \\ x_r' = 0 & (s = 1, 2, \dots, r-1). \end{cases}$$

Tali omografie subordinano infatti sulla retta

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{s-1} = x_{s+1} = \dots = x_r = 0$$

una proiettività di cui a_s è l'invariante.

4. Come è noto, le rette caratteristiche della trasformazione T risultano intersezione del cono

$$\sum_{ij} a_{ij}{}^r x_j x_i = 0$$

e della V_2

$$\frac{\sum\limits_{ij} a_{ij}{}^1 x_i x_j}{a_1 x_1} = \frac{\sum\limits_{ij} a_{ij}{}^2 x_i x_j}{a_2 x_2} = \dots = \frac{\sum\limits_{ij} a_{ij}{}^{r-1} x_i x_j}{a_{r-1} x_{r-1}} .$$

Scelta una di tali rette come retta unità, si ottengono le condizioni

$$\sum_{ij} a_{ij}{}^r = 0$$

$$\frac{\sum\limits_{ij} a_{ij}{}^1}{a_1} = \frac{\sum\limits_{ij} a_{ij}{}^2}{a_2} = \dots = \frac{\sum\limits_{ij} a_{ij}{}^{r-1}}{a_{r-1}} .$$

5. Fissato così il riferimento nella stella di centro O, si prenda in considerazione una generica omografia tangente T^*

$$\begin{cases} x_s' = \dfrac{a_s x_s}{1 + \varphi} & \varphi = \sum\limits_h b_h x_h \\ & (h = 1, 2, \dots, r) \\ x_r' = 0 & (s = 1, 2, \dots, r-1) \end{cases}$$

e la corrispondenza linearizzante relativa a T e T^*, la quale si rappresenterà con le seguenti equazioni

$$(3) \qquad \begin{cases} \rho\bar{\alpha}_s = \sum\limits_{ij} a_{ij}{}^s \alpha_i \alpha_j + a_s \alpha_s \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \\ \rho\bar{\alpha}_r = \sum\limits_{ij} a_{ij}{}^r \alpha_i \alpha_j \end{cases}$$

essendo

$$\frac{x_1}{\alpha_1} = \frac{x_2}{\alpha_2} = \dots = \frac{x_r}{\alpha_r} \quad \text{e} \quad \frac{x_1}{\bar{\alpha}_1} = \frac{x_2}{\bar{\alpha}_2} = \dots = \frac{x_r}{\bar{\alpha}_r}$$

due rette corrispondenti.

Le (3), considerate come equazioni nell'incognita φ, risultano compatibili quando la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \bar{\alpha}_s & \sum\limits_{ij} a_{ij}{}^s \alpha_i \alpha_j & a_s \alpha_s \\ \bar{\alpha}_r & \sum\limits_{ij} a_{ij}{}^r \alpha_i \alpha_j & 0 \end{matrix} \right\| \qquad (s = 1, 2, \dots, r-1)$$

è nulla. Pertanto, fissata una retta $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$, la corrispondente $(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_r)$ dovrà essere scelta in modo che tale condizione sia soddisfatta. Sarà allora possibile determinare il valore di φ mediante due delle equazioni (3), ad esempio la prima e l'ultima, se soddisfano le ovvie ipotesi.

Si ottiene così:

$$\varphi = \frac{\bar{\alpha}_1 \sum\limits_{ij} a_{ij}{}^r \alpha_i \alpha_j - \bar{\alpha}_r \sum\limits_{ij} a_{ij}{}^1 \alpha_i \alpha_j}{a_1 \alpha_1 \bar{\alpha}_r}. \tag{4}$$

Per determinare gli r coefficienti b_h si sceglieranno quindi r coppie di rette corrispondenti tali da rendere soddisfatte le condizioni sopra enunciate. Se si fissano ad esempio le r rette p^k per cui

$$p^1: \quad \alpha_1{}^1 = 1 \quad \alpha_n{}^1 = 0 \quad \alpha_r{}^1 = -1 \quad (n=2, 3, \dots, r-1)$$
$$p^k: \quad \alpha_1{}^k = 1 \quad \alpha_k{}^k = 1 \quad \alpha_m{}^k = 0 \quad (k, m=2, 3, \dots, r)\ (k \neq m)$$

ed in corrispondenza le r rette $\bar{p}^l$ per cui

$$\bar{\alpha}_1{}^l = 0 \qquad \bar{\alpha}_r{}^l = 1 \qquad (l = 1, 2, \dots, r)$$

$$\left| \begin{matrix} \bar{\alpha}_1{}^l & \sum\limits_{ij} a_{ij}{}^1 \alpha_i{}^l \alpha_j{}^l & a_1 \alpha_1{}^l \\ \bar{\alpha}_n{}^l & \sum\limits_{ij} a_{ij}{}^n \alpha_i{}^l \alpha_j{}^l & a_n \alpha_n{}^l \\ \bar{\alpha}_r{}^l & \sum a_{ij}{}^r \alpha_i{}^l \alpha_j{}^l & 0 \end{matrix} \right| = 0 \quad (n = 2, 3, \dots, r-1)$$

la (4) porge:

$$b_1 - b_r = \frac{-(a_{11}{}^1 - 2a_{1r}{}^1 + a_{rr}{}^1)}{a_1}$$

$$b_1 + b_r = \frac{-(a_{11}{}^1 + 2a_{1r}{}^1 + a_{rr}{}^1)}{a_1}$$

$$b_1 + b_n = \frac{-(a_{11}{}^1 + 2a_{1n}{}^1 + a_{nn}{}^1)}{a_1} \quad (n=2, 3, \dots, r-1).$$

Risulta così determinata intrinsecamente una corrispondenza linearizzante e di conseguenza una omografia tangente K. Assunto l'iperpiano

$$1 + b_1 x_1 + \dots + b_r x_r = 0$$

come iperpiano improprio si ottengono le condizioni:

$$a_{11}^1 + a_{rr}^1 = 0 \quad a_{1r}^1 = 0 \quad a_{11}^1 + 2a_{1n}^1 + a_{nn}^1 = 0 \quad (n = 2, 3, \dots, r-1)$$

6. Rimane da fissare il punto unità sulla retta unità.

A tale scopo si consideri la ipersuperficie alla quale corrisponde nella T il piano $x_1 = 0$

$$a_1 x_1 + \sum_{ij} a_{ij}^1 x_i x_j + [3] = 0 \tag{5}$$

e la iperquadrica

$$a_1 x_1 + \sum_{pq} a_{pq} x_p x_q = 0 \qquad (p, q = 2, 3, \dots, r) \tag{6}$$

tangente nel punto improprio dell'asse x_1 all'iperpiano improprio ed avente in comune con la ipersuperficie (5) in O una calotta del secondo ordine; assunto come punto unità il punto in cui la iperquadrica (6) sega la retta unità, si ottiene

$$a_1 + \sum_{pq} a_{pq}^1 = 0 \qquad (p, q = 2, 3, \dots, r)$$

7. Il riferimento intrinseco è così completamente fissato e le equazioni canoniche della T risultano le seguenti.

$$\begin{cases} x_s' = a_s x_s + \sum_{ij} a_{ij}^s x_i x_j + [3] & (s = 1, 2, \dots, r-1) \\ x_r' = \sum_{ij} a_{ij}^r x_i x_j + [3] & (i, j = 1, 2, \dots, r) \end{cases}$$

nella quale i coefficienti dei termini di secondo grado sono legati dalle relazioni

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \sum_{ij} a_{ij}^r = 0 \quad \frac{\sum_{ij} a_{ij}^1}{a_1} = \frac{\sum_{ij} a_{ij}^2}{a_2} = \dots = \frac{\sum_{ij} a_{ij}^{r-1}}{a_{r-1}}$$

$$a_{11}^1 + a_{rr}^1 = 0 \quad a_{1r}^1 = 0 \quad \sum_{pq} a_{pq}^1 + a_1 = 0 \quad (p, q = 2, 3, \dots, r)$$

$$a_{11}^1 + 2a_{1n}^1 + a_{nn}^1 = 0 \quad (n = 2, 3, \dots, r-1).$$

Il significato geometrico dei coefficienti del secondo ordine, i quali ovviamente risultano degli invarianti proiettivi, si ottiene facilmente per mezzo delle rette caratteristiche della T non utilizzate per fissare il riferimento e per mezzo dell'iperpiano tangente in O alla ipersuperficie Jacobiana.

8. Nel presente paragrafo e nei successivi 9, 10, 11 supporremo $r = 3$ e prenderemo in esame sia il caso in cui la proiettività ω' che intercede tra le rette per O del piano fisso e le rette segate su tale piano dai piani per la retta stazionaria non sia generale, quanto il caso, fin qui escluso, in cui la caratteristica k del determinante Jacobiano, pur essendo diversa da zero, non sia massima.

Se la ω' è generale e $k = 2$, in forza di quanto precede si hanno per la T le espressioni seguenti

$$\begin{cases} x' = ax + a_{11}x^2 - (a_{11} + a_{22})xy + a_{22}y^2 + (a_{11} - a_{22} - a)yz - a_{11}z^2 + [3] \\ y' = by + b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz + b_{33}z^2 + [3] \\ z' = \qquad c_{11}x^2 + 2c_{12}xy + c_{22}y^2 + 2c_{13}xz + 2c_{23}yz + c_{33}z^2 + [3] \end{cases}$$

dove

$$c_{11} + 2c_{12} + c_{22} + 2c_{13} + 2c_{23} + c_{33} = 0$$
$$b_{11} + 2b_{12} + b_{22} + 2b_{13} + 2b_{23} + b_{33} = -\frac{b}{a}(a + a_{22}).$$

I dodici invarianti proiettivi del secondo ordine trovano il loro significato geometrico nella determinazione delle cinque rette caratteristiche non utilizzate per fissare il riferimento e del piano tangente in O alla superficie Jacobiana.

9. Se la ω' è parabolica e $k = 2$, assunta la retta stazionaria come asse z, il piano fisso come piano xy e l'unica retta unita nella ω' come asse y, si ottiene:

$$\begin{cases} x' = ax + \qquad [2] \\ y' = a'x + ay + [2] \\ z' = \qquad\qquad [2]. \end{cases}$$

Scelta poi come retta unità una retta caratteristica e come asse x la retta corrispondente nella ω' della retta unità del piano $z = 0$, si ha di conseguenza

$$a + a' = 0 \quad \sum_{ij} b_{ij} = 0 \quad \sum_{ij} c_{ij} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

Fissato così il riferimento intrinseco nella stella di centro O, si potrà procedere come nel caso generale, determinando pertanto le ulteriori condizioni:

$$a_{11} + a_{33} = 0 \quad a_{13} = 0 \quad a_{11} + 2a_{12} + a_{22} = 0$$
$$a + a_{22} + 2a_{23} + a_{33} = 0.$$

Per la T si hanno quindi nel presente caso gli sviluppi seguenti:

$$\begin{cases} x' = ax + a_{11}x^2 - (a_{11} + a_{22})xy + a_{22}y^2 + (a_{11} - a_{22} - a)yz - a_{11}z^2 + [3] \\ y' = a(x + y) + b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz + b_{33}z^2 + [3] \\ z' = \qquad c_{11}x^2 + 2c_{12}xy + c_{22}y^2 + 2c_{13}xz + 2c_{23}yz + c_{33}z^2 + [3] \end{cases}$$

dove

$$b_{11} + 2b_{12} + b_{22} + 2b_{13} + 2b_{23} + b_{33} = c_{11} + 2c_{12} + c_{22} + 2c_{13} + 2c_{23} + c_{33} = 0.$$

Per quanto riguarda il significato geometrico degli invarianti del secondo ordine valgono le considerazioni fatte nel paragrafo precedente.

10. Se la ω' è l'identità e sempre $k = 2$, assunta la retta stazionaria come asse z ed il piano fisso come piano xy, si ha

$$\begin{cases} x' = ax + [2] \\ y' = ay + [2] \\ z' = \qquad [2]. \end{cases}$$

Assunte come rette unità nei piani $x = 0$ e $y = 0$ due rette caratteristiche, si ottengono le condizioni:

$$a_{22} + 2a_{23} + a_{33} = 0 \qquad c_{22} + 2c_{23} + c_{33} = 0$$
$$b_{11} + 2b_{13} + b_{33} = 0 \qquad c_{11} + 2c_{13} + c_{33} = 0.$$

Il riferimento intrinseco nella stella di centro O risulta così completamente fissato. Per fissare il piano improprio si potrà procedere come nel caso generale, determinando le condizioni

$$a_{11} + a_{33} = 0 \quad a_{13} = 0 \quad a_{11} + 2a_{12} + a_{22} = 0.$$

Allo scopo di scegliere il punto unità sulla retta unità si consideri la quadrica tangente nel punto improprio dell'asse x all'iperpiano improprio e avente in comune con la superficie cui corrisponde nella T il piano $x = 0$ una calotta del secondo ordine.

Assumendo come punto unità il punto comune alla retta unità ed al piano polare del punto improprio della retta unità del piano $y = 0$ rispetto alla quadrica sopracitata si ottiene la condizione

$$a + 2(a_{23} + a_{33}) = 0.$$

Le equazioni canoniche della T nel presente caso sono pertanto le seguenti:

$$\begin{cases} x' = ax + a_{11}x^2 - axy + (a - a_{11})y^2 - (a - 2a_{11})yz - a_{11}z^2 + [3] \\ y' = ay + b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 - (b_{11} + b_{33})xz + 2b_{23}yz + b_{33}z^2 + [3] \\ z' = \qquad c_{11}x^2 + 2c_{12}xy + c_{22}y^2 - (c_{11} + c_{33})xz - (c_{22} + c_{33})yz + c_{33}z^2 + [3]. \end{cases}$$

I dieci invarianti proiettivi del secondo ordine trovano il loro significato geometrico nella determinazione delle quattro rette caratteristiche non utilizzate per fissare il riferimento e del piano tangente in O alla superficie Jacobiana.

11. Supponiamo ora che la caratteristica del determinante Jaco biano in O sia uguale ad uno. Assunto il piano stazionario come piano $x=0$ e la retta fissa come asse x, si hanno per la T le espressioni

$$\begin{cases} x' = ax + \sum\limits_{ij} a_{ij}x_i x_j + [3] \\ y' = \sum\limits_{ij} b_{ij}x_i x_j + [3] \\ z' = \sum\limits_{ij} c_{ij}x_i x_j + [3]. \end{cases}$$

Per completare il riferimento intrinseco nella stella di centro O si potranno assumere come rette unità dei piani $y=0$ e $z=0$ due rette caratteristiche, determinando così le condizioni:

$$b_{11} + 2b_{13} + b_{33} = 0 \qquad c_{11} + 2c_{13} + c_{33} = 0$$
$$b_{11} + 2b_{12} + b_{22} = 0 \qquad c_{11} + 2c_{12} + c_{22} = 0.$$

Per il seguito si procederà come nel caso generale ottenendo così:

$$a_{11} + a_{33} = 0 \quad a_{13} = 0 \quad a_{11} + 2a_{12} + a_{22} = 0$$
$$a + a_{22} + 2a_{23} + a_{33} = 0.$$

Pertanto le equazioni canoniche della T nel presente caso sono le seguenti:

$$\begin{cases} x' = ax + a_{11}x^2 - (a_{11} + a_{22})xy + a_{22}y^2 + (a_{11} - a_{22} - a)yz - a_{11}z^2 + [3] \\ y' = b_{11}x^2 - (b_{11} + b_{22})xy + b_{22}y^2 - (b_{11} + b_{33})xz + 2b_{23}yz + b_{33}z^2 + [3] \\ z' = c_{11}x^2 - (c_{11} + c_{22})xy + c_{22}y^2 - (c_{11} + c_{33})xz + 2c_{23}yz + c_{33}z^2 + [3]. \end{cases}$$

I dieci invarianti proiettivi del secondo ordine possono trovare una interpretazione geometrica nella determinazione delle due rette caratteristiche non utilizzate per fissare il riferimento e delle sei rette intersezione del cono cuspidale con i tre piani $x=0$, $y=0$, $z=0$.

12. Supponiamo ora $r=2$. Scelti come assi x ed y le due rette fissa e stazionaria supposte distinte e come retta unità nel fascio di centro O una delle due rette caratteristiche, si hanno per la T

le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' = ax + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + [3] \\ y' = \qquad b_{11}x^2 - (b_{11} + b_{22})xy + b_{22}y^2 + [3]. \end{cases}$$

Fissato così il riferimento nel fascio di centro O, si prenda in considerazione una generica omografia tangente T^*

$$\begin{cases} x' = \dfrac{ax}{1+\varphi} \\ y' = 0 \end{cases} \qquad (\varphi = b_1 x + b_2 y)$$

e la relativa corrispondenza linearizzante

$$\begin{cases} \rho\bar{\alpha}_1 = a_{11}\alpha_1^2 + 2a_{12}\alpha_1\alpha_2 + a_{22}\alpha_2^2 + a\alpha_1\varphi \\ \rho\bar{\alpha}_2 = b_{11}\alpha_1^2 - (b_{11} + b_{22})\alpha_1\alpha_2 + b_{22}\alpha_2^2. \end{cases}$$

Per determinare in modo intrinseco i coefficienti b_1 e b_2 si sceglieranno due coppie di rette corrispondenti ad arbitrio. Per esempio si faranno corrispondere alle due rette $x + y = 0$ e $x - y = 0$ rispettivamente le due rette $x = 0$ e $y = 2x$. Si ottengono così le relazioni

$$b_1 - b_2 = \frac{-(a_{11} - 2a_{12} + a_{22})}{a}$$

$$b_1 + b_2 = \frac{(b_{11} + 2b_{12} + b_{22}) + 2(a_{11} + 2a_{12} + a_{22})}{-a}.$$

Assunto l'iperpiano

$$1 + b_1 x + b_2 y = 0$$

come iperpiano improprio, si ottengono le condizioni:

$$a_{11} + a_{22} = 0 \qquad a_{12} = 0.$$

Per la scelta del punto unità si potrà procedere come nel caso generale per cui si avrà

$$a + a_{22} = 0.$$

Pertanto le equazioni canoniche della T risultano le seguenti.

$$\begin{cases} x' = ax + a(x^2 - y^2) + [3] \\ y' = \qquad b_{11}x^2 - (b_{11} + b_{22})xy + b_{22}y^2 + [3]. \end{cases}$$

I due invarianti proiettivi del secondo ordine trovano una interpretazione geometrica nella determinazione della retta caratteristica non utilizzata per fissare il riferimento e della tangente Jacobiana