Bollettino
Unione Matematica Italiana

Fabio Manaresi

Sulle serie multiple di Fourier di alcune classi di funzioni.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.2, p. 247–253.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_2_247_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1957.

Sulle serie multiple di Fourier di alcune classi di funzioni.

Nota di Fabio Manaresi (a Bologna)

Sunto. - *Si veda il n. 1.*

1. Sia

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \lambda_{\mu,\nu} A_{\mu,\nu}(x, y), \tag{1}$$

ove

$$\lambda_{\mu,\nu} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{se è} \quad \mu = \nu = 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{se è} \quad \mu = 0,\ \nu > 0, \quad \text{oppure} \quad \mu > 0,\ \nu = 0 \\ 1, & \text{se è} \quad \mu > 0,\ \nu > 0, \end{cases}$$

$$A_{\mu,\nu}(x, y) = a_{\mu,\nu} \cos \mu x \cos \nu y + b_{\mu,\nu} \operatorname{sen} \mu x \cos \nu y +$$
$$+ c_{\mu,\nu} \cos \mu x \operatorname{sen} \nu y + d_{\mu,\nu} \operatorname{sen} \mu x \operatorname{sen} \nu y,$$

una serie doppia trigonometrica. Posto:

$$s_{m,n}(x, y) = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_{\mu,\nu} A_{\mu,\nu}(x, y), \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\sigma_{m,n}(x, y) = \frac{1}{mn} \sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} s_{\mu,\nu}(x, y) =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} \left(1 - \frac{\mu}{m}\right)\left(1 - \frac{\nu}{n}\right) \lambda_{\mu,\nu} A_{\mu,\nu}(x, y). \qquad (m, n = 1, 2, 3, \ldots),$$

si proveranno i seguenti teoremi:

I. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la* (1) *sia la serie di Fourier di una funzione* f(x, y) *periodica, di periodo* 2π, *rispetto a ciascuna delle variabili* x *ed* y, *e Lip* α $(0 < \alpha < 1)$, *è che risulti*

$$\sigma_{m,n}(x, y) - \sigma_{p,q}(x, y) = O(m^{-\alpha} + n^{-\alpha}) \tag{2}$$

uniformemente in tutto il piano xy, *per qualunque coppia di interi* p, q, *con* p > m, q > n.

II. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la* (1) *sia la serie di Fourier di una funzione* f(x, y) *periodica, di periodo* 2π, *rispetto a ciascuna delle variabili* x *ed* y, *e continua, è che la successione* $\{\sigma_{m,n}(x, y)\}$ *sia uniformemente convergente in tutto il piano* xy.

III. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la* (1) *sia la serie di Fourier di una funzione* f(x, y) *periodica, di periodo* 2π, *rispetto a ciascuna delle variabili* x *ed* y, *e limitata, è che risulti*

$$|\sigma_{m,n}(x, y)| \leq M \qquad (m \quad n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3}$$

in tutto il piano xy, *essendo* M *una costante positiva*.

Il teorema I., la cui dimostrazione sarà esposta nei nn. 2 e 3, è l'estensione alle serie doppie di un risultato di DU PLESSIS ([1]), mentre i teoremi II. e III., che verranno dimostrati nel n. 4, costituiscono l'estensione alle serie doppie di noti teoremi relativi alle serie semplici ([2]).

I precedenti risultati si possono estendere facilmente alle serie r–ple, con r 2.

2. Alla dimostrazione del teorema I. si premette quella del seguente lemma, che costituisce una parziale estensione alle funzioni di due variabili di un teorema di DE LA VALLEE POUSSIN ([3]).

Se f(x, y) *è una funzione periodica, di periodo* 2π, *rispetto a ciascuna delle variabili* x *ed* y, *e se*

$$\{T_{m,n}(x, y)\} = \left\{\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n}(\alpha_{\mu,\nu}\cos\mu x\cos\nu y + \beta_{\mu,\nu}\,\mathrm{sen}\,\mu x\cos\nu y + \right.$$
$$\left. + \gamma_{\mu,\nu}\cos\mu x\,\mathrm{sen}\,\nu y + \delta_{\mu,\nu}\,\mathrm{sen}\,\mu x\,\mathrm{sen}\,\nu y)\right\}$$

è una successione di polinomi trigonometrici tale che risulti

$$T_{m,n}(x, y) - f(x, y) = 0(m^{-\alpha} + n^{-\alpha}) \qquad (0 < \alpha < 1) \tag{4}$$

uniformemente in tutto il piano xy, *allora la* f(x, y) *è Lip* α.

Dalla (4) si trae

$$\lim_{\substack{m\\ n}\}\to\infty} T_{m,n}(x, y) = f(x, y)$$

([1]) N. DU PLESSIS, *A note about functions in Lip* α, « Proc. Edinburgh Math. Soc. », ser. II, vol. 10, parte II, p. 100 (1954).

([2]) Cfr. A. ZYGMUND, *Trigonometrical series*, Varsavia (1935) p. 79.

([3]) C. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle*, Gauthier-Villars, Paris (1919), p. 57.

uniformemente in tutto il piano xy, onde, posto

$$R_{m,n}(x, y) = f(x, y) - T_{m,n}(x, y)$$

e indicato con a un intero maggiore di 1, è sufficiente provare che il modulo di continuità $\omega_R(\delta)$ ([4]) di $R_{a^2,a^2}(x, y)$ soddisfa, per $0 < \delta \leq \sqrt{2}\pi$, alla limitazione

$$\omega_R(\delta) \leq M\delta^\alpha, \tag{5}$$

con M costante positiva, giacchè la (5) vale manifestamente per il modulo di continuità del polinomio trigonometrico $T_{a^2,a^2}(x, y)$.

Si può scrivere

$$R_{a^2,a^2}(x, y) = \sum_{k=2}^{\nu} \varphi_k(x, y) + \sum_{k=\nu+1}^{\infty} \varphi_k(x, y), \tag{6}$$

ove

$$\varphi_k(x, y) = R_{a^k,a^k}(x, y) - R_{a^{k+1},a^{k+1}}(x, y) =$$

$$= T_{a^{k+1},a^{k+1}}(x, y) - T_{a^k,a^k}(x, y) \qquad (k = 2, 3, 4, \ldots)$$

e ν è un qualsivoglia intero non inferiore a 2.

Per la (4), si ha

$$|\varphi_k(x, y)| \leq |T_{a^{k+1},a^{k+1}}(x, y) - f(x, y)| + |T_{a^k,a^k}(x, y) - f(x, y)| =$$

$$= 0(a^{-(k+1)\alpha}) + 0(a^{-k\alpha}) = 0(a^{-k\alpha}),$$

cioè esiste una costante positiva σ tale che riesca, in tutto il piano xy

$$|\varphi_k(x, y)| \leq \frac{\sigma}{a^{k\alpha}} \qquad (k = 2, 3, 4, \ldots), \tag{7}$$

([4]) Sia $f(x, y)$ una funzione continua in un dominio D: si dice modulo di continuità della $f(x, y)$ in D quella funzione $\omega(\delta)$, della variabile positiva δ, così definità:

$$\omega(\delta) = \max |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)|$$

ove i punti x_1, y_1 e x_2, y_2 percorrono tutte le possibili coppie di punti di D tali che $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \leq \delta$. Se $f(x, y)$ è periodica, di periodo 2π, rispetto a ciascuna delle variabili, il modulo di continuità si definisce allo stesso modo, ma senza specificare il dominio: evidentemente risulta $\max \omega(\delta) = \omega(\sqrt{2}\pi)$, sicchè basterà considerare δ variabile nell'intervallo $0 < \delta \leq \sqrt{2}\pi$.

Cfr. L. Cesari, *Sul problema di Dirichlet*, « Rend. Cir. Mat. Palermo », vol 60, pp. 185-212 (1936), in particolare p. 189, e C. de la Vallé-Poussin, loc cit. in ([3]), p. 7.

da cui si deduce

$$(8) \qquad \sum_{k=\nu+1}^{\infty} \max |\varphi_k(x, y)| \leq \sigma \sum_{k=\nu+1}^{\infty} \frac{1}{a^{k\alpha}} =$$

$$= \frac{a\sigma}{a-1} \sum_{k=\nu+1}^{\infty} \frac{a^k - a^{k-1}}{a^{k(\alpha+1)}} < \frac{a\sigma}{a-1} \int_{a^\nu}^{+\infty} \frac{d\xi}{\xi^{\alpha+1}}.$$

Siano ora Δx e Δx incrementi arbitrari delle variabili x ed y, con $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \leq \delta$, e $\Delta R_{a^\nu, a^\nu}$, $\Delta\varphi_k$ gli incrementi corrispondenti delle funzioni $R_{a^2, a^2}(x, y)$, $\varphi_k(x, y)$, talchè si avrà, per la (6),

$$(9) \qquad \Delta R_{a^\nu, a^2} = \sum_{k=2}^{\nu} \Delta\varphi_k + \sum_{k=\nu+1}^{\infty} \Delta\varphi_k.$$

Applicando il teorema del valor medio si riconosce che

$$\sum_{k=2}^{\nu} \Delta\varphi_k = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \sum_{k=2}^{\nu} \frac{\partial\varphi_k}{\partial \boldsymbol{p}} (x + \vartheta\Delta x,\ y + \vartheta\Delta y), \qquad (0 < \vartheta < 1),$$

laddove $\boldsymbol{p}$ è il versore della semiretta, con origine in x, y, congiungente i punti x, y e $x + \Delta x$, $y + \Delta y$. Ne consegue

$$\sum_{k=2}^{\nu} |\Delta\varphi_k| \leq \delta \sum_{k=2}^{\nu} \left\{ \max \left| \frac{\partial\varphi_k}{\partial x} \right| + \max \left| \frac{\partial\varphi_k}{\partial y} \right| \right\};$$

ma, giusta la (7), per un teorema di BERNSTEIN [5], risulta

$$\left. \begin{array}{l} \max \left| \dfrac{\partial\varphi_k}{\partial x} \right| \\[2ex] \max \left| \dfrac{\partial\varphi_k}{\partial y} \right| \end{array} \right\} \leq 2\sigma a^{k(1-\alpha)+1},$$

e pertanto

$$(10) \qquad \sum_{k=2}^{\nu} |\Delta\varphi_k| \leq 4\sigma\delta \sum_{k=2}^{\nu} a^{k(1-\alpha)+1} = 4\sigma\delta \frac{a^2}{a-1} \sum_{k=2}^{\nu} \frac{a^k - a^{k-1}}{a^{k\alpha}} <$$

$$< 4\sigma\delta \frac{a^2}{a-1} \int_a^{a^\nu} \frac{d\xi}{\xi^\alpha}.$$

[5] Cfr. A. ZYGMUND, loc. cit. in [2], p. 155.

Le (8). (9), (10) forniscono

$$\omega_R(\delta) < 4\sigma\delta \frac{a^2}{a-1} \int_a^{a^\nu} \frac{d\xi}{\xi^\alpha} + 2\sigma \frac{a}{a-1} \int_{a^\nu}^{+\infty} \frac{d\xi}{\xi^{\alpha+1}},$$

da cui, scegliendo, per ogni fissato valore di δ in $0 < \delta \leq \sqrt{2}\pi$, l'intero ν in modo che sia $a^{\nu-1} \leq \frac{\sqrt{2}\pi a}{\delta} < a^\nu$, si ricava infine

$$\omega_R(\delta) < 4\sigma\delta \frac{a^2}{a-1} \int_a^{\frac{\sqrt{2}\pi a^2}{\delta}} \frac{d\xi}{\xi^\alpha} + 2\sigma \frac{a}{a-1} \int_{\frac{1}{\delta}}^{+\infty} \frac{d\xi}{\xi^{\alpha+1}} <$$

$$< \left\{ 4\sigma \frac{a^2}{a-1} \frac{(\sqrt{2}\pi a^2)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{2\sigma}{1-\alpha} \frac{a}{a-1} \right\} \delta^\alpha,$$

che equivale alla (5).

3. Dimostrazione del teorema I.

Necessità. Se $f(x, y)$ è Lip α $(0 < \alpha < 1)$, per un teorema dimostrato da CESARI [6], che generalizza un lemma di BERNSTEIN [7] alle funzioni di più variabili, si ha uniformemente in tutto il piano xy,

$$|\sigma_{m,n}(x, y) - \sigma_{p,q}(x, y)| \leq |\sigma_{m,n}(x, y) - f(x, y)| +$$
$$+ |\sigma_{p,q}(x, y) - f(x, y)| = 0(m^{-\alpha} + n^{-\alpha}) + 0(p^{-\alpha} + q^{-\alpha}),$$

da cui, ove sia $p > m$, $q > n$, si trae la (2).

Sufficienza. Se vale la (2), la $\sigma_{m,n}(x, y)$, per $\left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} \to \infty$, converge uniformemente in tutto il piano xy verso una funzione $f(x, y)$ continua e periodica, di periodo 2π, rispetto a ciascuna delle variabili x ed y.

[6] L. CESARI, *Sulle serie di Fourier delle funzioni lipschitziane di più variabili*, « Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa », ser. II, vol. 7, pp. 279-295 (1938), in particolare pp. 288-289.

[7] Cfr. S. BERNSTEIN, *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polinomes de degré donné*, « Mem. Acad. Roy. de Belgique », ser. II, vol. 4, pp. 1-104 (1912), in particolare p. 88; oppure L. TONELLI, serie trigonometriche, Bologna, Zanichelli (1928), p. 252.

D'altra parte, dalla evidente limitazione

$$|\sigma_{m,n}(x, y) - f(x, y)| \leq |\sigma_{m,n}(x, y) - \sigma_{p,q}(x, y)| + |\sigma_{p,q}(x, y) - f(x, y)|,$$

passando al limite per $\left.\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\right\} \to \infty$, si ottiene, giusta la (2),

$$\sigma_{m,n}(x, y) - f(x, y) = 0(m^{-\alpha} + n^{-\alpha})$$

uniformemente in tutto il piano xy, sicchè, per il lemma dimostrato nel n. 2, la $f(x, y)$ è Lip α.

In virtù della uniforme convergenza della successione $\{\sigma_{m,n}(x, y)\}$, si ha infine

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x, y) \cos rx \left\{ \begin{matrix} \cos sy \\ \operatorname{sen} sy \end{matrix} \right. dxdy = \\ & = \lim_{\substack{m \\ n}\}\to\infty} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sigma_{m,n}(x, y) \cos rx \left\{ \begin{matrix} \cos sy \\ \operatorname{sen} sy \end{matrix} \right. dxdy = \\ & = \lim_{\substack{m \\ n}\}\to\infty} \pi^2 \left(1 - \frac{r}{m}\right)\left(1 - \frac{s}{n}\right) \left\{ \begin{matrix} a_{r,s} \\ c_{r,s} \end{matrix} \right. = \left\{ \begin{matrix} \pi^2 a_{r,s} \\ \pi^2 c_{r,s} \end{matrix} \right. , \\ & \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x, y) \operatorname{sen} rx \left\{ \begin{matrix} \cos sy \\ \operatorname{sen} sy \end{matrix} \right. dxdy = \left\{ \begin{matrix} \pi^2 b_{r,s} \\ \pi^2 d_{r,s} \end{matrix} \right. , \end{aligned} \right.$$

$$(r, \ s = 0, \ 1, \ 2, \ldots).$$

4. *A*) Dimostrazione del teorema II.

La necessità della condizione dell'enunciato discende immediatamente dal teorema di FEJER per le funzioni di più variabili [8], mentre la sufficienza si trae dalle (11), ove $f(x, y) = \lim\limits_{\substack{m \\ n}\}\to\infty} \sigma_{m,n}(x, y)$.

B) Dimostrazione del teorema III.

Necessità. Se è $|f(x, y)| \leq M$ in tutto il piano xy, ivi si ha pure

$$|\sigma_{m,n}(x, y)| =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 mn} \left| \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + u, y + v) \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} mu}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} u} \right)^2 \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} nv}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} v} \right)^2 dudv \right| \leq M, \quad [9]$$

$$(m, \ n = 1, \ 2, \ 3, \ldots).$$

[8] Cfr. L. TONELLI, loc. cit. in [7] p. 494.
[9] Cfr. L. TONELLI, loc. in [7] p. 487.

Sufficienza. Se è verificata la condizione dell'enunciato, risulta

$$4M^2 \geq \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sigma^2_{m,n}(x, y)dxdy = \frac{1}{4}a^2_{0,0} + \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{m}\left(1-\frac{\mu}{m}\right)^2(a^2_{\mu,0}+b^2_{\mu,0}) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)^2(a^2_{0,\nu}+c'_{0,\nu}) +$$

$$+\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\mu}{m}\right)^2\left(1-\frac{\nu}{n}\right)^2(a^2_{\mu,\nu}+b^2_{\mu,\nu}+c^2_{\mu,\nu}+d^2_{\mu,\nu}) \geq$$

$$\geq \frac{1}{4}a^2_{0,0} + \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{r}\left(1-\frac{\mu}{m}\right)^2(a^2_{\mu,0}+b^2_{\mu,0}) + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{s}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)^2(a^2_{0,\nu}+c^2_{0,\nu}) +$$

$$+\sum_{\mu=1}^{r}\sum_{\nu=1}^{s}\left(1-\frac{\mu}{m}\right)^2\left(1-\frac{\nu}{n}\right)^2(a^2_{\mu,\nu}+b^2_{\mu,\nu}+c^2_{\mu,\nu}+d^2_{\mu,\nu}),$$

per ogni coppia di interi positivi r, s, con $r < m$, $s < n$, sicchè, passando al limite per $\left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} \to \infty$ all'ultimo membro, si riconosce che la serie

$$\frac{1}{4}a'_{0,0} + \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{\infty}(a^2_{\mu,0}+b^2_{\mu,0}) + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}(a^2_{\nu,0}+c^2_{\nu,0}) +$$

$$+\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}(a^2_{\mu,\nu}+b^2_{\mu,\nu}+c^2_{\mu,\nu}+d^2_{\mu,\nu})$$

è convergente: in virtù del teorema di RIESZ-FISCHER [10], la (1) è pertanto la serie di FOURIER di una funzione $f(x, y)$ di quadrato sommabile e quindi, per un teorema di ZYGMUND [11], risulta, quasi ovunque,

$$\lim_{\left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} \to \infty} \sigma_{m,n}(x, y) = f(x, y).$$

Dalla (3) segue infine $|f(x, y)| \leq M$, quasi dappertutto.

[10] Cfr. L. TONELLI, loc. cit. in [7], p. 511.

[11] A. ZYGMUND, *On the differentiability of multiple integrals*, «Fund. Math.», vol. 23, pp. 143-149 (1934), in particolare p. 148.