
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ADRIANO BARLOTTI

**Le possibili configurazioni del sistema delle
coppie punto-retta (A, a) per cui un piano
grafico risulta (A, a) -transitivo.**

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 12
(1957), n.2, p. 212–226.

Zanichelli

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_2_212_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_2_212_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

**Le possibili configurazioni del sistema delle coppie punto-retta
(A, a) per cui un piano grafico risulta (A, a)-transitivo.**

Nota di ADRIANO BARLOTTI (a Firenze)

Sunto. - *Detta $\mathcal{F}$ la configurazione formata da tutte le coppie punto-retta (A, a) di un piano grafico S_2 , rispetto alle quali S_2 è (A, a)-transitivo, si determinano i tipi che, al più, si possono presentare come possibili per $\mathcal{F}$.*

Zusammenfassung. - *Man nennt $\mathcal{F}$ die Konfiguration die von allen Paaren Punkt-Gerade (A, a) einer projektiven Ebene, S_2 , gebildet ist, in Bezug auf die S_2 (A, a)-transitiv ist und man bestimmt die verschiedenen Arten die höchstens für $\mathcal{F}$ möglich sind.*

1. Sia S_2 un piano grafico irriducibile ⁽¹⁾. Ricordiamo qui di seguito alcune notazioni introdotte da R. BAER ⁽²⁾ ed ormai entrate nell'uso comune. Chiamiamo (A, a)-omologia di S_2 un'omologia di centro A e di asse a ; se per ogni coppia di punti P e P' , diversi da A e non appartenenti ad a , che si trovino allineati con A , esiste una (A, a)-omologia che porta P in P' diremo che il piano grafico S_2 è (A, a)-transitivo [o che è dotato della (A, a)-transitività]. Quando S_2 sia (A, a)-transitivo rispetto ad ogni retta uscente da B , diremo che esso risulta (A, B)-transitivo, mentre, dualmente, se esso risulta (A, a)-transitivo rispetto a tutti i punti A della retta b lo chiameremo (b, a)-transitivo.

È noto che se il piano è (A, a)-transitivo con A e a scelti in modo qualsiasi, esso risulta *desarguesiano*, e cioè vale in esso il teorema dei triangoli omologici. In un piano che non sia desarguesiano possono tuttavia esistere dei punti A e delle rette a rispetto ai quali il piano stesso risulta (A, a)-transitivo. In un recente lavoro H. LENZ ⁽³⁾ ha studiato la figura formata dai punti A e dalle rette a di S_2 che si appartengono, e che sono tali che rispetto ad essi il piano grafico risulta (A, a)-transitivo, giungendo a dimostrare il seguente teorema ⁽⁴⁾:

⁽¹⁾ Per la nozione di piano grafico si vedano, p. es., G. PICKERT [5], B. SEGRE [6], G. ZAPPA [7].

⁽²⁾ Cfr. R. BAER [1] ed anche G. PICKERT [5], pagg. 66-67.

⁽³⁾ Cfr. H. LENZ [4].

⁽⁴⁾ Per la dimostrazione di questo si può vedere, oltre il lavoro di H. LENZ, anche G. PICKERT [5], pp. 70-71.

TEOREMA DI LENZ. — *Ad ogni piano grafico S_1 si può associare una figura $\mathcal{F}$ formata da punti e rette di S_1 , tali che S_2 è (A, a) -transitivo, con $A \in a$, quando, e solo quando, A e a appartengono ad $\mathcal{F}$. Per $\mathcal{F}$ si possono presentare come possibili, al più, i seguenti casi:*

- I. *Nessun punto, nessuna retta.*
- II. *Un punto e una retta per esso.*
- III. *I punti di una punteggiata e le rette di un fascio il cui centro non appartiene alla punteggiata.*
- IV_a. *I punti di una punteggiata e il suo sostegno.*
- IV_b. *Un punto e tutte le rette per esso.*
- V. *I punti di una punteggiata e le rette di un fascio il cui centro appartiene alla punteggiata.*
- VI_a. *I punti d una punteggiata e tutte le rette.*
- VI_b. *Tutti i punti e le rette di un fascio.*
- VII. *Tutti i punti e tutte le rette.*

Si ha così un modo di classificare i piani grafici in relazione alle omologie speciali di cui essi sono dotati. Tale classificazione ha interesse soprattutto per il fatto che in relazione ai diversi casi che si possono presentare varia la natura dell'anello ternario di M. HALL ⁽⁵⁾ collegato al piano grafico S_2 .

2. Noi ci siamo proposti di effettuare un'analoga analisi per il caso generale che si ottiene quando si tolga la restrizione che A debba appartenere ad a . Naturalmente i casi da prendere in esame risultano molto più numerosi di quanto non accada per il caso $A \in a$. Fra questi però solo un numero abbastanza limitato si presenta come possibile. Essi verranno nel seguito suddivisi in classi corrispondenti ai vari casi della classificazione di LENZ, e verranno precisamente collocati in una determinata classe quelli per cui la sottostruttura formata dai punti e dalle rette per cui il piano è (A, a) -transitivo, con $A \in a$, porta nel teorema di LENZ il numero d'ordine della classe stessa. Il risultato a cui siamo giunti è il seguente:

Chiamiamo $\mathcal{F}$ la figura formata da tutte le coppie punto-retta (A, a) di un piano grafico S_1 rispetto alle quali S_2 è (A, a) -transitivo. Per $\mathcal{F}$ si possono presentare come possibili, al più, i seguenti casi:

(5) Cfr. M. HALL [3], od anche G. PICKERT [5], 1. 5.

Classe I

- 1) *Ad $\mathcal{F}$ non appartiene nessuna coppia.*
- 2) *$\mathcal{F}$ consta di una sola coppia (A, a) con $A \notin a$.*
- 3) *La figura $\mathcal{F}$ comprende due coppie (A_i, a_i) ($i = 1, 2$) i cui elementi soddisfano alle relazioni $A_i \in a_j$ ($i \neq j$), $A_i \notin a_i$.*
- 4) *La $\mathcal{F}$ è costituita da tre coppie (A_i, a_i) ($i = 1, 2, 3$), con la condizione che sia $A_i \notin a_1$, $A_i \in a_j$ ($i \neq j$).*
- 5) *Sono dati una punteggiata, r , un fascio di rette, (R) , il cui centro R non appartiene alla r , ed una corrispondenza, φ , biunivoca, involutoria ⁽⁶⁾ e senza incidenze, tra i punti di r e le rette di (R) . La figura $\mathcal{F}$ consta delle coppie $(X, \varphi(X))$ con $X \in r$.*
- 6) *Siano R e r un punto ed una punteggiata che si appartengono, e φ una corrispondenza biunivoca fra i punti di r , eccettuato R , e le rette per R , diverse dalla r . La $\mathcal{F}$ è formata dalle coppie $(X, \varphi(X))$, con $X \in r$, $X \neq R$.*
- 7) *La $\mathcal{F}$ si ottiene aggiungendo la coppia (R, r) alla figura del tipo I, 5) ⁽⁷⁾.*
- 8) *È data una polarità uniforme, θ , cioè una corrispondenza biunivoca e involutoria fra i punti e le rette del piano, che sia priva di incidenze. La $\mathcal{F}$ è formata dalle coppie di elementi che si corrispondono nella θ .*

Classe II

- 1) *La figura $\mathcal{F}$ consta di una sola coppia (A, a) con $A \in a$.*
- 2) *La $\mathcal{F}$ comprende due coppie (A, a) e (B, b) con $A \equiv a \cap b$, $B \in a$, $A \equiv B$, $a \equiv b$.*
- 3) *La $\mathcal{F}$ si ottiene aggiungendo la coppia (R, r) alla figura del tipo I, 6).*

Classe III

- 1) *Sono dati una punteggiata, r , e un punto, R , non appartenente alla r . La figura $\mathcal{F}$ consta delle coppie (X, XR) con $X \in r$.*
- 2) *La $\mathcal{F}$ è la figura del tipo III, 1) a cui è aggiunta la coppia (R, r) .*

Classe IV_a

- 1) *È data una retta r . La $\mathcal{F}$ è formata dalle coppie (X, r) con $X \in r$.*

⁽⁶⁾ Cioè tale che se un punto, A , di r sta sulla retta, b , di (R) , il punto $\varphi^{-1}(b)$ sta sulla retta $\varphi(A)$.

⁽⁷⁾ Qui e nel seguito indichiamo i vari tipi di figure con due numeri, di cui quello romano indica la classe a cui la figura appartiene.

2) Siano A e B due punti di una retta r . La $\mathcal{F}$ consta delle coppie (X, r) con $X \in r$, delle coppie (A, b) con $B \in b$ e delle coppie (B, a) con $A \in a$.

3) Sono date una retta, r , e una corrispondenza, φ , tra i punti di r , che è biunivoca, involutoria e priva di punti uniti. La $\mathcal{F}$ è costituita da tutte le possibili coppie (X, x) con $X \in r$ e $\varphi(X) \in x$.

Classe IV_b

Comprende i casi duali di quelli della classe IV_a .

Classe V

1) Sono dati una punteggiata r ed un suo punto R . La $\mathcal{F}$ è formata dalle coppie (X, r) con $X \in r$ e dalle coppie (R, x) con $R \in x$.

Classe VI_a

1) È data una punteggiata r . La $\mathcal{F}$ è formata da tutte le coppie (X, x) con $X \equiv r \cap x$.

Classe VI_b

1) La $\mathcal{F}$ è la figura duale della VI_a , 1).

Classe VII

1) La $\mathcal{F}$ è formata da tutte le possibili coppie (A, a) con $A \in a$.

2) La $\mathcal{F}$ consta di tutte le possibili coppie (A, a) senza nessuna condizione: il piano è desarguesiano.

Resta da vedere se tutti i casi che qui abbiamo indicato come possibili risultino anche effettivamente esistenti.

3. Riportiamo qui alcuni teoremi che avremo occasione di usare nel seguito, e facciamo presente che insieme ad essi valgono i teoremi duali.

TEOREMA I. - Un piano (A, a) -transitivo il quale possenga una collineazione φ , risulta anche $(\varphi(A), \varphi(a))$ -transitivo ⁽⁸⁾.

TEOREMA II. - Quando sia $A \equiv B$, dalle (A, a) - e (B, a) -transività segue la (AB, a) -transività ⁽⁹⁾.

⁽⁸⁾ Cfr., p. es., G. PICKERT [5], pag. 66, n. 7.

⁽⁹⁾ Cfr. R. BAER [1].

TEOREMA III. - Se A, B, C sono tre punti non allineati di un piano grafico (B, AC) -transitivo, questo risulta desarguesiano se vale una del e due seguenti condizioni:

- a) il piano è (C, AC) - e (C, AB) -transitivo,
- b) il piano è (C, a) -transitivo dove a è una retta passante per A e non contenente nè B nè C ⁽¹⁰⁾.

COROLLARIO I. - Se un piano è (A, a) -transitivo e (B, b) -transitivo, con $B \in a, A \notin a, A \notin b, B \notin b$, il piano risulta desarguesiano.

Infatti chiamando M l'intersezione di a con b , il piano risulta (A, MB) - e (B, b) -transitivo.

Dai precedenti teoremi deduciamo il seguente:

TEOREMA IV. - Se un piano è (A, a) -transitivo e (B, b) transitivo, con $A \in a, A \notin b, B \notin a, B \notin b$, esso risulta desarguesiano.

Detta M l'intersezione di AB con b ed m la retta omologa di b nella (A, a) -omologia che porta B in M , distinguiamo il caso $B \notin m$ da quello $B \in m$. Se si verifica la prima di queste due circostanze è subito visto che il piano risulta desarguesiano per il precedente teorema III. Infatti se chiamiamo N l'intersezione di a con b , il piano risulta (B, NM) -transitivo per ipotesi e (M, m) -transitivo per il teorema I. Se invece m contiene il punto B , osserviamo prima di tutto che il piano è (M, MN) -transitivo. Infatti poichè questo è (A, a) -transitivo, trasformandolo con le (B, b) -omologie si riconosce, per il teorema di LENZ, che fra le omologie speciali di esso vi sono tutte quelle (possibili) che hanno il centro sulla retta AB e l'asse passante per N , e quindi anche tutte quelle di centro M e asse MN . Poichè poi $m \equiv NB$ il piano è anche (M, NB) -transitivo. Ma per il teorema III un piano che sia (B, NM) -, (M, NM) - e (M, NB) -transitivo è desarguesiano.

TEOREMA V. - Se un piano grafico risulta (A, B) -transitivo esso è anche (B, A) -transitivo ⁽¹¹⁾.

COROLLARIO II. - Se un piano è (A, B) -transitivo, con $A \equiv B$, esso è anche (AB, AB) -transitivo.

Infatti esso è in particolare (A, AB) -transitivo e, per il teorema V, anche (B, AB) -transitivo. Ma allora il teorema di LENZ porta che esso è (AB, AB) -transitivo.

⁽¹⁰⁾ Cfr. H. F. GINGERICH [2] Di tale lavoro noi abbiamo avuto notizia solo attraverso le citazioni che di esso sono fatte in G. PICKERT [5].

⁽¹¹⁾ Cfr. H. F. GINGERICH [2]; si veda anche G. PICKERT [5], pag. 103.

4. Per dimostrare il teorema enunciato nel n. 2 basterà mostrare che se le coppie (A, a) formate dai punti, A , e dalle rette, a , di S_2 per cui S_2 risulta (A, a) -transitivo formano una figura $\mathcal{F}_1$ che contiene, oltre le coppie punto-retta costituenti una delle figure $\mathcal{F}$ elencate nel n. 2, un'altra coppia (P, p) , allora $\mathcal{F}_1$ contiene ⁽¹²⁾ per intero le coppie di una delle figure che seguono $\mathcal{F}$ nell'elenco dato.

La cosa è ovvia per la figura I, 1). Cominciamo allora col prendere in esame la figura I, 2), e aggiungiamo a questa la nuova coppia (B, b) : supponiamo cioè che S_2 risulti oltre che (A, a) -transitivo anche (B, b) -transitivo. Se è $A \equiv B$, $B \notin a$, $B \notin b$, $A \notin b$, $a \equiv b$, $a \cap b \notin AB$, trasformando il piano con le (A, a) -omologie e con le (B, b) -omologie si perviene (cfr. teorema I) al caso I, 5). Infatti prima di tutto si riconosce che alle coppie della figura $\mathcal{F}$ appartengono i punti di una retta (la AB) e le rette di un fascio (di centro $a \cap b$ non appartenente ad AB) con la condizione che ogni punto X della retta AB e ogni retta x del fascio di centro $a \cap b$ entrano a far parte di almeno una coppia di $\mathcal{F}$. Ma si riconosce subito che ciascuno di quei punti o di quelle rette non può far parte di più di una coppia senza che si cada in una figura di una classe successiva alla prima. Infatti se ad $\mathcal{F}$ appartengono le coppie (X, x) e (X, x') , con $x \equiv x'$, per il duale del teorema II il piano risulta $(X, a \cap b)$ -transitivo, e allora per il corollario II si ottiene una figura che sta almeno nella classe IV_a ; il ragionamento duale vale nell'ipotesi che $\mathcal{F}$ contenga le coppie (X, x) e (X', x) con $X \equiv X'$. La corrispondenza φ che associa ai punti di AB le rette per $a \cap b$ che formano con essi una coppia di $\mathcal{F}$ è quindi biunivoca. Si riconosce poi che φ deve essere anche involutoria. Per questo indichiamo con Y l'intersezione di $\varphi(X)$ con la retta AB . Qualora $\varphi(Y)$ non contenga X , per il corollario I segue subito che il piano è desarguesiano. È quindi una condizione necessaria per l'effettiva esistenza del caso in esame che risulti $X \in y$. È infine ovvio che la φ deve essere priva di incidenze, cioè che per nessuna coppia (X, x) può essere $X \in x$, in quanto questi sono i trasformati in un'omologia di un punto e di una retta che non si appartengono.

⁽¹²⁾ Naturalmente $\mathcal{F}_1$ deve addirittura coincidere con una delle figure che seguono $\mathcal{F}$ nell'elenco dato, ma ai fini della nostra dimostrazione è sufficiente constatare che $\mathcal{F}_1$ contiene una, $\mathcal{F}_2$, delle figure che seguono $\mathcal{F}$. Infatti se non è $\mathcal{F}_1 \equiv \mathcal{F}_2$, la $\mathcal{F}_1$ sarà ripresa in considerazione quando si passeranno a studiare le figure successive alla $\mathcal{F}_2$.

Occorre ora esaminare che cosa accade quando la posizione di B e b rispetto ad A e a è diversa da quella indicata sopra.

Possiamo escludere sempre, quando si aggiunge al piano della figura $\mathcal{F}$ la (B, b) -transitività, che risulti $B \in b$. Infatti è evidente che in tal caso si ottiene una figura che appartiene ad una classe successiva ⁽¹³⁾ a quella a cui appartiene la $\mathcal{F}$, e che quindi verrà presa in esame analizzando le circostanze a cui dà luogo l'aggiunta di una (P, p) -transitività alla prima figura di questa classe.

Si devono allora esaminare i casi che nascono in corrispondenza di tutte le possibili combinazioni delle seguenti eventualità:

$$\begin{array}{lll} \alpha) A \in b, & \beta) B \in a, & \gamma) A \equiv B, \\ \delta) a \equiv b, & \varepsilon) a \cap b \in AB. \end{array}$$

Cominciamo col supporre $A \in b$, $B \notin a$. Poichè risulta $A \notin a$ e si è escluso che sia $B \in b$ segue che non possono essere verificate le eventualità γ , δ ed ε e allora, per il corollario I, si ha che il piano è desarguesiano.

Alla stessa conclusione si giunge quando è $A \notin b$, $B \in a$, dato che questo caso si riporta al precedente scambiando A con B e a con b .

Qualora sia $A \in b$, $B \in a$ senza che siano verificate la γ , la δ o la ε si ha la figura del tipo I, 3). Ma la γ , la δ e la ε non possono essere verificate senza che si abbia almeno una delle due circostanze escluse $A \notin a$ o $B \notin b$, e quindi anche in questo caso il nostro esame è finito.

Resta ancora da vedere cosa accada quando sia $A \notin b$, $B \notin a$. Nell'ipotesi che valga la γ il piano è $(A, a \cap b)$ -transitivo, e quindi per il corollario II si ha che le coppie punto-retta del piano costituiscono una figura del tipo IV_a, 2); al caso duale di questo si giunge partendo dalla δ . Supponiamo allora che valga la ε . Trasformando il piano con le (A, a) -omologie si riconosce che esso è (X, x) -transitivo, dove X è un qualsiasi punto della retta AB , diverso da $a \cap b$, e x è una opportuna retta (una diversa per ogni X) passante per $a \cap b$ e diversa dalla AB . La figura $\mathcal{F}$ a cui si perviene è quindi la I, 6).

Rimangono infine da esaminare le eventualità $\gamma\delta$, $\gamma\varepsilon$, $\delta\varepsilon$, $\gamma\delta\varepsilon$, ma è subito visto che esse non danno nessuna condizione.

5. Prendiamo in esame la figura $\mathcal{F}$ del tipo I, 3), e supponiamo che il piano oltre ad essere (A_i, a_i) -transitivo ($i=1, 2$) sia anche

⁽¹³⁾ Qui e nel seguito quando usiamo la parola successivo intendiamo, anche se non è indicato esplicitamente, di riferirci all'ordine in cui si seguono le figure $\mathcal{F}$ nell'elenco dato nel n. 2.

(B, b) -transitivo. Possiamo evitare di passare in rassegna tutti i casi che nascono in relazione ai diversi modi in cui può essere disposta, rispetto alla figura $\mathcal{F}$, la coppia punto-retta (B, b) , osservando che la $\mathcal{F}$, che è del tipo I, 3), contiene in particolare la figura del tipo I, 2), e che quindi ognuno di quei casi può pensarsi ottenuto da quello in cui c'è la (A_1, a_1) -transitività, con l'aggiunta prima della (B, b) -transitività e poi della (A_2, a_2) -transitività. Se la coppia (B, b) è in tale posizione rispetto alla (A_1, a_1) che già dalle (A_1, a_1) - e (B, b) -transitività segue una figura successiva alla I, 3), è inutile che ci si soffermi a prenderla in esame adesso.

L'analisi svolta nel n. 4 mostra che allora non resta che il caso in cui è $B \in a_1$ e $A_1 \in b$. Scambiando le veci di (A_1, a_1) con (A_2, a_2) segue che deve anche essere $B \in a_2$ e $A_2 \in b$. Cioè l'unico caso nuovo che si ottiene è quello in cui a_2 contiene B e A_1, a_1 contiene B e A_2 e b contiene A_1 e A_2 : si tratta precisamente del caso I, 4).

Possiamo osservare che l'esame effettuato nel n. 4 dice che quando non si presenta il caso ora rilevato, cioè se non è $B \in a_1$, $A_1 \in b$, $B \in a_2$, $A_2 \in b$, il piano contiene una figura che non solo è successiva alla I, 3), ma segue addirittura la I, 4) nell'elenco dato nel n. 2.

6. Se aggiungiamo alla figura $\mathcal{F}$ del tipo I, 4) una coppia (B, b) tale che il piano sia (B, b) -transitivo, otteniamo in ogni caso delle figure che seguono la $\mathcal{F}$ nell'elenco del n. 2. Per questo basta effettuare un ragionamento analogo a quello del n. precedente. Infatti se cancelliamo dalla $\mathcal{F}$ la coppia (A_2, a_2) otteniamo la figura del tipo I, 3). Per l'osservazione con cui termina il n. 5, l'aggiunta di (B, b) porta, eccettuato il caso che sia $B \equiv a_1 \cap a_2$, $b \equiv A_1 A_2$, a figure che seguono la I, 4) nell'elenco dato nel n. 2. Ma il caso $B \equiv a_1 \cap a_2$ e $b \equiv A_1 A_2$ non può ora sussistere, perchè esso comporta che sia $B \equiv A_3$ e $b \equiv a_3$ e cioè che la coppia (B, b) faccia già parte della $\mathcal{F}$. Resta così provato il nostro asserto.

7. Prima di procedere nel nostro esame stabiliamo qui un risultato che ci sarà utile nel seguito. Esso è dato del seguente:

TEOREMA VI. - *Consideriamo la corrispondenza θ che associa ad un qualunque punto, P , del piano le rette, p , tali che il piano sia (P, p) -transitivo, e supponiamo che ad ogni punto corrisponda almeno una retta, ed ogni retta provenga almeno da un punto. Se la θ è biunivoca e involutoria, e non si ha mai $P \in p$, la figura $\mathcal{F}$ formata di tutte le coppie (P, p) è del tipo I, 8); in caso contrario la $\mathcal{F}$ appartiene ad una classe successiva alla prima.*

Infatti se ad un punto, H , corrispondono più rette, detto K il piano comune a due di queste, per il duale del teorema I il piano è (H, K) -transitivo, e quindi, per il corollario II, anche (HK, HK) -transitivo. La figura $\mathcal{F}$ è quindi di un tipo successivo al $IV_a, 1$). Lo stesso accade, dualmente, se una retta proviene da più di un punto.

Se la $\mathcal{F}$ contiene coppie (P, p) , con $P \in p$, è ovvio che essa appartiene ad un tipo successivo al II, 1).

Quando infine la θ , pur non contenendo $\mathcal{F}$ coppie (P, p) con $P \in p$, non è involutoria, devono esistere almeno due coppie (P, p) e (Q, q) tali che il piano è (P, p) - e (Q, q) -transitivo con $Q \in p$ e $P \notin p$, $P \notin q$, $Q \notin q$. Siamo allora nelle ipotesi del corollario I, e quindi il piano è desarguesiano.

Pertanto, se $\mathcal{F}$ appartiene alla prima classe, la corrispondenza θ deve essere biunivoca e involutoria, e deve associare ad ogni punto P del piano una retta non passante per P . Allora se θ porta P in p e Q in q , e se Q appartiene a p , P deve appartenere a q . In tal caso è ovvio che ai punti di una retta devono corrispondere le rette passanti per il punto omologo di quella retta nella θ^{-1} : la figura $\mathcal{F}$ è quella del tipo I, 8).

8. Passiamo adesso a considerare la figura $\mathcal{F}$ del tipo I, 5). Sappiamo che in questo caso esistono una retta, r , e un punto, R , tali che $R \notin r$ e che ad ogni punto A di r resta associata una opportuna retta, $a = \varphi(A)$, del fascio di centro R , in modo che il piano risulta (A, a) -transitivo. Nel seguito di questo numero una siffatta retta a la denomineremo la retta « associata » al punto A , e viceversa A lo diremo « associato » alla retta a .

Supponiamo ora che il piano, oltre ad essere (A, a) -transitivo rispetto a tutte le coppie punto-retta associate nella figura $\mathcal{F}$ del tipo I, 5), sia ancora (B, b) -transitivo, escludendo naturalmente che, se B appartiene ad r , la retta b sia associata a B .

Qui di seguito distinguiamo i vari casi che si presentano in relazione alle diverse posizioni di B e b rispetto ad R e r .

a) Se $B \equiv R$, $b \equiv r$, siamo nel caso I, 7).

b) Quando sia $B \equiv R$, $b \equiv r$, indichiamo con X un punto di r la cui retta associata x sia diversa dalla RB . Trasformando il piano con le (B, b) -omologie si trova che esso è $(X, x \cap r)$ -transitivo e, per il corollario II, anche (r, r) -transitivo. Si giunge così ad una figura che esamineremo con quella del tipo $IV_a, 2$).

c) Il caso $B \equiv R$, $b \equiv \bar{r}$ è il duale di quello ora esaminato in b).

d) Se $B \notin r$ (e quindi $B \equiv R$ e $b \equiv \bar{r}$), detta $\bar{b}$ la retta asso-

ciata a B , per il duale del teorema II, il piano è $(B, b \cap \bar{b})$ -transitivo e valgono quindi le conclusioni ottenute in b).

e) Qualora sia $R \in b$ (e quindi $B \equiv R$ e $b \equiv r$) siamo nel caso duale del precedente.

f) Supponiamo, infine, che sia $B \equiv R$, $b \equiv r$, $R \notin b$, $B \notin r$. Chiamiamo M l'intersezione di b con r e N il punto di r associato alla retta RM . Trasformando il piano con le (B, b) -omologie si può portare r in qualunque retta per M escluse BM e b . Presa poi una retta, t , per M , diversa da b , BM , r ed RM ⁽¹⁴⁾, si possono trovare due omologie di asse RM e centro N che portano t rispettivamente in b e in BM . Pertanto, poichè il piano ammette per ipotesi tutte le omologie con il centro su r e un asse opportuno, deve ammettere anche tutte le omologie con il centro su una qualunque retta per M , e quindi in un qualunque punto del piano, e un asse conveniente. Cioè ad ogni punto, P , del piano si può far corrispondere almeno una retta, p , tale che il piano è (P, p) -transitivo. Il ragionamento duale mostra poi che in questa corrispondenza ogni retta ha almeno un punto come omologo. Sono quindi soddisfatte le ipotesi del teorema VI, e allora se le coppie (P, p) formano una figura della I classe, questa è senz'altro la I, 8).

9. Partiamo dalla $\mathcal{F}$ del tipo I, 6) e supponiamo che il piano oltre ad essere (A, a) -transitivo rispetto alle coppie punto-retta che formano quella figura sia anche (B, b) -transitivo. Si dovranno al solito esaminare i casi che corrispondono ai diversi modi in cui possono essere collocati B e b rispetto ad R e r :

a) Se $B \equiv R$, $b \equiv r$ risulta $B \in b$ e quindi la figura che si ottiene appartiene almeno alla II classe.

b) Quando è $B \equiv R$, $b \equiv r$ possiamo supporre $B \notin r$, poichè in caso contrario sarebbe senz'altro $B \in b$. Detta allora (A, a) una coppia della figura $\mathcal{F}$ tale che a non passi per B , si trasformi il piano con le (A, a) -omologie. Si trova che il piano è (BA, b) -transitivo, e quindi (per il duale del corollario II) (A, A) -transitivo. La figura che si ottiene per l'aggiunta della (B, b) -transitività appartiene quindi almeno alla classe IV_b .

c) Qualora sia $B \equiv R$, $b \equiv r$ valgono le considerazioni duali di quelle fatte ora in b).

d) Supponiamo ora che sia $B \in r$ (con $B \equiv R$). Detta $\bar{b}$ la retta

(14) Qui è fatta l'ipotesi che su ogni retta si trovino almeno cinque punti. Ciò non costituisce una limitazione, perchè qualora essa non sia soddisfatta è ben noto che il piano è desarguesiano.

che insieme con B forma una coppia appartenente alla figura $\mathcal{F}$. risulta $b \equiv \bar{b}$, e il piano è $(B, b \cap \bar{b})$ -transitivo.

e) Il risultato duale di quello ora ottenuto si ha per $R \in b$ (con $b \equiv \bar{r}$).

f) Consideriamo infine il caso $B \notin r, R \notin b$. Detto A il punto comune a b ed r , trasformiamo il piano mediante tutte le omologie di centro B e asse b . Si riconosce così che il piano è (X, x) -transitivo per qualunque X non situato su b , su BA e su BR , e x conveniente. Trasformando poi il piano mediante opportune omologie di centro P ed asse p , con (P, p) in $\mathcal{F}$, si vede che il piano è (X, x) -transitivo per qualunque X di π e x conveniente. Infatti preso un qualunque punto C di b , o di BA , esso può essere portato da una omologia, il cui centro e il cui asse costituiscono una opportuna coppia (P, p) appartenente alla figura $\mathcal{F}$, in qualche ⁽¹⁵⁾ punto X del piano per cui si sa già che il piano è (X, x) -transitivo. Lo stesso ragionamento vale per i punti di BR diversi da R . Ma anche ad R è possibile associare una retta $\bar{r}$ tale che il piano sia $(R, \bar{r})$ -transitivo. Infatti quando si è constatato che di questa proprietà godono i punti di BR diversi da R , basta portare R in uno di questi con una opportuna (B, b) -omologia. Ad ogni punto X del piano è quindi associata almeno una retta x tale che il piano è (X, x) -transitivo; dualmente ogni retta proviene da almeno un punto. Siamo allora nelle ipotesi del teorema VI il quale in questo caso ci assicura che la figura formata da tutte le coppie (P, p) tali che il piano sia (P, p) transitivo non sta nella I classe. Infatti nella $\emptyset$ [cfr. n. 7] ai punti della retta r (compreso R) dovrebbero corrispondere le rette per R , e quindi risulterebbe $R \in r$.

10. Esaminiamo quali circostanze si presentino aggiungendo alla figura I, 7) un punto B e una retta b con la condizione che il piano sia (B, b) -transitivo. Poichè la figura attualmente in esame si ottiene dalla I, 5) con l'aggiunta della coppia punto-retta (R, r) , l'analisi svolta nel n. 8 ci assicura che l'ipotesi che il piano sia (B, b) -transitivo porta a figure che seguono la I, 7) nell'elenco da noi dato nel n. 2.

Se poi aggiungiamo la coppia (B, b) alla figura $\mathcal{F}$ del tipo I, 8),

⁽¹⁵⁾ Sono esclusi precisamente quelli di r , di CR , della retta CD che unisce C con il punto D associato a CR in $\mathcal{F}$, e i punti d'intersezione delle rette PC e p . Poichè la retta PC contiene oltre C quattro punti che non servono al nostro scopo, e cioè P e i punti d'incontro con le rette p , BA e BR , bisogna fare l'ipotesi che su ogni retta vi siano più di cinque punti, ma ciò è lecito perchè, in caso contrario il piano è desarguesiano.

la corrispondenza θ di cui al teorema VI è senz'altro non biunivoca e quindi questo teorema ci assicura che la figura formata da tutte le coppie (P, p) tali che il piano è (P, p) -transitivo non sta nella I classe.

11. Passiamo ora a considerare i diversi tipi di figure che nascono aggiungendo la condizione di essere (B, b) -transitivo ad un piano che contenga la figura II, 1), cioè che sia (A, a) -transitivo con $A \in a$.

Se le omologie di centro B e asse b non portano A e a in sè, trasformando il piano mediante tali omologie, si ottiene che il piano contiene anche altre omologie speciali oltre quelle di centro A e asse a , onde entriamo in una classe successiva. Basta quindi esaminare i tre casi:

$$b \equiv a; \quad B \equiv A; \quad A \in b, \quad B \in a.$$

a) Se è $b \equiv a$ e $B \notin a$, per il teorema II il piano è (BA, a) -transitivo e quindi per il duale del corollario II anche (A, A) -transitivo. La $\mathcal{T}$ contiene quindi una figura del tipo IV_b, 1).

Quando invece sia $b \equiv a$ e $B \in a$ (ma naturalmente $B \equiv A$), risulta $B \in b$ e quindi si giunge ancora ad una figura di una classe successiva.

b) Per $B \equiv A$ valgono le considerazioni duali di quelle svolte in a).

c) Se infine è $B \subset a$ (con $B \equiv A$) e $A \in b$ (con $b \equiv a$) si ottiene la figura del tipo II, 2).

12. Consideriamo un piano che contenga la figura II, 2), cioè che sia (A, a) - e (B, b) -transitivo con $A \equiv a \cap b$, $B \in a$, $A \equiv B$, $a \cap b$, e supponiamo che esso sia inoltre (P, p) -transitivo. Tralasciando per un momento la coppia (B, b) immaginiamo di imporre ad un piano (A, a) -transitivo, con $A \in a$, la coppia (P, p) . Dal numero precedente risulta che si ottiene sempre una figura di classe superiore alla seconda, ad eccezione del caso in cui sia $P \in a$, $A \in p$. Ma quando siano soddisfatte queste condizioni, se torniamo a tener conto del fatto che vi è la (B, b) -transitività, trasformando il piano con le (P, p) -omologie si ottiene la figura II, 3).

Il ragionamento fatto prova anche che aggiungendo una (P, p) -transitività alla figura II, 3) si ottengono figure che stanno nella III classe o in una delle successive. Infatti la II, 3) contiene la II, 1), e se aggiungiamo a quest'ultima una coppia punto-retta (P, p) tale che non sia verificata almeno una delle due condizioni

$P \in a$, $A \in p$, cioè che non faccia parte della II, 3), abbiamo visto che si ottiene una figura di una classe successiva alla seconda.

13. Occupiamoci adesso delle figure che nascono supponendo che il piano oltre contenere la figura III, 1) sia anche (B, b) -transitivo (con $B \notin b$).

Anche qui basta limitarci ai casi in cui le (B, b) -omologie trasformano in sè R ed r , cioè:

$$B \in r, R \in b; \quad B \equiv R, b \equiv r.$$

Nell'ipotesi che si verifichi la prima di queste due circostanze, il teorema IV ci assicura che il piano è desarguesiano.

Nel secondo caso ci troviamo di fronte alla figura del tipo III, 2).

Come nel numero precedente, l'analisi effettuata permette di concludere che le figure successive a quella del tipo III, 2) stanno in una classe successiva alla terza.

14. Nel caso che un piano il quale contenga una figura $\mathcal{F}$ del tipo IV_a, 1), cioè che sia (A, a) -transitivo per ogni $A \in a$, risulti anche (B, b) -transitivo, si presentano da esaminare solo tre casi

a) $B \notin a$, $b \equiv a$. Il teorema IV porta che il piano è desarguesiano.

b) $B \notin a$, $a \equiv b$. In virtù del teorema II segue che il piano è (P, a) -transitivo con P qualsiasi, e cioè (x, a) -transitivo con x qualsiasi. Per il duale del teorema V esso è allora anche (a, x) -transitivo, e quindi in particolare (Q, a) - e (A, x) -transitivo, avendo indicato con Q un punto non appartenente ad a o x , e con A un punto di a diverso da $a \cap x$. Ciò porta, per il corollario —I, che il piano è desarguesiano.

c) $B \in a$, $b \equiv a$. Trasformando il piano con le (A, a) -omologie che hanno per centro un qualsiasi punto di a , diverso da $a \cap b$, si trova che il piano è $(B, a \cap b)$ -transitivo. Si perviene così alla figura IV_a, 2).

15. Andiamo ora ad esaminare un piano al quale appartenga la figura $\mathcal{F}$ del tipo IV_a, 2) e che risulti inoltre (P, p) -transitivo (con $P \notin p$).

Basta considerare i casi in cui le (P, p) -omologie mutano r in sè, cioè:

$$p \equiv r; \quad P \in r.$$

a) Quando risulta $p \equiv r$ [e quindi $P \notin r$, perchè altrimenti la

coppia (P, p) farebbe già parte della $\mathcal{F}$] per il corollario I segue che il piano è desarguesiano.

b) Consideriamo ora il caso $P \in r$, e supponiamo in un primo momento che sia $A \notin p, B \notin p, P \equiv A$ e $P \equiv B$. Dobbiamo distinguere due casi a seconda che la (P, p) -omologia, ω , che porta A in B ha per quadrato l'identità oppure no. Se si verifica la prima di queste circostanze trasformando il piano con le (P, p) -omologie si trova che se H è un qualunque punto di r , e K il suo corrispondente nella ω , il piano è (H, K) -transitivo, e si perviene così al caso IV_a, 3). Nella ipotesi opposta diciamo $H (\equiv A)$ il punto omologo di B nella ω . Trasformando il piano con questa omologia si riconosce che è (B, H) transitivo. Poichè esso, (per il teorema V), è anche (B, A) -transitivo, detto Q un qualunque punto non appartenente alla retta r , dalle (B, HQ) - e (B, AQ) -transitività si deduce (per il duale del teorema II) che il piano è (B, Q) -transitivo, e quindi anche (Q, B) -transitivo. Infine, per il corollario I segue che il piano è desarguesiano.

Prendiamo adesso in esame il caso in cui risulta $P \in r$ e $A \in p$. Trasformando il piano con le (B, r) -omologie si riconosce che esso è (P, A) -transitivo. Si può allora ripetere il ragionamento fatto ora nell'ipotesi che ω^2 non sia l'identità, per provare che il piano è desarguesiano.

Al medesimo risultato si giunge infine, procedendo in modo del tutto analogo, quando è $P \equiv A$.

Anche qui, come già sopra nei nn. 12 e 13, l'analisi svolta, e il fatto che la figura IV_a, 3) contenga quella del tipo IV_a, 2) portano a concludere che le figure successive alla IV_a, 3) stanno nella classe V o nelle successive.

Traducendo per dualità i risultati ottenuti nei nn. 14 e 15 si ottengono le figure della classe IV_b.

16. Supponiamo che il piano contenga la figura $\mathcal{F}$ del tipo V, 1), e aggiungiamo a questa una coppia punto-retta (B, b) , e nella condizione che il piano sia (B, b) -transitivo, e risulta $B \notin b$.

Anche qui è sufficiente considerare solo i casi in cui le (B, b) -omologie portano in sè r ed R , cioè quelli in cui è:

$$b \equiv r; \quad B \equiv R; \quad B \in r, R \in b.$$

a) Supponiamo che sia $b \equiv r$, e quindi $B \notin r$, poichè altrimenti la coppia (B, b) farebbe già parte della $\mathcal{F}$. Si può ripetere il ragionamento fatto nel n. 14, b), e quindi il piano è desarguesiano.

b) Il caso $B \equiv R$ è il duale di quello ora considerato.

c) Prendiamo infine in esame la circostanza $B \in r$, $R \in b$. Trasformando il piano con le (B, r) -omologie si ha la (B, R) -transitività e quindi anche la (R, B) -transitività. Da questa, tenendo conto dell'ipotesi che il piano è (R, R) -transitivo, con un ragionamento del tutto analogo a quello fatto nel n. 15, b), quando abbiamo preso in considerazione il caso in cui ω^2 non è l'identità, si riconosce che il piano è desarguesiano.

La classe V contiene quindi una sola figura, quella del tipo V, 1).

17. Passiamo ora a considerare un piano il quale oltre a contenere una figura $\mathcal{F}$ del tipo VI_a, 1) sia anche (B, b) -transitivo (con $B \notin b$). Basta considerare i casi in cui la punteggiata r è trasformata in sè dalle (B, b) -omologie, e cioè quelli in cui risulta $B \in r$, oppure $b \equiv r$.

a) Quando è $B \in r$ per il teorema IV il piano è desarguesiano.

b) Supponiamo invece che sia $b \equiv r$. Ripetendo il ragionamento fatto nel n. 14, b) si riconosce che il piano è desarguesiano.

È così provato che anche la classe VI_a, come già la V, contiene un solo tipo di figure. Altrettanto vale, dualmente, per la classe VI_b.

18. Infine aggiungiamo una coppia (B, b) , con $B \notin b$, alla figura del tipo VII, 1). Per il teorema IV si riconosce subito che il piano è desarguesiano.

Il nostro esame è così finito, e risulta provato il risultato che abbiamo enunciato nel n. 2.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BAER R., *Homogeneity of projective planes*, American Journal of Math., 64, 137-152 (1942).
- [2] GINGERICH H. F., *Generalized fields and Desargues configurations*, Abstr. of. a Thesis, Urbana, Ill. 1945.
- [3] HALL M., *Projective planes*, Transactions of the Amer. Math. Soc. 54, 229-277 (1943).
- [4] LENZ H., *Kleiner Desarguesscher Satz und Dualität in projektiven Ebenen*, Jahresbericht der Deutschen Math.-Ver. 57, 20-31 (1954).
- [5] PICKERT G., *Projektive Ebenen*, Berlin, Springer, 1955.
- [6] SEGRE B., *Lezioni di geometria moderna*, vol. I, Bologna, Zanichelli, 1948.
- [7] ZAPPA G., *Reticoli e geometrie finite*, Lezioni raccolte da G. Zacher, Napoli, Liguori, 1952.