BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LUIGI MURACCHINI

Una classificazione delle trasformazioni puntuali di primi specie fra piani.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 12
(1957), n.2, p. 204–211.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_2_204_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Una classificazione delle trasformazioni puntuali di prima specie fra piani.

Nota di LUIGI MURACCHINI (a Bologna)

Sunto. - Seguendo un'idea del VILLA si dànno gli elementi per una classificazione delle trasformazioni puntuali di prima specie fra piani, fondata sulla considerazione della trasformazione linearizzante del terzo ordine. Alcuni dei tipi considerati vengono caratterizzati e costruiti geometricamente.

Summary. - Following an idea of VILLA the elements for classification of point-transformations of the first kind between two planes are given. The classification is founded upon the consideration of the linearizing correspondence of the third order. Geometrical characterisation and construction is given for some of the types of transformations considered.

1. Il VILLA ha proposto di classificare le trasformazioni puntuali fra piani mediante le corrispondenze linearizzanti relative

alle trasformazioni stesse e alle trasformazioni quadratiche ad esse osculatrici (¹).

Tale classificazione per le trasformazioni puntuali di 3^a specie venne fatta dal VILLA stesso (²), mentre per quelle di 2^a specie venne fatta da F. SPERANZA (³).

Seguendo tale idea del VILLA, si danno nella presente Nota gli elementi per una classificazione delle trasformazioni di prima specie (n. 3).

Dapprima (n. 2) si rilevano alcune proprietà delle suddette corrispondenze linearizzanti di VILLA, relative al caso attuale in cui la trasformazione è di prima specie. Vengono poi (n. 4) caratterizzate in modo completamente geometrico e costruttivo, alcuni dei tipi di trasformazioni considerati. La questione della esistenza e della generalità di tipi di trasformazioni qui introdotti non viene però trattata. Si potrebbe senza dubbio risolverla servendosi dei sistemi di equazioni di PFAFF caratterizzanti i tipi predetti, come è stato fatto in altra occasione per una questione analoga (⁴).

2. Consideriamo una trasformazione puntuale T fra due piani proiettivi $\pi(x, y)$, $\bar{\pi}(\bar{x}, \bar{y})$ di prima specie, cioè avente le tre direzioni caratteristiche distinte nella coppia generica (O, O) di punti corrispondenti. Notoriamente la T , nell'intorno della coppia $(O, \bar{O})$, si può rappresentare (⁵) mediante le equazioni:

$$(1) \quad \begin{aligned} \bar{x} &= x - xy + a_{30}x^3 + 3a_{21}x^2y + 3a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + [4], \\ \bar{y} &= y - xy + b_{30}x^3 + 3b_{21}x^2y + 3b_{12}xy^2 + b_{03}y^3 + [4], \end{aligned}$$

(¹) M. VILLA, *Problemi integrali sulle trasformazioni puntuali*, «Compositio Math.», vol. 12 137-146 (1954); M. VILLA, *Progressi recenti nella teoria delle trasformazioni puntuali*, «Conferenze del Sem. Mat. Univ. Bari», N. 10 (1955); Si veda anche una comunicazione fatta al V° Congresso della U. M. I. (Pavia-Torino, 1955) da M. VILLA e F. SPERANZA.

(²) M. VILLA, *Classificazione delle trasformazioni puntuali di 3^a specie fra piani*, «Boll. U. M. I.», 3 (11), 141-149 (1956).

(³) F. SPERANZA, *Classificazione delle trasformazioni puntuali di 2^a specie fra piani*, «Boll. U. M. I.», 3 (11), 210-216 (1956).

(⁴) Si veda: L. MURACCHINI, *Sulle trasformazioni puntuali di seconda e terza specie fra piani*, «Mem. Acc. Sci.», Torino, 3 (1), 25-44 (1953).

(⁵) Si veda, ad esempio: M. VILLA, *Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza puntuale fra piani proiettivi. I. Le proietività caratteristiche. II. Loro costruzione*, «Rend. Acc. d'Italia», (7) 8, 718-724 (1942) e (7) 9, 1-7 (1943).

e le ∞^2 trasformazioni cremoniane quadratiche osculatrici $Q(\lambda, \mu)$, nella coppia $(\bar{O}, O)$, sono quelle di equazioni:

$$(2) \quad \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x \{ \lambda x + (\mu + 1)y - 1 \}}{(\lambda + 1)(\mu + 1)xy - (\lambda x - 1)(\mu y - 1)} \\ \bar{y} &= \frac{y \{ \lambda + 1)x + \mu y - 1 \}}{(\lambda + 1)(\mu + 1)xy - (\lambda x - 1)(\mu y - 1)}. \end{aligned} \quad (\lambda, \mu \text{ parametri})$$

Infine le equazioni in coordinate omogenee (α, β) , (α', β') di rette del fascio di centro O , della corrispondenza $\mathcal{C}(\lambda, \mu)$ linearizzante del VILLA, relativa alla trasformazione quadratica osculatrice (2), sono:

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha' = a_{20}\alpha^3 + (3a_{21} - 1)\alpha^2\beta + 3a_{12}\alpha\beta^2 + a_{03}\beta^3 - \mu\alpha\beta(\alpha - \beta), \\ \beta' = b_{20}\alpha^3 + 3b_{21}\alpha^2\beta + (3b_{12} - 1)\alpha\beta^2 + b_{03}\beta^3 + \lambda\alpha\beta(\alpha - \beta), \end{cases}$$

tale corrispondenza è, in generale, di indici $(1, 3)$.

È noto anche che le rette unite della corrispondenza $\mathcal{C}(\lambda, \mu)$ sono le *rette di iperosculazione* (uscenti da O) della trasformazione $Q(\lambda, \mu)$. Esse sono date dalla equazione:

$$(4) \quad b_{20}\alpha^4 + (3b_{21} - a_{30})\alpha^3\beta + (3b_{12} - 3a_{21})\alpha^2\beta^2 + \\ + (b_{03} - 3a_{12})\alpha\beta^3 - a_{03}\beta^4 + (\lambda\alpha + \mu\beta)(\alpha - \beta)\alpha\beta = 0.$$

Ricordiamo che tali rette si possono definire come quelle che godono della seguente proprietà: Sia γ una curva di π , passante per O , $\bar{\gamma}$ la trasformata di γ per mezzo di T e $\gamma(\lambda, \mu)$ la trasformata per mezzo di $Q(\lambda, \mu)$. Le due curve $\bar{\gamma}$, $\gamma(\lambda, \mu)$ hanno in $\bar{O}$ un contatto analitico del 2° ordine; il contatto diventa geometrico del 3° ordine se, e solo se, γ è tangente in O ad una delle rette di iperosculazione di $Q(\lambda, \mu)$.

Vogliamo ora esporre alcune proprietà delle corrispondenze linearizzanti del 3° ordine $\mathcal{C}(\lambda, \mu)$ e delle relative rette di iperosculazione.

I. *Se una delle rette caratteristiche r uscenti da O è anche retta di iperosculazione per una trasformazione $Q(\lambda, \mu)$ essa lo è anche per tutte le altre; e viceversa. La curva caratteristica di T tangente in O ad r ha allora ivi un flesso.*

La prima parte segue subito dall'ispezione della equazione (4), ricordando che le rette caratteristiche sono date da $\alpha\beta(\alpha - \beta) = 0$. Per la seconda parte basta osservare che gli E_2 delle curve carat-

teristiche di T uscenti da O sono dati dalle:

$$y = \frac{3}{2} b_{30} x^2, \quad x = \frac{3}{2} a_{03} y^2, \quad y = x + \frac{3}{2} (b_{30} + 3b_{21} + 3b_{12} + b_{03} - a_{30} - 3a_{21} - 3a_{12} - a_{03}) x^2,$$

come si calcola facilmente ⁽⁶⁾.

Si conclude anche all' enunciato che precede *che se la circostanza di cui si dice in esso si presenta in tutte le coppie di punti corrispondenti in T , allora uno dei tre sistemi di curve caratteristiche di T è formato di rette.*

Chiameremo *retta di iperosculazione principale* di una $Q(\lambda, \mu)$ una retta di iperosculazione di tale trasformazione quadratica per la quale si verifichi la circostanza che le due curve di $\bar{\pi}$, $\bar{\gamma}(=T\gamma)$, $\gamma(\lambda, \mu)(=Q(\lambda, \mu)\gamma)$ corrispondenti di una curva γ di π passante per O , hanno in $\bar{O}$ un *contatto analitico del 3° ordine*. Si ha che:

II. *Se una trasformazione quadratica osculatrice $Q(\lambda, \mu)$ ha una retta r per O di iperosculazione principale allora la relativa trasformazione linearizzante $\mathcal{T}(\lambda, \mu)$ ha gli indici (1, 2) ⁽⁷⁾, perchè i due secondi membri delle equazioni (3) hanno a comune un fattore lineare che, eguagliato a zero, rappresenta la retta r ; e viceversa.*

Omettiamo la verifica di questo enunciato, la quale non presenta difficoltà. Aggiungiamo invece che: *se la retta r , di cui si dice nell' enunciato, è una retta caratteristica di T essa viene mutata dalla trasformazione stessa in una curva che ha in $\bar{O}$ un flesso di 2ª specie, ossia in una curva che contiene un $\bar{E}_3$ di retta, e la corrispondenza subordinata da T fra l' E_3 di r (di centro O) e l' $\bar{E}_3$ è proiettiva. Segue che, se la circostanza ora descritta si presenta in ogni coppia di punti corrispondenti in T , questa trasformazione muta un sistema ∞^1 di rette in rette subordinando fra tali rette una corrispondenza proiettiva ⁽⁸⁾.*

⁽⁶⁾ Basta ricordare che l' equazione differenziale delle curve caratteristiche della trasformazione T di equazioni: $\bar{x} = f(x, y)$, $\bar{y} = \varphi(x, y)$ è

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y' \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2y' \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2y' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + y'^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \end{array} \right| = 0.$$

⁽⁷⁾ Naturalmente $\mathcal{T}(\lambda, \mu)$ ha gli indici (1, 2) se $Q(\lambda, \mu)$ ha una sola retta r per O nelle condizioni dell' enunciato.

⁽⁸⁾ Si ricordi infatti che se una corrispondenza fra due rette $a, \bar{a}$ è approssimata fino al 3° ordine di ogni coppia di punti corrispondenti da una proiettività, allora è essa stessa una proiettività.

III. *Se tutte le trasformazioni $Q(\lambda, \mu)$ posseggono una retta di iperosculazione principale per O , allora si tratta necessariamente di una retta fissa che coincide con una delle rette caratteristiche per O .*

Infatti se i secondi membri della (3) hanno un fattore lineare comune per ogni valore di λ e μ , necessariamente tale fattore è un fattore di: $\alpha\beta(\alpha - \beta)$. Se si presenta la circostanza di cui in questo enunciato III allora tutte le corrispondenze linearizzanti $\mathcal{T}(\lambda, \mu)$ sono di indici (1, 2), anzichè (1, 3).

Si verifica poi senza difficoltà che:

IV. *Esiste sempre una ed una sola $Q(\lambda, \mu)$ per cui è retta di iperosculazione principale una retta r data, che non sia caratteristica. Esistono sempre trasformazioni $Q(\lambda, \mu)$, in generale in numero finito, che hanno due rette di iperosculazione principali.*

Segue che esistono ∞^1 delle $\mathcal{T}(\lambda, \mu)$ che hanno indici (1, 2) e che ne esiste, in generale, un numero finito che si riducono a proiettività (perchè di indici 1, 1). Invece: *in generale non esiste nessuna $Q(\lambda, \mu)$ che possieda tre rette d'iperosculazione principale, nè quindi nessuna $\mathcal{T}(\lambda, \mu)$ che sia degenera.* Affinchè si verifichi questa circostanza occorre siano soddisfatte le condizioni (essenzialmente due):

$$(5) \quad \begin{vmatrix} a_{30} & 3a_{21} + 3a_{12} - 1 & a_{03} \\ b_{30} & 3b_{21} + 3b_{12} + 1 & b_{03} \end{vmatrix} = 0$$

e se queste sono verificate vi sono allora ∞^1 $\mathcal{T}(\lambda, \mu)$ degeneri (purchè, naturalmente, non siano nulli tutti gli elementi della matrice (5) chè allora tutte le $\mathcal{T}(\lambda, \mu)$ sono degeneri in base allo enunciato III.).

Osserviamo ancora che: non vi può essere una trasformazione $Q(\lambda, \mu)$ le cui quattro rette di iperosculazione siano tutte principali, senza che questa $Q(\lambda, \mu)$ abbia le rette d'iperosculazione indeterminate (ma ciò non basta) e che abbia in $(O, \bar{O})$ con T contatto del 3° (anzichè del 2°) ordine (e ciò è sufficiente). Infine:

V. *Esiste sempre una ed una sola $Q(\lambda, \mu)$ che ha due delle sue quattro rette di iperosculazione che costituiscono la coppia hessiana della terna delle rette caratteristiche.*

Tale trasformazione quadratica, che indicheremo con Q^* , si ottiene per:

$$(6) \quad \begin{aligned} \lambda &= b_{03} - b_{30} + 3b_{12} - 3a_{12} - 3a_{21} \\ \mu &= a_{30} - a_{03} + 3a_{21} - 3b_{12} - 3b_{21} \end{aligned}$$

essa risulta intrinsecamente determinata. Indichiamo con $\mathcal{T}^*$ la relativa corrispondenza linearizzante.

3. Sulla base di quanto è stato esposto nel n. 2 daremo ora gli elementi per una classificazione delle trasformazioni puntuali di prima specie fra piani. Si potranno intanto distinguere i seguenti quattro casi:

1° CASO: trasformazioni per le quali, in una coppia generica di punti corrispondenti, la generica corrispondenza linearizzante $\mathcal{T}(\lambda, \mu)$ è di indici (1, 3).

2° CASO: $\mathcal{T}(\lambda, \mu)$ è di indici (1, 2).

3° CASO: $\mathcal{T}(\lambda, \mu)$ è di indici (1, 1), cioè proiettiva.

4° CASO: $\mathcal{T}(\lambda, \mu)$ è degenere.

Nel successivo n. 4 determineremo e daremo la costruzione geometrica delle trasformazioni relative ai casi 2°, 3°, e 4° e si vedrà che esse dipendono al più da funzioni arbitrarie di una variabile; il caso 1° sopra considerato risulta dunque ancora troppo generale. È quindi opportuno distinguere in quel primo caso vari tipi e ciò può farsi mediante la considerazione della $\mathcal{T}^*$, di cui s'è detto nel n. 2, come segue:

1° CASO, a): Trasformazioni per le quali, in una coppia generica di punti corrispondenti, la generica $\mathcal{T}(\lambda, \mu)$ ed anche la $\mathcal{T}^*$ sono di indici (1, 3). È questo il tipo più generale.

b): la $\mathcal{T}^*$ è di indici (1, 2). Per ciò deve annullarsi il risultante dei due polinomi in α, β , a secondo membro nella (3), per i valori (6) di λ e μ . Poichè è una sola la condizione cui deve soddisfare la T , le trasformazioni di questo tipo *dipendono da una funzione arbitraria di 2 variabili*.

c): la $\mathcal{T}^*$ è di indici (1, 1) cioè proiettiva. Ciò implica due relazioni cui deve soddisfare la T .

d): la $\mathcal{T}^*$ è degenere. Ciò comporta tre relazioni per la T .

È chiaro che, utilizzando il contenuto del n. 2, si potrebbero ulteriormente suddividere i vari tipi considerati sopra; ma su ciò non insistiamo.

4. Vogliamo ora determinare le trasformazioni che presentano il 2°, 3° e 4° caso del precedente n. 3. Intanto le proposizioni III e le conseguenze della II del n. 2 permettono di concludere che:

Le trasformazioni puntuali che presentano il 2° caso, cioè hanno la generica $\mathcal{T}(\lambda, \mu)$ (nella coppia generica) di indici (1, 2), si ottengono scegliendo ad arbitrio un sistema ∞^1 di rette in π , ed uno analogo in $\bar{\pi}$, ponendo una corrispondenza arbitraria fra i due

sistemi di rette e fra ogni coppia di rette corrispondenti una corrispondenza proiettiva qualsivoglia.

Le equazioni di una cosiffatta trasformazione si ottengono eliminando il parametro u fra le equazioni:

$$(7) \quad \begin{cases} y = ux + f_1(u) \\ \bar{y} = f_2(u)\bar{x} + f_3(u) \\ \alpha(u)x\bar{y} + \beta(u)x + \gamma(u)\bar{x} + \varepsilon(u) = 0 \end{cases}$$

e si vede così che esse dipendono da 6 funzioni arbitrarie di una variabile.

Passiamo ora a considerare le trasformazioni che presentano il caso 3°. Anche in questo caso si può intanto affermare, applicando la III e la conseguenza della II, che le trasformazioni in esame mutano due sistemi ∞^1 di rette, di un piano π , in rette di due sistemi ∞^1 di un piano $\bar{\pi}$, subordinando fra ogni coppia di rette corrispondenti una proiettività. Ma dimostreremo ora che:

Le trasformazioni puntuali che presentano il caso 3°, cioè per le quali in una coppia generica di punti corrispondenti è proiettiva la generica corrispondenza linearizzante $\mathcal{C}(\lambda, \mu)$, si costruiscono tutte proiettando da due punti $S, \bar{S}$ i punti di una quadrica Q di S_3 (che non contenga entrambi i centri $S, \bar{S}$) su due piani $\pi, \bar{\pi}$ e chiamando corrispondenti due punti che provengono da uno stesso punto di Q . Si tratta di trasformazioni algebriche, in generale (2, 2), che possono essere però anche razionali (1, 2) se uno dei punti $S, \bar{S}$ sta sulla quadrica Q .

Per la dimostrazione, consideriamo due piani $\bar{\pi}, \pi$, sghembi in uno spazio S_5 , e fra di essi una trasformazione T del tipo considerato. Congiungendo punti di $\pi, \bar{\pi}$ corrispondenti in T si ottiene un sistema R_1 di ∞^2 rette costituenti una V_3 rigata, appartenente allo S_5 ; è chiaro che se si sceglie una superficie Σ che sia direttrice per il sistema R_1 di rette di quella V_3 e si proiettano i punti di $\bar{\Sigma}$ da $\bar{\pi}$ su π e da π su $\bar{\pi}$ si ottengono le coppie di punti corrispondenti in T ⁽⁹⁾. Ora la V_3 considerata contiene due sistemi ∞^1 di quadriche di S_3 , che si ottengono congiungendo punti di π e $\bar{\pi}$, appartenenti a due rette corrispondenti in T ; inoltre è chiaro che per ogni retta della V_3 , congiungente un punto di π con uno di $\bar{\pi}$, passano due quadriche di quei sistemi. Pertanto la V_3 dovrà contenere tre sistemi ∞^2 di rette R_1, R_2, R_3 , tali che da ogni punto della varietà escono tre rette indipendenti della stessa; da

⁽⁹⁾ Osservo incidentalmente che la costruzione iperspaziale indicata si può effettuare per tutte le trasformazioni fra piani; si veda: G. VAONA, *Varietà caratteristiche di una trasformazione e varietà quasi-asintotiche*, «Boll. U. M. I.», (3) 10, 32-42 (1955).

altra parte la V_3 non può essere luogo di piani perchè se ciascuno di tali piani fosse direttore per il sistema R_1 di rette la trasformazione T si ridurrebbe ad una omografia, potendosi ottenerla proiettando i punti di un piano, e se invece quei piani fossero luoghi di rette di R_1 allora π e $\bar{\pi}$ non potrebbero essere sghembi. Si osservi infine che la V_3 in esame è certamente algebrica infatti essa contiene due sistemi ∞^1 di quadriche che si ottengono mediante le rette dei sistemi R_1, R_2 e dei sistemi R_1, R_3 rispettivamente; pertanto le quadriche del primo sistema ad esempio sono direttrici per le rette di R_3 e ciò basta per poter affermare che la V_3 è algebrica. In conclusione abbiamo una V_3 algebrica pluririgata cioè contenente tre sistemi ∞^1 di rette, le tre rette uscenti da un punto di V_3 essendo indipendenti, inoltre la nostra V_3 ha due piani direttori $\pi, \bar{\pi}$. Da quanto è noto ⁽¹⁰⁾ circa le V_3 algebriche pluririgate si deve concludere che nella V_3 in esame esiste un terzo sistema ∞^1 di quadriche che si costruiscono con le rette dei sistemi R_2, R_3 e che pertanto risultano direttrici per le rette del sistema R_1 . Tenuto conto di quanto è stato detto in principio, la proposizione enunciata è dimostrata. Infatti se T si ottiene proiettando dai piani $\pi, \bar{\pi}$, sghembi in S_5 , una quadrica Q di S_3 è chiaro che si otterrà T anche proiettando Q dai due punti di intersezione di $\pi, \bar{\pi}$ con l' S_3 di Q .

Non rimane che da esaminare le trasformazioni T che presentano il caso 4°. Ma queste evidentemente sono un caso particolare di quelle relative alla proposizione appena dimostrata. Ora è facile constatare che le trasformazioni ottenute per proiezione di una quadrica Q posseggono tre sistemi ∞^1 (anzichè due soli, come nel caso 3°) di coppie di rette proiettive solo se i centri di proiezione $S, \bar{S}$ stanno entrambi su Q . Si ottengono così notoriamente le trasformazioni cremoniane quadratiche e tali sono quelle che presentano il caso 4°.

⁽¹⁰⁾ Si veda: M. BALDASSARRI, *Le varietà pluririgate a tre dimensioni*, «Rend. Sem. Mat. Univ. Padova», 19, 172-200 (1950); M. BALDASSARRI, *Aggiunta alla Nota: Le varietà pluririgate a tre dimensioni*, Ibid., 340-341. Infatti le sole V_3 normali da prendersi in considerazione risultano essere: a) la V_3^6 di S_7 che rappresenta al modo di C. SEGRE le terne di punti di tre rette; b) la V_3^5 di S_6 che rappresenta le ∞^6 superficie cubiche di S_3 che passano per una quartica γ di 2ª specie. Quest'ultima varietà in generale non contiene quadriche, ma può contenerne due sistemi ∞^1 se la quartica γ degenera in due rette e una conica (rimanendo però di 2ª specie). Si vede subito però che una proiezione di tale V_3^5 in uno S_5 non può mai avere due piani direttori nella situazione che ci interessa attualmente. Si deve dunque concludere che la nostra V_3 è una opportuna proiezione della V_3^5 di C. SEGRE in uno S_5 , e tale varietà contiene tre sistemi ∞^1 di quadriche.