
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

JAURÉS CECCONI

Sulla derivazione delle funzioni normali di intervallo.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 12
(1957), n.2, p. 200–204.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_2_200_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sulla derivazione delle funzioni normali di intervallo.

Nota di JAURES CECCONI (a S. Carlos, Brasil)

Sunto. - *Si dimostra l'esistenza e si dànno alcune proprietà della derivata di una funzione normale di intervallo di spazio astratto.*

1. Recentemente da parte di C. PAUC [5] e indipendentemente da parte di G. FICHERA [4] sono stati estesi alle funzioni definite su di una opportuna famiglia di insiemi (intervalli) di uno spazio astratto i classici teoremi di derivazione e di decomposizione dati da H. LEBESGUE per le funzioni di intervallo in R_n , additive e a variazione limitata. Particolarmente interessante è il procedimento usato a tale scopo da G. FICHERA, secondo il quale questo Autore perviene ai teoremi in questione dopo aver definito mediante una proprietà estrema la derivata di una tale funzione di intervallo astratto. Scopo di questa breve nota è di prendere in considerazione funzioni semi-additive (o normali nel senso di S. BANACH) di intervallo astratto e di estendere a tali funzioni (dopo l'introduzione di un concetto di derivata fondato sulla medesima proprietà estrema considerata da G. FICHERA) i teoremi dati da S. BANACH [2] e S. SAKS [6] per le funzioni di intervallo in R_n , normali, a variazione limitata (¹).

2. Sia \mathbf{A} un anello booleano (*somen-ring* nella letteratura germanica) costituito da sotto-insiemi A di un insieme astratto A_0 , con una base reticolare (*gitter-basis*) \mathbf{I} tale cioè che: (1) $0 \in \mathbf{I}$, (2) $I_1, I_2 \in \mathbf{I}$ implica che $I_1 \cdot I_2 \in \mathbf{I}$, (3) ogni $A \in \mathbf{A}$ ammette una decomposizione $\Delta(A) \equiv [I_1, I_2, \dots, I_n]$ in \mathbf{I} del seguente tipo: $A = \Sigma I_k$, $I_k \in \mathbf{I}$, $I_k \cdot I_l = 0$, $k \neq l$, $k, l = 1, 2, \dots, n$.

Sia $F | \mathbf{I}$ una funzione definita sugli elementi $I \in \mathbf{I}$, diremo che $F | \mathbf{I}$ è semi-additiva se per ogni $I \in \mathbf{I}$ e per ogni decomposizione $\Delta(I) \equiv [I_1, I_2, \dots, I_n]$ di I in \mathbf{I} si ha $F(I) \leq \Sigma F(I_k)$ (caso sub-additivo) oppure $F(I) \geq \Sigma F(I_k)$ (caso super-additivo). Diremo

(¹) Un teorema analogo al teorema 1° della presente nota si trova in [3]. Tale teorema non costituisce però l'estensione dei classici teoremi, in R_n in quanto le funzioni ivi considerate oltre ad essere normali e a variazione limitata verificano una ulteriore condizione.

che $F | I$ è additiva quando è simultaneamente sub e super-additiva. Diremo che $F | I$ è monotona se per ogni $I \in \mathbf{I}$ si ha $F(I) \geq 0$ (caso non decrescente) oppure $F(I) \leq 0$ (caso non crescente). Diremo che $F | I$ è a variazione limitata (V. L.) in $A \subset \mathbf{A}$ se esiste una costante $M > 0$ tale che $\sum |F(I_k)| < M$, al variare delle decomposizioni $\Delta(A) \equiv [I_1, I_2, \dots, I_n]$ di A in \mathbf{I} . In tal caso diremo variazione totale di $F | I$ in A il numero $V[F, A] = \sup. \sum |F(I_k)|$; l'estremo superiore essendo preso al variare di $\Delta(A)$.

È noto (ved. n. 3 del presente lavoro) che ogni funzione $F | I$ semi-additiva e V. L. in A può essere espressa nel seguente modo: $F | I = F_1 | I + F_2 | I$, le funzioni $F_1 | I$, $-F_2 | I$ essendo super-addittive, V. L. in A e non decrescenti.

Sia $\sigma(\mathbf{A})$ il minimo σ -anello booleano che contiene \mathbf{A} . Sia $\varphi(x)$ la classe delle funzioni $\varphi(x)$ che sono misurabili secondo $\sigma(\mathbf{A})$ in A_0 . Sia $m(J)$, $J \in \sigma(\mathbf{A})$, una misura finita, cioè una funzione non negativa, finita, σ -additiva, definita nella classe degli insiemi $J \in \sigma(\mathbf{A})$.

Ciò posto, considerata la decomposizione sopra menzionata, definiremo la derivata di $F_1 | I$ in $A \in \mathbf{A}$, secondo la misura m , nel seguente modo: sia $\theta[F_1, A, m]$ la classe delle funzioni $f(x)$, per le quali, comunque fissato $I \in A$ risulti $\int_I f dm \leq F_1(I)$.

Diremo che $F_1 | I$ è m -derivabile in A se nella classe $\theta[F_1, A, m]$ esiste una funzione massimale F'_1 , cioè una funzione F'_1 tale che: (1) $F'_1 \in \theta[F_1, A, m]$, (2) per ogni $\Phi \in \theta[F_1, A, m]$ si ha, m -quasi dappertutto in A , $\Phi \leq F'_1$. Allo stesso modo si procede con $-F_2 | I$. Se $F_1 | I$ e $-F_2 | I$ sono m -derivabili in A si dice allora che $F | I$ è m -derivabile in A con derivata $F'(x) = F'_1(x) + F'_2(x)$.

3. Per dimostrare l'esistenza della m -derivata sopra introdotta consideriamo, in questo numero, il seguente integrale di tipo di BURKILL di una funzione $F | I$.

Se $A \in \mathbf{A}$ e se $\Delta_1(A)$ e $\Delta_2(A)$ sono due decomposizioni di A diremo che $\Delta_2(A)$ è più fine di $\Delta_1(A)$; in simboli $\Delta_1(A) \ll \Delta_2(A)$; se ogni componente di $\Delta_2(A)$ appartiene a qualche componente di $\Delta_1(A)$. L'insieme delle decomposizioni $\Delta(A)$ di A risulta in tal modo ordinato nel senso di MOORE-SMITH e PICONE secondo la relazione \ll .

In corrispondenza della decomposizione $\Delta(A) \equiv [I_1, I_2, \dots, I_n]$ consideriamo la somma $s = \sum F(I_k)$ ed i limiti $\underline{B}(F, A) = \underline{\lim} s$, $\overline{B}(F, A) = \overline{\lim} s$, il minimo o massimo limite essendo presi nell'ordinamento \ll .

Diremo $\underline{B}(F, A)$ e $\overline{B}(F, A)$ rispettivamente integrale inferiore e superiore di tipo BURKILL di $F | I$ in A , diremo che $F | I$ è inte-

grabile secondo BURKILL, o totalizzabile in A , se $\underline{B}(F, A) = \overline{B}(F, A) < \infty$ e diremo $B(F, A) = \underline{B}(F, A) = \overline{B}(F, A)$ il suo integrale in A .

Sono note le seguenti proprietà della integrazione secondo BURKILL:

(1) (proprietà di monotonia) se date $F_1 | I, F_2 | I$ risulta, per ogni $I \in \mathbf{I}$, $\overline{F}_1(I) \leq \overline{F}_2(I)$; allora si ha, per ogni $A \in \mathbf{A}$, $\overline{B}(F_1, A) \leq \overline{B}(F_2, A)$, $\underline{B}(F_1, A) \leq \underline{B}(F_2, A)$.

(2) (proprietà di semi-additività) $\underline{B}(F, A)$ [$\overline{B}(F, A)$] è sub-additiva [super-additiva] in A .

(3) (proprietà di integrabilità delle funzioni semi-additive) se $F | I$ è semi-additiva, V. L. in A_0 , è integrabile secondo BURKILL su ogni insieme $A \in \mathbf{A}$ e si ha: $B(F, A) = \sup. s [B(F, A) = \inf. s]$ se $F | I$ è sub[super]-additiva.

(4) (proprietà di decomponibilità) se $F | I$ è semi-additiva e V. L. in A allora è la differenza di due funzioni super-additive, V. L. in A , non decrescenti.

4. È noto ([4] [5]) che se $F | I$ è additiva essa gode delle seguenti proprietà:

(1) Se $F | I$ è additiva e V. L. su A_0 allora essa è m -derivabile su ogni $A \in \mathbf{A}$ e per la sua m -derivata F' si ha $\int_A |F'| dm \leq V[F, A]$.

(2) Se $F | I$ è additiva e V. L. su A_0 allora essa è rappresen-

(*) Le proprietà (1), (2), (3) sono note, vedere ad es. [1] cap. 8. Per provare la (4) si osservi che, supposto $F | I$ sub-additiva e posto, per ogni $I \in \mathbf{I}$, $\psi(I) = \max \cdot [0, F(I)]$ e definito, per ogni $A \in \mathbf{A}$, $F_1(A) = B(\psi, A)$ e per ogni $I \in \mathbf{I}$, $F_2(I) = F(I) - F_1(I)$ allora $F_1 | I, -F_2 | I$ risultano funzioni super-additive, V. L., non decrescenti in A . Si noti anche che, per ogni $A \in \mathbf{A}$, si ha $F_1(A) + B(-F_2, A) \leq V[F, A]$. Infatti per ogni $A \in \mathbf{A}$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una decomposizione $\Delta(A) = [I_1, I_2, \dots, I_n]$ di A per la quale $-\varepsilon + F_1(A) = -\varepsilon + \overline{B}(\psi, A) \leq \Sigma \psi(I_k) = \Sigma F(I'_i)$ essendo $I'_1, \dots, I'_n, [I_1'', I_2'', \dots, I_m'']$ quelli degli I_k per i quali $\psi(I'_i) = F(I'_i)$ ($\psi(I_j'') = 0, F(I_j'') < 0$). È poi su ogni I'_i , per (1) e (3), $F(I'_i) \leq F_1(I'_i)$. Si ha inoltre, per (2), $\Sigma F_1(I'_i) + \Sigma F_1(I_j'') \leq F_1(A)$ e quindi $0 \leq \Sigma F_1(I_j'') \leq F_1(A) - \Sigma F_1(I'_i) \leq F_1(A) - \Sigma F(I'_i) < \varepsilon$. Si ha inoltre per ogni $I \in \mathbf{I}$, $|F_2(I)| \leq |F(I)| + F_1(I)$ di modo che, per la precedente, si deduce $\Sigma |F_2(I_j'')| \leq \Sigma |F(I_j'')| + \varepsilon$. Risulta pertanto $-\Sigma F_1(A) + \Sigma |F_2(I_j'')| \leq \Sigma F(I_j'') + \Sigma |F_2(I_j'')| \leq \Sigma V[F, A]$. Si ha così, per (2), $-\Sigma F_1(A) + B(-F_2, A) \leq V[F, A] + \Sigma |F_2(I_j'')| \leq V[F, A] + \Sigma F(I'_i) - \Sigma F(I'_i) \leq V[F, A] + F_1(A) - \Sigma F(I'_i) \leq V[F, A] + \varepsilon$, dalla quale, per l'arbitrarietà di ε discende il nostro asserto.

tabile in un sol modo come somma di una funzione additiva, assolutamente continua (nel senso di S. SAKS) in relazione alla misura $m(J)$ e di una funzione additiva singolare (nel senso di S. SAKS) in relazione alla stessa $m(J)$. Di più la parte assolutamente continua è espressa da $\int_I F' dm$.

(3) Se $F | I$ è additiva, non decrescente, singolare in relazione a $m(J)$, allora, per ogni $I \in I$ si ha $F(I) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F^{(\varepsilon)}(I)$ essendo $\varepsilon > 0$, $F^{(\varepsilon)}(I) = \sup. \Sigma F(I_k)$, $I_k \subset I$, $I_k \in I$, $I_k \cdot I_l = 0$, $\Sigma m(I_k) < \varepsilon$.

5. Siamo ora in grado di dimostrare i seguenti teoremi.

TEOREMA I°. - Se $F | I$ è semi-additiva e V. L. in A_0 allora essa è m -derivabile in ogni $A \subset A$, e si ha $\int_A |F'| dm < V[F, A]$.

TEOREMA II°. - Se $F | I$ è semi-additiva e non decrescente in A_0 allora per ogni $I \in I$, si ha $F(I) \leq \int_I F' dm + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F^{(\varepsilon)}(I)$ nel caso sub-additivo, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F^{(\varepsilon)}(I) + \int_I F' dm \leq F(I)$ nel caso super-additivo, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F^{(\varepsilon)}(I)$ essendo definito come nel n. 4.

Dimostriamo il Teorema I°. Per ciò che si riferisce all'esistenza della m -derivata F' o, ciò che è lo stesso, all'esistenza della m -derivata delle funzioni $F_1 | I$, $F_2 | I$ associate a $F | I$ come nel 3, basta osservare quanto segue. Considerata per esempio la funzione $F_1 | I$ si consideri il suo integrale di BURKILL $B(F_1, I)$ il quale risulta additivo in I e si osservi che la m -derivata di tale integrale (la quale esiste per la proposizione (1) del n. 4) verifica le condizioni poste nel n. 2 per la m -derivata F'_1 di $F_1 | I$ (3).

Per ciò che concerne la seconda parte della proposizione si osservi che $\int_A |F'| dm = \int_A |F'_1 + F'_2| dm \leq \int_A |F'_1| dm + \int_A |F'_2| dm = \int_A F'_1 dm + \int_A -F'_2 dm \leq F_1(A) + B(-F_2, A) \leq V[F, A]$, in forza della definizione di m -derivata, di quanto si è osservato nella prima parte della dimostrazione e della nota (2) a piè della pagina precedente.

La dimostrazione del Teorema II° si deduce poi ovviamente dalla proposizione (2) del n. 3 e dalle proposizioni (2), (3) del n. 4.

(3) Il presente ragionamento suggerirebbe, più generalmente, di definire la derivata di ogni funzione $F | I$, integrabile secondo BURKILL nel senso del n. 3, come la derivata del suo integrale di BURKILL.

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. AUMANN , *Reelle funktionen*, Springer Verlag, Berlin, (1954).
- [2] S. BANACH, *Sur une classe de fonctions d'ensembles*, Fund. Math, 6 (1924), 170-188.
- [3] O. HAUPT, *Zur differentiation additiver Funktionen*, Math. Nachr. 8, 93-97 (1952).
- [4] G. FICHERA, *Sulla derivazione delle funzioni additive di insieme*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 23, (1954), 366-397.
- [5] C. PAUC, *Contributions à une Théorie de la différentiation de fonctions d'intervalles sans l'hypothèse de Vitali*, Compt. Rend. de l'Acad. de Sc. 246, (1953), 1937-1939.
- [6] S. SAKS, *Sur une certaine classe de fonctions d'ensembles*, Bull. de l'Acad. Pol des Sc. e Let. 3, (1926), 103-108.
Aggiunta durante la correzione delle bozze:
M. PAGNI, *Sulla derivazione negli insiemi astratti delle funzioni a variazione limitata integrabili secondo Burkill*, Rend. Sem. Padova, 25, 279-302, 1956.