Bollettino Unione Matematica Italiana

Landolino Giuliano

Sul limite di integrali del tipo $\int_b^a f(x)\phi(hx,\tau)\,dx$, quando $h \to +\infty$.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.2, p. 186–191.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_2_186_0>

Sul limite di integrali del tipo $\int_a^b f(x)\varphi(hx, \tau)dx$, quando $h \to +\infty$.

Nota di LANDOLINO GIULIANO (a Pisa)

Sunto. - *Da un classico teorema sul limite di integrali del tipo* $\int_a^b f(x)\varphi(hx, \tau)dx$ *per* $h \to +\infty$ *si deduce un corollario utile per il calcolo del limite di alcuni integrali che non si riferiscono ai casi comunemente noti. Del corollario si dà anche una dimostrazione diretta.*

M'è accaduto di rilevare che da un classico generale teorema di convergenza di certi integrali, può ricavarsi un Corollario [1] che non mi pare sia stato da altri esplicitamente messo in luce, utile per calcolare il limite di integrali per esempio del tipo $\int_a^b f(x)\varphi(nx)dx$, quando $n \to \infty$, in cui $\varphi(t)$ è funzione periodica e che, come farò osservare, non riguardano i casi comunemente noti.

[1] Vedi Corollario II'.

Dedurrò qui il Corollario dal teorema a cui ho accennato e ne darò anche una dimostrazione diretta.

1. Uno studio generale sulla convergenza di integrali del tipo $\int_a^b f(x)\varphi(x, h)dx$ quando $h \to +\infty$, risale al DU BOIS-REYMOND [2] e al DINI [3], il quale stabilì il seguente:

TEOREMA I. – *Siano* f(x) *funzione reale definita e integrabile (nel senso di Mengoli-Cauchy) in un intervallo finito* (a, b) *e* $\varphi(x, h)$ *funzione reale definita e limitata per* $a \leq x \leq b$ *e per* h *reale comunque grande. Per ogni tale valore di* h, *la* $\varphi(x, h)$ *risulti integrabile (secondo Mengoli-Cauchy) in* (a, b) *e, inoltre, per tutti i sistemi di valori di* a′ *e* b′ *tali che* $a \leq a' < b' \leq b$, *sia*:

$$\lim_{h \to +\infty} \int_{a'}^{b'} \varphi(x, h)dx = 0 \tag{1}$$

È allora:

$$\lim_{h \to +\infty} \int_a^b f(x)\varphi(x, h)dx = 0. \tag{2}$$

Se ne deducono i seguenti due Corollari:

COROLLARIO I. – *Se, invece della* (1), *sussiste la relazione:*

$$\lim_{h \to +\infty} \int_{a'}^{b'} \varphi(x, h)dx = \lambda(b' - a')$$

con λ *indipendente da* a′ *e* b′, *sostituendo nel teorema al posto di* $\varphi(x, h)$ *la* $\varphi(x, h) - \lambda$, *si ottiene:*

$$\lim_{h \to +\infty} \int_a^b f(x)\varphi(x, h)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

COROLLARIO II. – *Se la* $\varphi(x, h)$ *è, rispetto ad* x, *periodica di periodo* T, *ed è* $\varphi(x, h) \equiv \varphi(hx)$, *si ha:* [4]

[2] P. DU BOIS-REYMOND, Borchardt Journal, v. 79.

[3] U. DINI, *Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale*, Nistri, Pisa, 1889 pp. 37 e segg.

[4] Infatti, si ponga $h(b' - a') = p_h T + d_h$, $0 \leq d_h < T$ e p_h intero per cui è quindi $\frac{h(b' - a')}{T} - 1 < p_h \leq \frac{h(b' - a')}{T}$.

$$\lim_{h \to +\infty} \int_{a'}^{b'} \varphi(hx)dx = \lim_{h \to +\infty} \frac{1}{h} \int_{ha'}^{hb'} \varphi(t)dt = \frac{b' - a'}{T} \int_0^T \varphi(t)dt$$

e, per il Corollario I, si ricava:

$$\lim_{h \to +\infty} \int_a^b f(x)\varphi(x,\ h)dx = \int_a^b \varphi(x)dx \ \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t)\ t\,.$$

Nell'indirizzo dell'analisi moderna, il teorema I., nella sua forma generale, suona così [5]:

TEOREMA I'. - *Sia* $\varphi(x,\ \tau,\ h)$ *definita e reale per* x *variabile nell'intervallo finito* (a, b), τ *variabile in un insieme di punti* E *e* h *reale comunque grande. Si supponga che, fissati un punto* τ *in* E *e un valore di* h, *la* $\varphi(x,\ \tau,\ h)$ *sia quasi continua in* (a, b) *e, salvo al più un insieme di misura nulla di* (a, b), *si abbia* $|\varphi(x,\ \tau,\ h)| < K$, *con* K *costante indipendente da* τ *e da* h. *Si supponga poi che, fissato* τ *in* E, *per ogni intervallo* (a', b') *di* (a, b), $a \leq a' < b' \leq b$, *si abbia* [6]*:*

$$\lim_{h \to +\infty} \int_{a'}^{b'} \varphi(x,\ \tau,\ h)dx = 0 \tag{1'}$$

uniformemente quando τ *varia in* E.

Se f(x) *è una funzione reale, quasi continua e integrabile in*

Si ha allora:

$$\int_{a'}^{b'} \varphi(hx)dx = \frac{1}{h} \int_{ha'}^{hb'} \varphi(t)dt = \frac{1}{h} \left\{ p_h \int_0^T \varphi(t)dt + \int_{ha'+p_h T}^{ha'+p_h T+d_h} \varphi(t)dt \right\}.$$

Ora, è:

$$\frac{b' - a'}{T} - \frac{1}{h} < \frac{p_h}{h} \leq \frac{b' - a'}{T} \qquad \text{e perciò} \quad \lim_{h \to +\infty} \frac{p_h}{h} = \frac{b' - a'}{T}.$$

È poi, evidentemente:

$$\lim_{h \to +\infty} \frac{1}{h} \int_{ha'+p_h T}^{ha'+p_h T+d_h} \varphi(t)dt = 0.$$

[5] v. VITALI-SANSONE, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*, Parte II, (G. SANSONE) 3ª ediz. Zanichelli, Bologna, 1952, pp. 238-239; v. anche W. HOBSON, *The theory of functions of a real variable and the theory of Fouriers series*, Vol. III, Cambridge, Univ. Press, pp. 422 e segg.

[6] L'integrabilità qui e nel seguito va intesa sempre nel senso del LEBESGUE.

(a, b), *si ha allora:*

$$\lim_{h \to +\infty} \int_a^b f(x)\varphi(x, \tau, h)dx = 0 \tag{2'}$$

e la convergenza a zero dell'integrale è uniforme quando τ *varia in* E.

Così come dal teorema I. si sono ricavati i Corollari I. e II., dal teorema I' si ricavano i seguenti due Corollari:

COROLLARIO I'. - *Se, invece della* (1'), *sussiste la relazione*:

$$\lim_{h \to +\infty} \int_{a'}^{b'} \varphi(x, \tau, h)dx = \lambda(b' - a')$$

con λ *indipendente da* a' *e* b' *e uniformemente quando* τ *varia in E, sostituendo nel teorema al posto di* φ(x, τ, h), *la* φ(x, τ, h) $-$ λ, *si ottiene:*

$$\lim_{h \to +\infty} \int_a^b f(x)\varphi(x, \tau, h)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

uniformemente quando τ *varia in* E.

COROLLARIO II'. - *Se la* φ(x, τ, h) *è, rispetto ad* x, *periodica, di periodo* T, *ed è* $\varphi(x, \tau, h) \equiv \varphi(hx, \tau)$, *si ha, uniformemente quando* τ *varia in* E:

$$\lim_{h \to +\infty} \int_{a'}^{b'} \varphi(hx, \tau)dx = \frac{b' - a'}{T} \int_0^T \varphi(t, \tau)dt$$

e, per il Corollario I', *si ricava:*

$$\lim_{h \to +\infty} \int_a^b f(x)\varphi(hx, \tau)dx = \int_a^b f(x)\,dx\ \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t, \tau)dt.$$

2. È il Corollario II' quello a cui si accenna all'inizio di questa Nota. Ne daremo ora una dimostrazione diretta. Si tratta di dimostrare la seguente proposizione:

Sia f(x) *funzione reale quasi continua in* $a \leq x \leq b$ *e ivi integrabile. Sia* φ(t, τ) *funzione reale definita per* t *qualunque reale e* τ *variabile in un insieme* E *e, fissato* τ, *sia quasi continua, e periodica rispetto a* t *di periodo* T *e, escluso al più un insieme di punti di misura nulla di* (a, b), *limitata da una costante* L *indipendente da* τ. *È allora, qualunque siano* a' *e* b' *con* $a \leq a' < b' \leq b$:

$$\lim_{h \to +\infty} \int_{a'}^{b'} f(x)\varphi(hx, \tau)dx = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t, \tau)\,dt \int_{a'}^{b'} f(x)dx$$

uniformemente quando τ *varia in* E *e l'intervallo* (a', b') *in* (a, b).

a) Cominciamo intanto col supporre la $f(x)$ continua in (a, b). Fissato ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$, dividiamo l'intervallo (a', b') in m parti uguali, $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$, con m sufficientemente grande in modo che in ciascuna di esse l'oscillazione di $f(x)$ risulti minore di ε. Detto f_r il valore di $f(x)$ nel primo estremo di δ_r, si ha:

$$(1) \qquad \int_{a'}^{b} f(x)\varphi(hx, \tau)dx = \sum_{r=1}^{m} f_r \int_{\delta_r} \varphi(hx, \tau)dx + \sum_{r=1}^{m} \int_{\delta_r} \{f - f_r\} \varphi(hx, \tau)dx.$$

Supposto, fissato τ, escluso al più un insieme di misura nulla di (a, b): $|\varphi(hx, \tau)| \leq L$, con L numero fisso positivo, indipendente da τ, si ottiene:

$$(2) \qquad \left| \sum_{r=1}^{m} \int_{\delta_r} \{f - f_r\} \varphi(hx, \tau)dx \right| \leq \varepsilon L(b' - a').$$

Si ponga $\delta = \dfrac{b' - a'}{m}$. Si ha, per $r = 1, 2, \ldots, m$:

$$\int_{\delta_r} \varphi(hx, \tau)dx = \int_{a'+(r-1)\delta}^{a'+r\delta} \varphi(hx, \tau)dx = \frac{1}{h} \int_{ha'+h(r-1)\delta}^{ha'+hr\delta} \varphi(t, \tau)dt.$$

Si ponga: $\mu_{h,r} = ha' + h(r - 1)\delta$, $h\delta = p_h T + d_h$, $0 \leq d_h < T$ e p_h intero per cui è quindi $\dfrac{h\delta}{T} - 1 < p_h \leq \dfrac{h\delta}{T}$ e perciò $\lim\limits_{h \to +\infty} \dfrac{p_h}{h} = \dfrac{\delta}{T}$, qualunque sia (a', b') di (a, b).

Si può allora scrivere (7):

$$\int_{\delta_r} \varphi(hx, \tau)dx = \frac{1}{h} \left\{ p_h \int_0^T \varphi(t, \tau)dt + \int_{\mu_{h,r}+p_h T}^{\mu_{h,r}+p_h T+d_h} \varphi(t, \tau)dt \right\}$$

e quindi:

$$\lim_{h \to +\infty} \int_{\delta_r} \varphi(hx, \tau)dx = \frac{\delta}{T} \int_0^T \varphi(t, \tau)dt$$

uniformemente quando τ varia in E e qualunque sia (a', b') di (a, b). Fissato $\sigma > 0$, sia $\bar{h}$ tale che se $h \geq \bar{h}$ si abbia, qualunque sia τ

(7) Vedi nota (4).

in E, e qualunque sia l'intervallo (a', b') di (a, b):

$$\int_{\delta_r} \varphi(hx, \tau)dx = \frac{\delta}{T}\int_0^T \varphi(t, \tau)dt + \varepsilon_{r,h}$$

$|\varepsilon_{r,h}| < \sigma$, $r = 1, 2, \dots, m$.

Si può scrivere quindi:

$$\sum_{r=1}^{m} f_r \int_{\delta_r} \varphi(hx, \tau)dx = \left(\sum_{r=1}^{m} f_r \frac{b'-a'}{m}\right)\frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t, \tau)dt + \sum_{r=1}^{m} \varepsilon_{r,h} f_r. \tag{3}$$

Essendo $\sigma > 0$ arbitrario, si ricava:

$$\lim_{h \to +\infty} \sum_{r=1}^{m} \varepsilon_{r,h} f_r = 0. \tag{4}$$

Facendo quindi tendere a zero ε e perciò $m \to \infty$, si ottiene:

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{r=1}^{m} \frac{b'-a'}{m} f_r = \int_{a'}^{b'} f(x)dx. \tag{5}$$

Dalle (1), (2), (3), (4), (5) si ottiene così la relazione richiesta che abbiamo perciò provata nel caso in cui $f(x)$ sia continua.

b) Si passa ora al caso generale con lo stesso ragionamento usato dal TONELLI [8] per provare la tendenza a zero degli integrali $\int_a^b f(t)\cos ntdt$ e $\int_a^b f(t)\,\mathrm{sen}\, ntdt$ quando $n \to \infty$.

OSSERVAZIONE. – Ponendo, nel Corollario II': $\varphi(hx, \tau) \equiv |\cos nx|$ oppure $\varphi(hx, \tau) \equiv |\mathrm{sen}\, nx|$ si ottengono le due relazioni:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{a'}^{b'} f(x)\,|\cos nx|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{a'}^{b'} f(x)dx$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_{a'}^{b'} f(x)\,|\mathrm{sen}\, nx|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{a'}^{b'} f(x)dx$$

provate già da TONELLI [9].

In modo analogo si ricavano altri limiti in modo sistematico.

[8] L. TONELLI, *Serie Trigonometriche*, Zanichelli, Bologna, 1928 pp. 218-220.

[9] Loc. cit. (8) p. 220 nota (1).