Bollettino Unione Matematica Italiana

Giuliano Toraldo di Francia

Sul momento di quantità di moto trasportato da un'onda elastica trasversale in un solido omogeneo isotropo.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.2, p. 183–186.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_2_183_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1957.

Sul momento di quantità di moto trasportato da un'onda elastica trasversale in un solido omogeneo isotropo.

Nota di GIULIANO TORALDO DI FRANCIA (a Firenze)

Sunto. - *Vedi N. 1.*

1. Questa breve nota è stata suggerita da un apparente paradosso che si presenta nella teoria delle azioni meccaniche del campo elettromagnetico. Un'onda elettromagnetica piana può trasportare un momento di quantità di moto rispetto a un asse parallelo alla sua direzione di propagazione. Ciò è provato dal fatto che essa può esercitare un momento meccanico attorno alla direzione di propagazione su un opportuno corpo materiale posto sul suo cammino [1]. Tuttavia, se si ricorre a un calcolo diretto mediante il classico tensore di MAXWELL, si arriva a concludere che il momento di quantità di moto trasportato da un'onda piana indefinita attorno alla direzione di propagazione è nullo.

Il paradosso si può eliminare ricorrendo a più moderni metodi della teoria dei campi [2], oppure considerando un'onda piana a fronte limitato, quale si ha sempre in pratica, e mostrando che il momento di quantità di moto ha sede soprattutto al bordo. In ogni caso si trova che, fissata l'energia trasportata W, il modulo del momento della quantità di moto vale al massimo W/ω, dove ω è la pulsazione dell'onda.

È istruttivo studiare lo stesso problema nel caso delle onde elastiche trasversali in un corpo solido. Riesce allora chiaro perchè proprio il bordo della zona di superficie d'onda considerata ha importanza essenziale per il trasporto del momento di quantità di moto. Infatti il paradosso si presenta quando ci si metta dal punto di vista euleriano senza tener conto adeguatamente del bordo della zona di superficie d'onda considerata. Sparisce invece quando se ne tenga conto, ciò che si fa molto semplicemente adottando il

(1) Vedi p. es.: G. TORALDO DI FRANCIA, *Momento di quantità di moto ceduto da un'onda elettromagnetica a un piccolo elissoide, avente conduttività unidirezionale*, « Boll. Un. Mat. It. », **11**, 332 (1956).

(2) N. CARRARA, T. FAZZINI, LAURA RONCHI, G. TORALDO DI FRANCIA, *Sul momento di rotazione del campo elettromagnetico*, « Alta Frequenza », **29**, 100 (1955).

punto di vista lagrangiano. Questo fatto, evidentemente, non può avere l'analogo nel caso del campo elettromagnetico.

2. Sia C un corpo solido elastico, omogeneo, isotropo e infinitamente esteso. In esso si propaghi, nella direzione della coordinata cartesiana z, un'onda piana sinusoidale a spostamento infinitesimo, essendo lo spostamento s nell'usuale notazione complessa espresso da

$$s = ae^{ikz - i\omega t}. \tag{1}$$

Faremo l'ipotesi che a sia un vettore complesso costante normale all'asse z, cioè che sia

$$a = a_r + ia_i \tag{2}$$

con a_r e a_i vettori reali costanti, normali all'asse z. È noto allora che la (1) può rappresentare una soluzione dell'equazione delle vibrazioni elastiche con div $s = 0$. Come è usuale, ometteremo nel seguito il fattore temporale $e^{-i\omega t}$.

Dalla (1) si ottiene facilmente il tensore di deformazione B

$$B = \frac{1}{2}(\nabla s + s\overleftarrow{\nabla}) = \frac{1}{2} ik(ak + ka)e^{ikz} \tag{3}$$

dove k è il versore dell'asse z, ak e ka sono diadi [3] e $\overleftarrow{\nabla}$ indica l'operatore ∇ che opera sulla grandezza che lo precede. Naturalmente l'invariante lineare di B è nullo, così che il tensore degli sforzi T sarà dato da

$$T = -2\mu B = -\mu ik(ak + ka)e^{ikz} \tag{4}$$

dove μ è la seconda costante di LAMÉ.

La forza F per unità di superficie che il mezzo dalla banda $z - 0$ esercita sul mezzo dalla banda $z + 0$ risulta dunque (a meno di un'eventuale e inessenziale pressione uniforme)

$$F = T \cdot k = -\mu ikae^{ikz}. \tag{5}$$

Isolata mentalmente una zona finita qualsiasi Σ sul piano α della superficie d'onda e detta O l'intersezione di α con l'asse z, il momento di quantità di moto K rispetto all'asse z che il mezzo

(3) S'intende per diade uv il tensore che nella notazione con gl'indici viene espresso con $u_i v_j$.

dalla banda $z - 0$ trasferisce nell'unità di tempo attraverso a Σ al mezzo dalla banda $z + 0$ dovrà essere espresso da

$$\dot{K} = \iint_{\Sigma} (P - O) \wedge \boldsymbol{F} \cdot k \, d\Sigma_P \, . \tag{6}$$

Se ci si mette da un punto di vista euleriano, in cui il punto d'integrazione P non dipende dal tempo e si suppone che anche il dominio d'integrazione sia fisso, questa formula fornisce in media un risultato nullo. Infatti il prodotto di grandezze fisse per una grandezza oscillante (qual'è $\boldsymbol{F}$) è in media nullo. Ma questo procedimento non è corretto. Infatti, si pensi per un momento che C non sia illimitato e che Σ rappresenti proprio la sua intersezione col piano α in condizioni di riposo. È chiaro che, a causa dell'oscillazione, l'intersezione di C col piano α non coinciderà più con Σ, ma ne differirà per alcune zone (variabili) all'orlo. E si potrebbe vedere che proprio tali zone portano un contributo non nullo al momento della quantità di moto [4].

Ma il modo più semplice di procedere è passare al punto di vista lagrangiano, pensando che P sia la posizione del punto d'integrazione in condizioni di riposo e sostituendo P con $P + s$ nella (6). Ciò consente di mantenere fisso il dominio d'integrazione. Prima di effettuare questa sostituzione, ricordiamo che la media temporale del prodotto (scalare o vettoriale) di due grandezze oscillanti rappresentate in forma complessa è eguale alla parte reale del semiprodotto dell'una per la complessa coniugata dell'altra. Si ha dunque in media

$$\dot{K} = \frac{1}{2} \mathcal{R}e \iint_{\Sigma} s \wedge \boldsymbol{F}^* \cdot k d\Sigma = \frac{1}{2} \mathcal{R}e s \wedge \boldsymbol{F}^* \cdot k \, \Sigma \tag{7}$$

dove un asterisco indica il complesso coniugato. Sostituendo con le (1), (2) e (5) si ottiene

$$K = \mu k a_{,} \wedge a_{,} \cdot k \, \Sigma \, . \tag{8}$$

Ora, dalla (1), si ha per la velocità v

$$v = - i \omega a e^{ikz} \tag{9}$$

[4] In altre parole, Σ dovrebbe pensarsi come luogo delle particelle che la costituiscono, variabile col tempo.

per cui la potenza W trasmessa attraverso a Σ sarà in media

$$W = \frac{1}{2}\,\mathcal{R}e \iint_{\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}^* \, d\,\Sigma = \frac{1}{2}\,\mu k \omega \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}^* \,\Sigma = \frac{1}{2}\,\mu k \omega (a_r^2 + a_i^2)\,\Sigma \,. \tag{10}$$

Paragonando la (7) con la (10), si può scrivere

$$\dot{K} = \frac{2\boldsymbol{a}_r \wedge \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{k}}{a_r^2 + a_i^2} \, \frac{W}{\omega} \,. \tag{11}$$

Dunque $\dot{K}$ è proporzionale a W ed è sparito qualsiasi riferimento al punto O e a Σ.

È facile mostrare che la prima frazione del secondo membro ha il massimo valore assoluto quando $\boldsymbol{a}_r$ e $\boldsymbol{a}_i$ sono eguali in modulo e perpendicolari fra loro. Allora, in valore assoluto, si avrà al massimo

$$\dot{K} = \frac{W}{\omega} \tag{12}$$

in accordo con quanto avviene nel caso del campo elettromagnetico.