Bollettino Unione Matematica Italiana

Luigi Muracchini

Osservazioni sull'applicabilità proiettiva di due trasformazioni puntuali fra piani.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.2, p. 176–182.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_2_176_0>

Osservazioni sull'applicabilità proiettiva di due trasformazioni puntuali fra piani.

Nota di LUIGI MURACCHINI (a Bologna)

Sunto. - *Si esaminano le condizioni di integrabilità del sistema di equazioni di* PFAFF *che fornisce le coppie di trasformazioni puntuali proiettivamente applicabili. Se ne deduce la generalità della soluzione, illustrando il risultato con un opportuno esempio e integrandolo con alcune osservazioni.*

Summary. - *Integrability conditions are investigated for the system of* PFAFF *equations giving pairs of point-transformations projectively applicable and the generality of the solution is deduced. To the result an example and some observations are added.*

1. L'applicabilità proiettiva di due trasformazioni puntuali di prima specie T, T' è stata recentemente introdotta [1] e studiata sia nei piani che si corrispondono in T, T', che nelle immagini di T e T' su varietà di C. SEGRE rappresentative delle coppie di punti di due piani. Sono state così determinate le condizioni analitiche necessarie e sufficienti per l'applicabilità proiettiva di due trasformazioni T, T'.

Nella presente Nota formo il sistema di equazioni di PFAFF che fornisce la coppia di trasformazioni T, T' proiettivamente applicabili in modo *non banale* (Cfr. n. 2). Dall'esame della condizione di integrabilità (n. 3) del predetto sistema si conclude che: *le coppie di trasformazioni proiettivamente applicabili dipendono da una funzione arbitraria di due variabili.*

Segue che in generale una trasformazione puntuale T fra due piani non è *proiettivamente deformabile*, chiamando così una trasformazione T per la quale esista almeno un'altra trasformazione T', tale che T e T' siano proiettivamente applicabili in modo non banale.

Il risultato enunciato prima viene poi illustrato (n. 4) dando un esempio esplicito di una classe di coppie di trasformazioni

(1) Si veda: M. VILLA - L. MURACCHINI, *L'applicabilità proiettiva di due trasformazioni puntuali*, «Boll. U. M. I.», (3) 10, 313-327 (1955); M. VILLA, *L'applicabilité projective de deux transformations ponctuelles* (Conferenza generale tenuta al IV Congresso dei Matematici Cecoslovacchi, Praga, 1955), «Journ. Tchéque de Math.», 6 (81), 435-443 (1956): Per le trasformazioni di 2^a specie, si veda: M. VILLA, *Applicabilità proiettiva fra superficie di 2^a specie della V_4 di Segre*, «Boll. U. M. I.», (3), 11, 493-495, (1956); F. SPERANZA, *Applicabilità proiettiva fra trasformazioni puntuali di 2^a specie*, «Boll. U. M. I.» (3), 11, 526-537 (1956).

proiettivamente applicabili dipendente da una funzione arbitraria di due variabili.

D'altra parte la determinazione delle coppie di trasformazioni proiettivamente applicabili o quella delle trasformazioni proiettivamente deformabili equivale, come viene osservato nel n. 2 nell'impostare il sistema di equazioni di PFAFF di cui sopra, alla determinazione delle trasformazioni T fra due piani π, π' tali che esista almeno una trasformazione U fra i piani π e π'' che abbia nel piano π lo stesso tritessuto [2] $\mathcal{T}$ di curve caratteristiche che la trasformazione T. Ne risulta, tenendo conto di risultati ottenuti già da tempo [3], che se T è una trasformazione proiettivamente deformabile le coppie di trasformazioni T, T' proiettivamente applicabili che si possono formare con la T sono al più ∞^n con $n \leq 8$, cioè dipendono al più da otto costanti arbitrarie. Ma nel n. 4 citeremo alcuni risultati ottenuti, insieme ad altri, da G. VAONA e che verranno pubblicati prossimamente [4], in base ai quali risulta che vale la limitazione migliore $n \leq 5$ e che $n = 5$ soltanto per le trasformazioni T che hanno per curve caratteristiche delle rette costituenti un tritessuto a configurazione esagonale [5].

2. Consideriamo due piani proiettivi π_1, π_2 ed una corrispondenza puntuale fra di essi e indichiamo con T tale corrispondenza o trasformazione pensata come facente passare dai punti di π_1 o quelli di π_2, mentre invece indicheremo con T^{-1} la stessa corrispondenza ma pensata come facente passare dai punti di π_2 o quelli di π_1. Consideriamo poi un'altra trasformazione di due altri piani π_1', π_2' e, con notazione analoga alla precedente, indichiamola con T' nel senso da π_1' a π'_2 e T'^{-1} nel senso π_2' a π_1'. Come è noto [6] si dice che T e T' sono proiettivamente applicabili se esiste una corrispondenza fra i piani π_1, π_1' (che diremo U_1 nel senso da π_1 a π_1') che induce insieme con T e T' una corrispondenza fra π_2, π_2' (U_2 nel senso da π_2 a π_2') e si verifica la circostanza che le curve caratteristiche di T sono caratteristiche anche per U_1 in π_1 e per U_2 in π_2 e le curve caratteristiche di T' sono caratteristiche anche

(2) Per la definizione e la proprietà dei tritessuti di curve si veda, ad esempio: W. BLASCHKE - G. BOL, *Geometrie der Gewebe*, Berlino, 1938.

(3) L. MURACCHINI, *Trasformazioni puntuali e loro curve caratteristiche*, Atti IV Congresso U. M. I., Taormina (1951). Casa Ed. Perrella, Roma (1953).

(4) Quei risultati mi sono stati comunicati oralmente da G. VAONA.

(5) Cfr. l'op cit. in (2) per il significato di *configurazione esagonale* di un tritessuto.

(6) Cfr. l'op. cit. in (4).

per U_1 in π_1' e per U_2 in π_2' (7). Orbene osserviamo anzitutto che esistono tre casi di applicabilità proiettiva, che si presentano per qualsivoglia trasformazione T, casi *banali.* Tali casi sono i seguenti:

(*a*) la trasformazione T' coincide con la trasformazione T^{-1}; la U_1 coincide con T e la U_2 con T^{-1};

(*b*) la trasformazione T' coincide con la T; le trasformazioni U_1, U_2 sono omografie;

(*c*) la trasformazione T' è una omografia; la U_1 coincide con la T e la U_2 è una omografia (8).

Ciò premesso, consideriamo ora una trasformazione T *proiettivamente deformabile* (Cfr. n. 1) e sia T' una trasformazione tale che T e T' siano proiettivamente applicabili; chiamiamo T'' la trasformazione che T, U_1, T' inducono fra i piani π_1, π_2'. È chiaro che le curve caratteristiche di T in π_1 sono caratteristiche in quel piano anche per U_1 e T''. Viceversa: consideriamo una trasformazione T fra due piani π_1, π_2 e supponiamo che esistano due trasformazioni U_1, T'' rispettivamente fra i piani π_1, π_1', e π_1, π_2' (una delle quali almeno non sia un'omografia e non coincida con T) e che le curve caratteristiche di T in π_1 siano caratteristiche anche per U_1, T''. È chiaro che la trasformazione T e la T', indotta fra π_1' e π_2' da U_1 e T'', sono proiettivamente applicabili in modo non banale (per mezzo di U_1 e della U_2 indotta fra π_2, π_2').

Si può dunque concludere che: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una trasformazione* T *fra i piani* π_1, π_2 *sia proiettivamente deformabile é che esista almeno una trasformazione diversa da* T, *che non sia una omografia, fra il piano* π_1 *e un piano* π', *la quale abbia in* π_1 *le stesse curve caratteristiche che la* T.

Si può anche dire che le trasformazioni proiettivamente deformabili sono quelle che hanno in un piano un tritessuto $\mathcal{T}$ di curve caratteristiche il quale è tale per più di una trasformazione. Pertanto il problema della determinazione delle trasformazioni proiettivamente deformabili può essere ricondotto al problema della determinazione dei tritessuti $\mathcal{T}$ che hanno la proprietà sopra indicata. Ricordiamo che è stato stabilito (9) che un dato tritessuto $\mathcal{T}$ può essere quello delle curve caratteristiche di ∞^4 trasformazioni al più; da ciò si deduce subito intanto che se T è una trasformazione proiettivamente deformabile cui sono proiettivamente applicabili ∞^n

(7) Non si esclude così che una o entrambe le trasformazioni U_1, U_2 possano essere omografie (per queste ultime essendo notoriamente caratteristiche tutte le curve del piano).

(8) Si noti che con lo scambio dei piani π_2, π'_2 i casi (*a*) e (*b*) vengono mutati l'uno nell'altro, mentre il caso (*c*) rimane invariato.

(9) Cfr. l'op, cit. in (3).

trasformazioni T' dovrà certamente essere $n \leq 8$. I risultati ottenuti da G. VAONA, che ho menzionato nel n. 1, permettono però di riconoscere che in effetti si ha $n \leq 5$, come si vedrà nel n. 4.

3. Ci proponiamo ora di determinare le generalità delle trasformazioni proiettivamente deformabili. Sia T una trasformazione fra i piani π_1, π_2 e sia A, B una generica coppia di punti corrispondenti in T. Associamo, come al solito [10], nei piani π_1, π_2, riferimenti proiettivi mobili alla coppia A, B. Prenderemo A, B come rispettive origini e indicheremo con A_i, B_i $(i = 1, 2)$ gli altri punti fondamentali. Valgono le formule (di FRENET):

$$(1)\quad \begin{array}{ll} dA = \omega_{00}A + \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2, & dB = \tau_{00}B + \tau_1 B_1 + \tau_2 B_2 \\ dA_i = \omega_{i0}A + \omega_{i1}A_1 + \omega_{i2}A_2, & dB_i = \tau_{i0}B + \tau_{i1}B_1 + \tau_{i2}B_2 \end{array} \quad (i = 1, 2).$$

Se i riferimenti predetti si scelgono corrispondenti in una omografia K tangente a T nella coppia A, B si avrà:

$$(2)\qquad \tau_1 - \omega_1 = 0, \quad \tau_2 - \omega_2 = 0.$$

Inoltre, come è ben noto, se si pone:

$$(3)\qquad \begin{aligned} \tau_{11} - \tau_{00} - \omega_{11} + \omega_{00} &= \theta_1 \\ \tau_{21} - \omega_{21} &= \theta_2 \\ \tau_{12} - \omega_{12} &= \varphi_1 \\ \tau_{22} - \tau_{00} - \omega_{22} + \omega_{00} &= \varphi_2, \end{aligned}$$

le curve caratteristiche di T risulteranno determinate dalla equazione differenziale

$$(4)\qquad \omega_1^2\varphi_1 + \omega_1\omega_2(\varphi_2 - \theta_1) - \omega_2^2\theta_2 = 0.$$

Il primo membro di questa equazione, essendo le θ_i, φ_i combinazioni lineari di ω_1, ω_2, è una forma cubica in ω_1, ω_2.

Sia ora U una trasformazione fra i piani π_1, π' per cui definiremo (analogamente a quanto è stato fatto per T) un riferimento mobile in π' di punti fondamentali C (corrispondente di A in U), C_i $(i = 1, 2)$, corrispondendo questo riferimento a quello già scelto in π_1 in una omografia H tangente ad U nella coppia A, C. Si avranno le formule, analoghe a quelle già scritte per T,

$$(5)\qquad \begin{aligned} dC &= \tau_{00}^*C + \tau_1^*C_1 + \tau_2^*C_2 \\ dC_i &= \tau_{i0}^*C + \tau_{i1}^*C_1 + \tau_{i2}^*C_2 \end{aligned} \qquad (i = 1, 2)$$

(10) Si veda ad esempio l'op. cit. in (1).

$$\tau_1^* - \omega_1 = 0, \qquad \tau_2^* - \omega_2 = 0 \tag{6}$$

e se si pone:

$$\begin{aligned} \tau_{11}^* - \tau_{00}^* - \omega_{11} + \omega_{00} &= \theta_1^* \\ \tau_{21}^* - \omega_{21} &= \theta_2^* \\ \tau_{12}^* - \omega_{12} &= \varphi_1^* \\ \tau_{22}^* - \tau_{00}^* - \omega_{22} + \omega_{00} &= \varphi_2^* \end{aligned} \tag{7}$$

le curve caratteristiche di U saranno determinate dalla equazione differenziale

$$\omega_1^2\varphi_1^* + \omega_1\omega_2(\varphi_2^* - \theta_1^*) - \omega_2^2\theta_2^* = 0 \tag{8}$$

il cui primo membro è una forma cubica in ω_1, ω_2.

Le due trasformazioni T, U avranno in π_1 le stesse curve caratteristiche se le equazioni (4), (8) coincidono, cioè se le forme cubiche nei primi membri differiscono per un fattore ρ. Ora è noto che un cambiamento della omografia K tangente a T nella coppia A, B altera le forme θ_i, φ_i $(i = 1, 2)$ nel modo seguente: esse diventano rispettivamente

$$\begin{aligned} &\theta_1 - 2\lambda_1\omega_1 - \lambda_2\omega_2, \quad &&\theta_2 - \lambda_2\omega_1, \\ &\varphi_1 - \lambda_1\omega_2, &&\varphi_2 - \lambda_1\omega_1 - 2\lambda_2\omega_2, \end{aligned} \tag{9}$$

quando si sostituisca alla omografia K un'altra omografia che muta i punti A_1, A_2 in $B_1 - \lambda_1 B$, $B_2 - \lambda_2 B$, ne risulta subito che, se le due equazioni (4) e (8) coincidono, scegliendo opportunamente l'omografia K tangente a T nella coppia A, B, si darà luogo al verificarsi delle condizioni seguenti:

$$\begin{aligned} \theta_1^* - \rho\theta_1 &= 0 \\ \theta_2^* - \rho\theta_2 &= 0 \\ \varphi_1^* - \rho\varphi_1 &= 0 \\ \varphi_2^* - \rho\varphi_2 &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

e, ovviamente, se valgono le (10) le due equazioni (4) e (8) coincidono; T ed U hanno allora in π_1 le stesse curve caratteristiche. Le equazioni (2), (6), (10) costituiscono il sistema di equazioni di PFAFF da cui dipende la determinazione delle coppie di trasformazioni T, U aventi in un piano comune le stesse curve caratteristiche e quindi, in base a quanto s'è detto nel n. 2, delle coppie di trasformazioni proiettivamente applicabili. Per differenziazione esterna delle equazioni del sistema indicato si ottengono le seguenti equazioni quadratiche esterne:

$$
(11) \qquad \begin{aligned}
&[\theta_1\omega_1] + [\theta_2\omega_2] = [\varphi_1\omega_1] + [\varphi_2\omega_2] = 0\\
&[\varphi_3\omega_1] + (\rho^2 -)[\theta_2(\theta_1 - \varphi_2)] - [d\rho\theta_2] = 0\\
&2[\theta_3\omega_1] + [\varphi_3\omega_1] - (\rho^2 - \rho)[\varphi_1\theta_2] - [d\rho\theta_1] = 0\\
&[\theta_3\omega_2] + (\rho^2 - \rho)[\varphi_1(\varphi_2 - \theta_1)] - [d\rho\varphi_1] = 0\\
&2[\varphi_3\omega_2] + [\theta_3\omega_1] - (\rho^2 - \rho)[\varphi_1\theta_2] - [d\rho\varphi_2] = 0,
\end{aligned}
$$

avendo posto:

$$
\begin{aligned}
\theta_3 &= \tau_{10}{}^* - \omega_{10} - \rho(\tau_{10} - \omega_{10})\\
\varphi_3 &= \tau_{20}{}^* - \omega_{20} - \rho(\tau_{20} - \omega_{20}).
\end{aligned}
$$

Nelle (11) figurano, oltre ad ω_1, ω_2, le sette forme di PFAFF θ_i, φ_i $(i = 1, 2, 3)$, $d\rho$. Se il sistema di equazioni di PFAFF (2), (6), (10) è *in involuzione*, la relativa soluzione dovrà dipendere da una funzione arbitraria di due variabili (uno essendo la differenza fra il numero delle equazioni quadratiche esterne (11) e quello delle forme menzionate prima) ([11]). Che effettivamente questo sia quanto si verifica risulta subito dal calcolo della caratteristica della *matrice polare* del sistema (11) che risulta appunto essere uguale 6, se $\rho^2 - \rho \neq 0$. I casi singolari sono dati da $\rho^2 - \rho = 0$, il cui significato geometrico è facile a vedersi: $\rho = 0$ significa che la U è una omografia; $\rho = 1$ significa che T ed U coincidono (come si vede osservando che la corrispondenza da esse indotta fra π_2 e π' è una omografia. Abbiamo dunque dimostrato che: *le trasformazioni puntuali* T *proiettivamente deformabili dipendono da una funzione arbitraria di due variabili.*

4. Diamo ora un esempio di coppie di trasformazioni proiettivamente applicabili costituenti una classe dipendente da una funzione arbitraria di due variabili ([12]). Consideriamo dunque in uno spazio proiettivo ordinario S_3 una superficie generica Σ; si scelga poi una retta r, in posizione generica, od arbitria e su di essa si

([11]) Per la teoria dei sistemi di equazioni di PFAFF, *in involuzione* si veda: E. CARTAN, *Les sistèmes différentiels extérieurs et leurs applications géometriques*, Parigi, 1945.

([12]) Si può, a questo proposito, porre il problema se sia questa la sola classe di trasformazioni proiettivamente deformabili che dipendono da una funzione arbitraria di due variabili (cioè la classe più ampia), come sembrerebbe in base agli esempi che si conoscono finora.

scelgano quattro punti distinti O_1, O_2, O_1', O_2'. Proiettando i punti di Σ da O_1, O_2 su due piani π_1, π_2 rispettivamente si ottiene una prima trasformazione T ([13]) e proiettando similmente i punti di Σ da O_1', O_2' su due piani π_1', π_2' si ottiene un'altra trasformazione T'. Si vede subito che T e T' sono proiettivamente applicabili; attualmente U_1, U_2 sono due trasformazioni dello stesso tipo che T e T'. Si vede di più che, fissata la T (e perciò basta fissare i punti O_1, O_2), la T' sopra indicata dipende da due costanti arbitrarie (quelle che servono a fissare O_1', O_2' su r). Abbiamo così esempi di trasformazioni proiettivamente deformabili T che sono applicabili ad almeno ∞^2 altre trasformazioni. A questo proposito voglio ora menzionare alcuni dei risultati ottenuti da G. VAONA ai quali ho accennato nel n. 1 ([14]). Occupandosi del problema della determinazione di trasformazioni che posseggono in uno stesso piano un dato tritessuto $\mathcal{C}$ di curve caratteristiche, il VAONA ha stabilito fra l'altro che: *Sia* $\mathcal{C}$ *un tritessuto di curve in un piano* π_1, *le quali curve siano caratteristiche per* ∞^m *trasformazioni allora*:

(a) *se* $\mathrm{m} = 4$, $\mathcal{C}$ *è un tritessuto di rette a configurazione esagonale*;

(b) m *non può mai essere uguale a* 3;

(c) *esistono invece tritessuti* $\mathcal{C}$ *per i quali* $\mathrm{m} = 2$.

Sia ora T una trasformazione proiettivamente deformabile fra due piani π_1, π_2, il cui tritessuto $\mathcal{C}$ di curve caratteristiche in π_1 sia quindi tale per ∞^m trasformazioni U. Ogni coppia di trasformazioni U dà luogo, nel modo indicato nel n. 2, ad una trasformazione T' proiettivamente applicabile a T. Pertanto se le trasformazioni T' dipendono da n costanti arbitrari si avrà $n \leq 2m$. Ma, tenendo conto dei risultati del VAONA sopra ricordati, si ha che:

(*a*) se $m = 4$, T ha i tritessuti di curve caratteristiche in π_1, π_2 formati di rette e a configurazione esagonale, T' è qualsivoglia trasformazione avente anch'essa i tritessuti caratteristici formati di rette e a configurazione esagonale; poichè queste trasformazioni dipendono da 5 costanti arbitrarie, si ha ora $n = 5$;

(*b*) poichè non si ha mai $m = 3$, non può mai essere $n = 6$. Si conclude che $n \leq 5$ e che il massimo 5 è raggiunto solo per le trasformazioni le cui curve caratteristiche sono rette formanti tritessuti a configurazione esagonale.

([13]) Si veda per queste trasformazioni: M. VILLA - G. VAONA, *Alcune osservazioni sulle curve caratteristiche delle trasformazioni cremoniane*, « Boll. U. M. I. », (3) 5, 101-107 (1950); G. VAONA, *Sulle trasformazioni puntuali fra piani aventi due reti asintotiche di curve caratteristiche corrispondenti*, « Boll. U M. I. », (3) 7, 148-154 (1952).

([14]) Cfr. l'op. cit. in ([4]).