Gheorghe Vranceanu

Trasformazioni puntuali tra spazi affini o proiettivi e spazi a connessione affine eulcidea.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.2, p. 145–153.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_2_145_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1957.

Trasformazioni puntuali tra spazi affini o proiettivi e spazi a connessione affine euclidea.

Nota di GHEORGHE VRANCEANU (a Bucarest)

Sunto. - *L'A. si trattiene sopra un legame esistente tra la teoria delle trasformazioni puntuali (fra spazi affini o proiettivi) e la teoria degli spazi a connessione affine o proiettiva localmente euclidea.*

Summary - *Anthor dwells upon a link existing between the theory of point-trasformations (of affine or projective spaces) and the theory of affinely or projectively locally euclidean connected spaces.*

Nel numero di Dicembre 1956 di questo Bollettino è stata pubblicata una Nota di M. VILLA « Ricerche di geometria differenziale in Romania » nella quale partendo da una relazione che si è tenuta al IV Congresso dei Matematici Romeni, viene dato uno sguardo alle ricerche di geometria differenziale svolte in Romania, mettendo in risalto i legami che queste ricerche hanno avuto in passato con le ricerche di geometria differenziale in Italia e soprattutto coi lavori di T. LEVI-CIVITA. Alla fine della Nota ci si augura che i legami tra le ricerche matematiche italiane e romene continuino.

Volendo rispondere a questo desiderio, io mi tratterrò qui sopra un legame che esiste tra due direzioni di ricerche e cioè la teoria delle trasformazioni puntuali tra spazi affini o proiettivi, che si è sviluppata in Italia per opera di vari geometri e soprattutto di M. VILLA e dei suoi allievi e la teoria degli spazi a connessione affine o proiettiva localmente euclidea, dei quali io ed i miei allievi ci siamo occupati negli ultimi anni.

1. È ben noto che nel 1917 LEVI-CIVITA scoprì la nozione di parallelismo negli spazi di RIEMANN, scoperta che ha avuto una grande eco nel mondo dei geometri. Partendo da questa nozione H. WEYL nel 1918 ed ELIE CARTAN nel 1922 considerarono gli spazi a connessione affine, a connessione proiettiva od a connessione conforme.

Uno spazio $A_n(x^1, x^2, ..., x^n)$ si dice a connessione affine se esistono nello spazio n^3 funzioni Γ_{jk}^i delle variabili $x^1, x^2, ..., x^n$, le quali per una trasformazione di variabili

$$x'^i = x'^i(x^1, ..., x^n) \tag{1}$$

si cambiano secondo le formule (¹)

$$\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} = \Gamma'^i_{rs} \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} - \Gamma^s_{jk} \frac{\partial x'^i}{\partial x^s}. \tag{2}$$

Ad uno spazio A_n si associano due tensori, il tensore di torsione T^i_{jk} ed il tensore di curvatura Γ^i_{jkl} e lo spazio A_n si dice localmente euclideo od anche spazio a connessione affine euclidea, se questi due tensori sono nulli, dunque se abbiamo le equazioni

$$\begin{aligned} T^i_{jk} &= \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} = 0 \\ \Gamma^i_{jkl} &= \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{sk}\Gamma^s_{jl} - \Gamma^i_{sl}\Gamma^s_{jk} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

È questo il caso che noi consideriamo in seguito. In questo caso esiste un sistema di variabili x'^i, che noi denoteremo con u^i, nelle quali i coefficienti Γ'^i_{rs} della connessione sono nulli, e perciò le u^i come funzioni delle variabili x^i, soddisfano al sistema

$$\frac{\partial^2 u^i}{\partial x^j \partial x^k} + \Gamma^s_{jk} \frac{\partial u^i}{\partial x^s} = 0. \tag{4}$$

Le u^i sono coordinate cartesiane dello spazio A_n a connessione affine euclidea, mentre le x^i sono coordinate curvilinee.

Inversamente, dato un sistema (4) con Γ^i_{jk} certe funzioni delle x^i, se questo sistema è completamente integrabile e cioè ammette n soluzioni

$$u^i = u^i\,(x^1, \ldots, x^n) \tag{5}$$

indipendenti, vale a dire a determinante funzionale non nullo, lo spazio A_n avente la connessione Γ^i_{jk}, è localmente euclideo.

Ne risulta dunque il teorema:

A qualunque spazio $A_n(x^1, \ldots, x^n)$ *a connessione affine euclidea* Γ^i_{jk}, *corrisponde una trasformazione puntuale* (5) *ed inversamente.*

Interpretiamo adesso A_n come uno spazio affine euclideo, le variabili $x^1, \ldots, x^n$ siano cioè considerate determinate a meno di una affinità. Interpretiamo altresì $u^1, \ldots, u^n$ come coordinate di uno spazio affine euclideo $E_n(u^1, \ldots, u^n)$. Ne risulta allora che data una trasformazione puntuale (5) tra i due spazi affini $A_n(x^1, \ldots, x^n)$ e $E_n(u^1, \ldots, u^n)$, si associa a questa trasformazione una connessione

(¹) Si avverta che altri autori prendono le Γ_{jk}^i con segno cambiato. Il segno preso da noi coincide in un sistema di congruenze ortogonali, con quello dei coefficienti di rotazione di RICCI.

affine euclidea Γ^i_{jk} definita dalle formule (4). Questa connessione definisce nello spazio euclideo $A_n(x^1, \dots, x^n)$ un sistema di curve (C), le curve auto-parallele della connessione, date dalle equazioni

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt}. \tag{6}$$

Queste curve (C) corrispondono per la trasformazione (5) a delle rette dello spazio affine E_n e sono caratterizzate da queste proprietà.

In modo analogo possiamo considerare nello spazio euclideo $E_n(u^1, \dots, u^n)$, la famiglia di curve $(\bar{C})$ che corrispondono a delle rette dello spazio $A_n(x^1, \dots, x^n)$. Indicando con $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ le funzioni delle variabili u, che definiscono in E_n le curve $(\bar{C})$, dobbiamo avere in virtù delle formule (2)

$$\frac{\partial^2 u^i}{\partial x^j \partial x^k} = \bar{\Gamma}^i_{rs} \frac{\partial u^r}{\partial x^j} \frac{\partial u^s}{\partial x^k}. \tag{7}$$

Tenendo conto di queste formule nelle (4), ne risultano le formule che legano le due connessioni

$$\bar{\Gamma}^i_{rs} \frac{\partial u^r}{\partial x^j} \frac{\partial u^s}{\partial x^k} = - \Gamma^s_{jk} \frac{\partial u^i}{\partial x^s}. \tag{8}$$

Queste formule ci dicono che interpretando Γ^i_{jk} come le componenti di un tensore controvariante in i e covariante in j, k, le quantità $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ sono in E_n le componenti del tensore $-\Gamma^i_{jk}$. Possiamo dire che le due connessioni Γ^i_{jk} e $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ sono una l'inversa dell'altra, tenendo conto del fatto che $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ può essere legata alla trasformazione inversa della trasformazione (5).

Alle proprietà della connessione euclidea Γ^i_{jk} o $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ corrispondono proprietà della trasformazione puntuale tra gli spazi euclidei A_n e E_n e inversamente. Per questo, consideriamo in primo luogo la connessione contratta

$$\Gamma_k = \Gamma^i_{ik}. \tag{9}$$

Si trovano facilmente tenendo conto delle equazioni (3) e (4), le formule

$$\Gamma_k = - \frac{\partial \log \Delta}{\partial x^k} \tag{9'}$$

dove Δ è il determinante funzionale della trasformazione (5) [2].

[2] G. Vranceanu, *Lecţii de geometrie diferenţială*, Bucureşti, 1951, p. 353.

Ne risulta il teorema:

La connessione contratta Γ_k *è nulla se il determinante funzionale della trasformazione* (5) *è costante ed inversamente.*

Consideriamo altresì le quantità

$$\Gamma_{kl} = \Gamma^s_{kp} \Gamma^p_{ls} .$$

Queste quantità sono simmetriche negli indici k, l e costituiscono un tensore quadratico rispetto alle trasformazioni (5), come risulta dalle (8). Esse costituiscono altresì un tensore quadratico rispetto alle trasformazioni affini delle variabili x^i, come ci fanno vedere le formule (2).

Abbiamo dunque il teorema:

La forma quadratica

$$\Phi = \Gamma_{kl} dx^k dx^l$$

è un invariante della trasformazione puntuale (5) *tra gli spazi affini* A_n *e* E_n.

Ne risulta che nel caso generale in cui questa forma quadratica è non degenere, si associa al nostro problema una geometria di Riemann.

Prima di considerare il caso delle trasformazioni tra spazi proiettivi vogliamo indicare qui un risultato, che è stato per me il punto di partenza nello studio degli spazi a connessione affine euclidea. Supponiamo che le Γ^i_{jk} siano delle funzioni intere, dunque della serie in $x^1, \ldots, x^n$ convergenti in tutto lo spazio.

In questo caso si può mostrare che le funzioni u^i date dalle formule (4) sono altresì funzioni intere: dunque ad un punto di A_n corrisponde un solo punto di E_n, ma può darsi che ad un punto di E_n non corrisponda nessun punto di A_n o che corrisponda più di un punto.

Si pone in modo naturale il problema di sapere quando la trasformazione è topologica, ossia fa corrispondere a qualunque punto di A_n un punto di E_n ed inversamente. A questo riguardo ho dimostrato il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè la corrispondenza tra gli spazi affini A_n *e* E_n *sia topologica è che a qualunque curva del sistema* (C) *di* A_n *corrisponda una intiera retta di* E_n.

Nel caso in cui la connessione affine è costante, la condizione necessaria e sufficiente perchè questo avvenga, è data da me per $n = 2$ e per $n > 2$ dal mio allievo P. Mocanu e consiste nel fatto che le Γ_k siano nulle, ossia che il determinante funzionale delle (5) sia una costante. Abbiamo così il teorema:

Se la connessione Γ^i_{jk} euclidea è costante, condizione necessaria e sufficiente perchè le (5) *rappresentino una trasformazione topologica tra A_n e E_n è che il determinante funzionale Δ sia una costante.*

D'altra parte risulta altresì che in questo caso la trasformazione (5) è una trasformazione cremoniana intera [3].

2. Passiamo adesso alle proprietà proiettive e cioè al caso in cui supponiamo che nei due spazi $A_n(x^1, \dots, x^n)$ e $E_n(u^1, \dots, u^n)$ le coordinate $x^1, \dots, x^n$ e $u^1, \dots, u^n$ sono determinate salvo una trasformazione proiettiva. È ben noto che essendo data una connessione affine Γ^i_{jk}, allora per una trasformazione di connessione

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \varphi_j \tag{10}$$

dove φ_j sono le componenti di un vettore, le curve auto-parallele della connessione restano invarianti. Facciamo in questa formula $i = j$ e sommiamo. Abbiamo

$$\bar{\Gamma}_k = \Gamma_k + (n+1)\varphi_k$$

così che eliminando le φ_k delle formule (10) abbiamo

$$\bar{\Pi}^i_{jk} = \Pi^i_{jk} \tag{11}$$

dove si è posto

$$\Pi^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \delta^i_j \frac{\Gamma_k}{n+1} - \delta^i_k \frac{\Gamma_j}{n+1} \tag{11'}$$

e le $\bar{\Pi}^i_{jk}$ sono date da una formula analoga. Ne risulta dunque che le Π^i_{jk} sono invarianti per una trasformazione proiettiva di connessione. Le quantità Π^i_{jk} introdotte da T. Y. Thomas, si chiamano componenti della connessione proiettiva dello spazio A_n e cambiano per una trasformazione di variabili secondo le formule

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} = \Pi'^i_{rs} \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} + \frac{1}{n+1} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial \log \Delta}{\partial x^l} + \\ + \frac{1}{n+1} \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} \frac{\partial \log \Delta}{\partial x^k} - \Pi^s_{jk} \frac{\partial x'^i}{\partial x^s} \end{aligned} \tag{12}$$

(3) Una bibliografia si trova nel mio libro, *Leçons de géométrie différentielle*, II volume, Bucarest, 1957.

dove Δ è il determinante funzionale della trasformazione (1). Ora, possiamo osservare che per una trasformazione (1) che è una trasformazione proiettiva, abbiamo le formule di BORTOLOTTI

$$\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{1}{n+1} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial \log \Delta}{\partial x^j} + \frac{1}{n+1} \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \frac{\partial \log \Delta}{\partial x^k} \tag{13}$$

e perciò le formule (12) diventano

$$\Pi'^i_{rs} \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} = \Pi^s_{jk} \frac{\partial x'^i}{\partial x^s}. \tag{13'}$$

Possiamo così enunciare il teorema:

Le componenti Π^i_{jk} *sono, rispetto ad una trasformazione proiettiva di variabili nello spazio proiettivo* $A_n(x^1, \ldots, x^n)$, *le componenti di un tensore, controvariante nell'indice* i *e covariante negli indici* j, k.

Possiamo altresì osservare che tenendo conto delle formule (11′) il vettore contratto del tensore Π^i_{jk} è nullo e perciò lo studio degli invarianti proiettivi di una trasformazione tra due spazi proiettivi si riduce allo studio di un tensore Π^i_{jk} il cui vettore contratto è nullo.

Consideriamo allora il tensore quadratico che si può associare al tensore Π^i_{jk}. Abbiamo

$$\Pi_{jk} = \Pi^s_{jl} \Pi^l_{ks} \tag{14}$$

il tensore Π_{jk} essendo evidentemente simmetrico. Possiamo dunque associare ad una trasformazione tra due spazi proiettivi una forma quadratica

$$\psi = \Pi_{jk} dx^j dx^k. \tag{15}$$

Questa forma è evidentemente un invariante rispetto alle trasformazioni proiettive in A_n a causa delle formule (13′). Questa forma è altresì un invariante rispetto alle trasformazione (5) tra i due spazi A_n e E_n a causa delle formule (8) e perciò essa è altresì invariante rispetto ad una trasformazione proiettiva in E_n. Abbiamo così il teorema:

Ad una trasformazione puntuale tra due spazi proiettivi possiamo sempre associare una forma quadratica invariante (15).

Evidentemente le proprietà della trasformazione dipendono in grande misura dalla forma ψ, come andiamo a vedere per $n=2$ e cioè nel caso dei piani proiettivi. In questo caso le formule (11′)

ci danno

$$
(16)\qquad \begin{aligned} \Pi^1_{22} &= \Gamma^1_{22}, & \Pi^1_{12} &= \frac{2\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22}}{3} \\ \Pi^2_{11} &= \Gamma^2_{11}, & \Pi^2_{21} &= \frac{2\Gamma^2_{21} - \Gamma^1_{11}}{3}. \end{aligned}
$$

Quanto alle componenti Π^1_{11}, Π^2_{22} della connessione proiettiva esse sono date dalle formule

$$
(16')\qquad \Pi^1_{11} + \Pi^2_{21} = 0, \qquad \Pi^1_{12} + \Pi^2_{22} = 0
$$

che ci dicono che la connessione contratta Π_l è nulla.

Consideriamo adesso le curve auto-parallele (6) per $n = 2$. Ponendo per semplicità $x^1 = x$, $x^2 = y$ e prendendo come parametro x in luogo di t queste equazioni si riducono come è ben noto ad una sola equazione che si scrive

$$
(17)\qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\Pi^1_{22}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 3\Pi^1_{12}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3\Pi^2_{21}\frac{dy}{dx} + \Pi^2_{11}
$$

dove le Π sono date dalle formule (16). Questa equazione ci dice che in qualunque punto $P(x, y)$ esistono direzioni $\frac{dy}{dx}$ che hanno la proprietà che la curva corrispondente abbia la derivata seconda $\frac{d^2y}{dx^2}$ nulla, ossia che la curva abbia in P un flesso. Queste direzioni inflessionali si chiamano anche direzioni caratteristiche e sono definite dunque dalla equazione

$$
(18)\qquad -\Pi^1_{22}dy^3 - 3\Pi^1_{12}dy^2dx + 3\Pi^2_{21}dydx^2 + \Pi^2_{11}dx^3 = 0.
$$

La corrispondenza

$$
(19)\qquad u = u(x, y), \qquad v = v(x, y)
$$

tra i piani proiettivi $A_2(x, y)$ e $E_2(x, y)$ si dice secondo O. BORŮVKA, di prima specie se le direzioni definite dalla equazione (18) sono tutte distinte, di seconda specie se sono due distinte e di terza specie se una sola è distinta ([4]). Evidentemente abbiamo anche il caso particolare, quando queste direzioni sono indeterminate, e cioè quando le componenti Π^i_{jk} sono tutte nulle, quando la corrispondenza (19) è una corrispondenza proiettiva.

([4]) La classificazione delle trasformazioni puntuali fra piani o spazi lineari è stata ripresa da M. VILLA, G. VAONA e L. MURACCHINI. Vedasi: *Pubblicazioni dell'Istituto di Geometria dell'Università di Bologna* (particolarmente i numeri 38, 48, 50).

Ora il fatto che l'equazione (18) possiede tre soluzioni distinte equivale al fatto che il discriminante

$$D = 4[(\Pi^2_{21})^2 + \Pi^1_{12}\Pi^2_{11}][(\Pi^1_{12})^2 + \Pi^1_{22}\Pi^2_{21}] - (\Pi^1_{12}\Pi^2_{21} - \Pi^1_{22}\Pi^2_{11})^2 \tag{20}$$

non è nullo. Tenendo conto delle formule (14) e delle formule (16′), ne risulta

$$\begin{aligned} \Pi_{11} &= 2[(\Pi^2_{21})^2 + \Pi^1_{12}\Pi^2_{11}] \\ \Pi_{22} &= 2[(\Pi^1_{12})^2 + \Pi^2_{21}\Pi^1_{22}] \\ \Pi_{12} &= \Pi^1_{12}\Pi^2_{21} - \Pi^1_{22}\Pi^2_{11} \end{aligned} \tag{21}$$

e perciò D è nello stesso tempo il discriminante della forma quadratica (15), la quale nel caso dei piani proiettivi A_2 e E_2 si scrive

$$\psi = \Pi_{11}(dx)^2 + 2\Pi_{12}dxdy + \Pi_{22}dy^2. \tag{22}$$

Possiamo dunque dire che una trasformazione tra i piani A_2 e E_2 è di prima specie se questa forma ψ è non degenere ed inversamente.

Supponiamo adesso che la trasformazione (19) sia di terza specie e che $\Pi^1_{22} \neq 0$. In questo caso possiamo scrivere il primo membro della formula (18) sotto la forma

$$\Pi^1_{22}(dy + \alpha dx)^3$$

dove α e una certa funzione delle variabili x, y. Abbiamo dunque le formule

$$\Pi^1_{12} = \alpha\Pi^1_{22}, \quad \Pi^2_{21} = -\Pi^1_{22}\alpha^2, \quad \Pi^2_{11} = -\Pi^1_{22}\alpha^3. \tag{23}$$

Tenendo conto di queste formule, dalle formule (21) risultano le equazioni

$$\Pi_{11} = \Pi_{22} = \Pi_{12} = 0 \tag{24}$$

dunque la forma quadratica (22) è identicamente nulla. La reciproca è anche vera. Infatti possiamo sempre prendere $\Pi^1_{12} = \alpha\Pi^1_{22}$ se Π^1_{22} non è nullo e allora le equazioni (24) ci dicono che le (23) sono verificate. Se $\Pi^1_{22} = 0$ dobbiamo avere nel caso della terza specie anche $\Pi^1_{12} = \Pi^2_{21} = 0$ e le (24) sono ancora verificate ed inversamente.

Abbiamo dunque il teorema:

Una corrispondenza tra due piani proiettivi $A_2(x, y)$ *e* $E_2(u, v)$ *che non è una proiettività, è di prima specie, di seconda specie o di terza specie secondo che la forma quadratica* (22) *è non degenere, degenere o identicamente nulla.*

Vogliamo adesso osservare che nel caso di una trasformazione di prima specie, si può associare al problema uno spazio V_2 di

RIEMANN a metrica definita positiva, se tutte le direzioni caratteristiche sono reali. Le proprietà dello spazio V_2 ci dànno delle proprietà della corrispondenza e sarebbe interessante di sapere, per esempio, quali sono le corrispondenze per cui lo spazio V_2 è euclideo o a curvatura costante non nulla.

3. Per il caso generale $n \geq 2$, osserviamo che se nelle seconde formule (3) poniamo $i = l$ e sommiamo, si ottengono, tenendo conto delle (9'), le formule

$$\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial x^j \partial x^k} + \Gamma_{jk} + \frac{\partial \log \Delta}{\partial x^s} \Gamma^s_{jk} = 0 \tag{25}$$

variabili qualunque sia n, così che per una corrispondenza a determinante costante abbiamo le formule

$$\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^i} + \Gamma_{jk} = 0.$$

Ne risulta che nel caso di una connessione costante che conduce ad una trasformazione topologica tra gli spazi A_n e E_n, il tensore $\Gamma_{jk} = \Pi_{jk}$ è nullo, dunque la forma ψ è identicamente nulla.

Supponiamo adesso che il determinante Δ non sia costante. Possiamo allora far apparire nelle formule (24) la connessione proiettiva. Tenendo conto delle (11') e delle (9') si trovano senza difficoltà le formule

$$\frac{\partial \Pi^i_{jk}}{\partial x^i} + \frac{n-1}{n+1} \Pi^s_{jk} \frac{\partial \log \Delta}{\partial x^s} + \frac{n-1}{n+1} \frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial x^j \partial x^k} - \tag{26}$$
$$- \frac{n-1}{(n+1)^2} \frac{\partial \log \Delta}{\partial x^j} \frac{\partial \log \Delta}{\partial x^k} + \Pi_{jk} = 0.$$

Per $n = 2$ queste formule sono equivalenti alle formule (3).

Per terminare vogliamo dire che tra i risultati ottenuti dai miei allievi fuori del caso delle connessioni euclidee a componenti costanti delle quali abbiamo parlato più sopra, posso citare T. POSTELNICU che ha determinato tutte le connessioni euclidee A_2 le cui componenti sono funzioni lineari e le trasformazioni puntuali corrispondenti e poi GEORGE G. VRANCEANU che ha determinato tutte le connessioni euclidee A_2 di terza specie a connessione contratta nulla e cioè le trasformazioni puntuali di terza specie a determinante costante, e ha mostrato che le loro curve caratteristiche sono rette.