Bollettino
Unione Matematica Italiana

Pia Nalli

Calcolo tensoriale ed operazioni funzionali. II.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.2, p. 131–144.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_2_131_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1957.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Calcolo tensoriale ed operazioni funzionali.

Nota II di PIA NALLI (a Catania)

Sunto. - *Dopo una Nota I pubblicata su questo Bollettino, Serie III, Giugno 1956, Anno XI, Num. 2 (pagg. 117-122) col medesimo titolo della presente, si porta un secondo contributo alla analogia fra una particolare legge tensoriale ed una particolare operazione funzionale lineare.*

Le due note si riallacciano ad una precedente, pure pubblicata su questo Bollettino, Giugno 1955, Serie III, Anno X, Num. 2 (pagg. 135-146) col titolo: Equazioni indipendenti dalla scelta delle variabili e caratterizzazione di varietà metriche.

T_{ij}^h è un tensore covariante rispetto ad i ed j e controvariante rispetto ad h.

Per un cambiamento di variabili, dalle x_i alle $\bar{x}_i$, c'è la legge di trasformazione:

$$\bar{T}_{rs}^p = T_{ij}^h \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_s} \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_h} \tag{1}$$

dove la somma al secondo membro è estesa a tutti i valori i, j, $h = 1, 2, \ldots, n$.

Questa somma si può scindere in quattro somme

$$\begin{aligned} &T_{ii}^i \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_s} \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_i}; \qquad T_{ij}^j \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_s} \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_j}; \\ &T_{ji}^j \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_s} \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_j}; \qquad T_{ij}^h \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_s} \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_h}, \end{aligned} \tag{2}$$

la prima somma è estesa a tutti i valori di i 1, 2, ..., n, la seconda e la terza a tutte le coppie i, j con $i \neq j$, la quarta a tutte le terne i, j, h in cui h è diverso da i ed j, potendo anche questi due ultimi coincidere.

La seconda somma si può scrivere così:

$$(2_2) \qquad \left(T^j_{ij} - \frac{1}{2} T^i_{ii}\right) \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_s} \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_j} + \frac{1}{2} T^i_{ii} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_s} \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_j},$$

intendendo in tal modo la somma di due somme per eseguire le quali bisogna fissare i fra i valori $1, 2, \ldots, n$, sommare per tutti i valori j diversi da i e poi sommare rispetto ad i da 1 ad n.

La seconda parte di questa (2_2) è uguale quindi a

$$\frac{1}{2} \sum_1^n {}_i \, T^i_{ii} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r} \sum_{j \neq i} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_s} \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_j}.$$

Ma

$$\sum_{j \neq i} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_s} \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_j} = \sum_1^n {}_j \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_s} \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_j} - \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_s} \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_i} = \delta^p_s - \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_s} \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_i}$$

e perciò la seconda parte della (2_2) si riduce a

$$\frac{1}{2} \delta^p_s T^i_{ii} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r} - \frac{1}{2} T^i_{ii} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_s} \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_i}.$$

ed infine la seconda delle somme (2) coincide con

$$\left(T^j_{ij} - \frac{1}{2} T^i_{ii}\right) \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_s} \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_j} + \frac{1}{2} T^i_{ii} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r} \left(\delta^p_s - \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_s} \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_i}\right)$$

dove la prima parte si deve intendere come una somma estesa a tutte le coppie di numeri diversi i, j e la seconda come una somma semplice estesa ai valori di i $1, 2, \ldots, n$.

Analogamente, la terza delle somme (2) si scrive

$$\left(T^j_{ji} - \frac{1}{2} T^i_{ii}\right) \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_s} \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_j} + \frac{1}{2} T^i_{ii} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_s} \left(\delta^p_r - \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_i}\right).$$

Tenendo conto di questi risultati, la formula di trasformazione (1) diventa

$$(1') \qquad \begin{aligned} \bar{T}^p_{rs} = {} & \left(T^j_{ij} - \frac{1}{2} T^i_{ii}\right) \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_s} \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_j} + \left(T^j_{ji} - \frac{1}{2} T^i_{ii}\right) \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_s} \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_j} + \\ & \frac{1}{2} \delta^p_s T^i_{ii} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r} + \frac{1}{2} \delta^p_r T^i_{ii} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_s} + T^h_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_s} \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_h}. \end{aligned}$$

Nel secondo membro figurano cinque somme; le prime due sono da intendere estese a tutte le coppie i, j di numeri diversi, le due successive a tutti i valori di i da 1 ad n e l'ultima a tutte le terne i, j, h con h diverso sia da i che da j.

In particolare

$$(1'_1)\qquad \overline{T}^r_{rr} = \left(T^j_{ij} - \frac{1}{2}\,T^i_{ii}\right)\frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_r}\,\frac{\partial x_j}{\partial \overline{x}_r}\,\frac{\partial \overline{x}_r}{\partial x_j} + \left(T^j_{ji} - \frac{1}{2}\,T^i_{ii}\right)\frac{\partial x_j}{\partial \overline{x}_r}\,\frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_r}\,\frac{\partial \overline{x}_r}{\partial x_j} + T^i_{ii}\frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_r} + T^h_{ij}\frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_r}\,\frac{\partial x_j}{\partial \overline{x}_r}\,\frac{\partial \overline{x}_r}{\partial x_h}$$

e se $r \neq s$

$$(1'_2)\qquad \overline{T}^s_{rs} = \left(T^j_{ij} - \frac{1}{2}\,T^i_{ii}\right)\frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_r}\,\frac{\partial x_j}{\partial \overline{x}_s}\,\frac{\partial \overline{x}_s}{\partial x_j} + \left(T^j_{ji} - \frac{1}{2}\,T^i_{ii}\right)\frac{\partial x_j}{\partial \overline{x}_r}\,\frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_s}\,\frac{\partial \overline{x}_s}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\,T^i_{ii}\frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_r} + T^h_{ij}\frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_r}\,\frac{\partial x_j}{\partial \overline{x}_s}\,\frac{\partial \overline{x}_s}{\partial x_h}.$$

Da queste due si trae:

$$(3)\qquad \begin{aligned} \overline{T}^s_{rs} - \frac{1}{2}\,\overline{T}^r_{rr} = {} & \left(T^j_{ij} - \frac{1}{2}\,T^i_{ii}\right)\frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_r}\left(\frac{\partial x_j}{\partial \overline{x}_s}\,\frac{\partial \overline{x}_s}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial x_j}{\partial \overline{x}_r}\,\frac{\partial \overline{x}_r}{\partial x_j}\right) + \\ & \left(T^j_{ji} - \frac{1}{2}\,T^i_{ii}\right)\frac{\partial x_j}{\partial \overline{x}_r}\left(\frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_s}\,\frac{\partial \overline{x}_s}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_r}\,\frac{\partial \overline{x}_r}{\partial x_j}\right) + \\ & T^h_{ij}\frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_r}\left(\frac{\partial x_j}{\partial \overline{x}_s}\,\frac{\partial \overline{x}_s}{\partial x_h} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial x_j}{\partial \overline{x}_r}\,\frac{\partial \overline{x}_r}{\partial x_h}\right). \end{aligned}$$

Analogamente:

$$(1'_3)\qquad \overline{T}^s_{sr} = \left(T^j_{ij} - \frac{1}{2}\,T^i_{ii}\right)\frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_s}\,\frac{\partial x_j}{\partial \overline{x}_r}\,\frac{\partial \overline{x}_s}{\partial x_j} + \left(T^j_{ji} - \frac{1}{2}\,T^i_{ii}\right)\frac{\partial x_j}{\partial \overline{x}_s}\,\frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_r}\,\frac{\partial \overline{x}_s}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\,T^i_{ii}\frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_r} + T^h_{ij}\frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_s}\,\frac{\partial x_j}{\partial \overline{x}_r}\,\frac{\partial \overline{x}_s}{\partial x_h}$$

e perciò

$$(4)\qquad \begin{aligned} \overline{T}^s_{sr} - \frac{1}{2}\,\overline{T}^r_{rr} = {} & \left(T^j_{ij} - \frac{1}{2}\,T^i_{ii}\right)\frac{\partial x_j}{\partial \overline{x}_r}\left(\frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_s}\,\frac{\partial \overline{x}_s}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_r}\,\frac{\partial \overline{x}_r}{\partial x_j}\right) + \\ & \left(T^j_{ji} - \frac{1}{2}\,T^i_{ii}\right)\frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_r}\left(\frac{\partial x_j}{\partial \overline{x}_s}\,\frac{\partial \overline{x}_s}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial x_j}{\partial \overline{x}_r}\,\frac{\partial \overline{x}_r}{\partial x_j}\right) + T^h_{ij}\frac{\partial x_j}{\partial \overline{x}_r}\left(\frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_s}\,\frac{\partial \overline{x}_s}{\partial x_h} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_r}\,\frac{\partial \overline{x}_r}{\partial x_h}\right). \end{aligned}$$

Finalmente dalla (1') se p è diverso sia da r che da s

$$(5)\qquad \overline{T}^p_{rs} = \left(T^j_{ij} - \frac{1}{2}\,T^i_{ii}\right)\frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_r}\,\frac{\partial x_j}{\partial \overline{x}_s}\,\frac{\partial \overline{x}_p}{\partial x_j} + \left(T^j_{ji} - \frac{1}{2}\,T^i_{ii}\right)\frac{\partial x_j}{\partial \overline{x}_r}\,\frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_s}\,\frac{\partial \overline{x}_p}{\partial x_j} + T^h_{ij}\frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_r}\,\frac{\partial x_j}{\partial \overline{x}_s}\,\frac{\partial \overline{x}_p}{\partial x_h}.$$

In tal modo, posto $H(i, j) = T^j_{ij} - \frac{1}{2} T^i_{ii}$, $K(i, j) = T^j_{ji} - \frac{1}{2} T^i_{ii}$, $N(i, j, h) = T^h_{ij}$, si hanno tre sistemi, i primi due doppi ed il secondo triplo. Nei primi due intervengono tutte le coppie i, j di numeri diversi e nel terzo tutte le terne i, j, h dove h è diverso sia da i che da j. Ciascuno dei primi due sistemi ha $n(n-1)$ elementi, il terzo ne ha $n(n-1)^2$.

Per un cambiamento di variabili i detti sistemi si trasformano in $\overline{H}(r, s)$, $\overline{K}(r, s)$, $\overline{N}(r, s, p)$ secondo la legge seguente

$$\overline{H}(r, s) = H(i, j) \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r} \left(\frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_s} \frac{\partial \bar{x}_s}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial \bar{x}_r}{\partial x_j} \right) + \tag{6}$$

$$K(i, j) \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_r} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_s} \frac{\partial \bar{x}_s}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial \bar{x}_r}{\partial x_j} \right) + N(i, j, h) \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r} \left(\frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_s} \frac{\partial \bar{x}_s}{\partial x_h} - \frac{1}{2} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial \bar{x}_r}{\partial x_h} \right)$$

$$\overline{K}(r, s) = H(i, j) \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_r} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_s} \frac{\partial \bar{x}_s}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial \bar{x}_r}{\partial x_j} \right) + \tag{7}$$

$$K(i, j) \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r} \left(\frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_s} \frac{\partial \bar{x}_s}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial \bar{x}_r}{\partial x_j} \right) + N(i, j, h) \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_r} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_s} \frac{\partial \bar{x}_s}{\partial x_h} - \frac{1}{2} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial \bar{x}_r}{\partial x_h} \right)$$

$$\begin{aligned} \overline{N}(r, s, p) = H(i, j) \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_s} \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_j} + K(i, j) \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_s} \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_j} + \\ N(i, j, h) \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_s} \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_h}. \end{aligned} \tag{8}$$

Da ciò discende che, quando i tre sistemi sono nulli per certe variabili, essi lo sono qualunque siano le variabili.

Se ciò accade, risulta

$$\overline{T}^r_{rr} = T^i_{ii} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r}$$

e perciò, posto

$$V_i = T^i_{ii}, \quad \overline{V}_i = \overline{T}^i_{ii},$$

il sistema semplice V_i è quello delle componenti covarianti di un vettore.

Inversamente: se V_i sono le componenti covarianti di un vettore, posto

$$T^i_{ii} = V_i, \quad T^j_{ij} = T^j_{ji} = \frac{1}{2} V_i \, (i \neq j),$$

$$T^h_{ij} = 0 \, (h \neq i, \; h \neq j)$$

il sistema T^h_{ij} che in tal modo viene definito per tutte le terne i, j, h e trasformato col cambiamento delle variabili nel sistema $\overline{T}^p_{rs}$ in cui $\overline{T}^r_{rr} = \overline{V}_r$, $\overline{T}^s_{rs} = \overline{T}^s_{sr} = \frac{1}{2}\overline{V}_r (r \neq s)$, $\overline{T}^p_{rs} = 0 (p \neq r, p \neq s)$ è un tensore triplo, covariante rispetto ad i ed j e simmetrico rispetto a questi due indici, e controvariante rispetto ad h [1].

Siamo arrivati alla legge (6), (7), (8) partendo dalla legge (1) di trasformazione di un tensore T^h_{ij}.

Mostreremo ora che, inversamente, partendo dalle (6), (7), (8) si può arrivare alla legge tensoriale (1).

Infatti: se i sistemi $H(i, j)$, $K(i, j)$, $N(i, j, h)$ si trasformano secondo le (6), (7), (8), si fissi un sistema semplice $P(i)$ qualunque $(i = 1, 2, \ldots, n)$ e si definisca il trasformato $\overline{P}(r)$ ponendo

$$\overline{P}(r) = P(i)\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r} + [H(i, j) + K(i, j)]\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r}\frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_r}\frac{\partial \bar{x}_r}{\partial x_j} + N(i, j, h)\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_i}\frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_r}\frac{\partial \bar{x}_r}{\partial x_h}.$$

Allora il sistema triplo T^h_{ij} per il quale è

$$T^i_{ii} = P(i) \ (i = 1, 2, \ldots, n); \qquad T^j_{ij} = H(i, j) + \frac{1}{2}P(i) \ (i \neq j);$$

$$T^j_{ji} = K(i, j) + \frac{1}{2}P(i) \ (i \neq j); \quad T^h_{ij} = N(i, j, h) \ (h \neq i, h \neq j)$$

quando si fa un cambiamento di variabili si trasforma nel sistema triplo $\overline{T}^p_{rs}$ per il quale è

$$\overline{T}^r_{rr} = \overline{P}(r) \ (r = 1, 2, \ldots, n);$$

$$\overline{T}^s_{rs} = \overline{H}(r, s) + \frac{1}{2}\overline{P}(r), \quad \overline{T}^s_{sr} = \overline{K}(r, s) + \frac{1}{2}\overline{P}(r) \ (r \neq s);$$

$$\overline{T}^p_{rs} = \overline{N}(r, s, p) \ (p \neq r, p \neq s)$$

ed è un tensore triplo T^h_{ij} che si trasforma in $\overline{T}^p_{rs}$ secondo la (1).

Risulta perciò:

$$\sum_{1}^{n}{}_s \overline{T}^s_{rs} = \sum_{1}^{n}{}_i \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r} \sum_{1}^{n}{}_j T^j_{ij} \qquad \text{e} \qquad \sum_{1}^{n}{}_s \overline{T}^s_{sr} = \sum_{1}^{n}{}_i \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r} \sum_{1}^{n}{}_j T^j_{ji},$$

cioè i due vettori T^j_{ij} e T^j_{ji} si trasformano rispettivamente nei vettori $\overline{T}^s_{rs}$ e $\overline{T}^s_{sr}$.

[1] La Collega MARIA PASTORI mi ha fatto notare che quanto scritto dopo la (8) è ben noto e si riduce alla isotropia del tensore T^h_{ij}.

Si può osservare qui che in corrispondenza al fatto che se H è un invariante, $H\delta_i^j$ è un tensore covariante rispetto ad i e controvariante rispetto ad j, partendo, invece che da un invariante, da un vettore qualunque di componenti covarianti V_i, ponendo $T_{ii}^i = V_i$; $T_{ij}^j = T_{ji}^j = \frac{1}{2} V_i \ (i \neq j)$; $T_{ij}^h = 0 \ (h \neq i, \ h \neq j)$ il sistema triplo T_{ij}^h così definito per tutte le terne (i, j, h) è un tensore covariante rispetto ad i ed j, simmetrico rispetto a questi due indici, e controvariante rispetto ad h, il quale tensore si trasforma in $\overline{T}_{rs}^p$ essendo

$$\overline{T}_{rr}^r = \overline{V}_r \ ; \quad \overline{T}_{rs}^s = \overline{T}_{sr}^s = \frac{1}{2} \overline{V}_r \ (r \neq s) \ ; \quad \overline{T}_{rs}^p = 0 \ \ (p \neq r, \ p \neq s).$$

Passiamo ora dal discreto al continuo.

Si hanno tre funzioni $H(x, y)$, $K(x, y)$, $N(x, y, z)$. Le prime due sono definite nel quadrato $R \equiv (a, b)(a, b)$ ad eccezione dei punti della diagonale $x = y$; la terza è definita nel cubo $V \equiv (a, b)(a, b)(a, b)$ ad eccezione dei punti dei piani $z = x$ e $z = y$.

Sono assegnate tre formule di trasformazione che fanno passare dalle funzioni $H(x, y)$, $K(x, y)$, $N(x, y, z)$ a tre funzioni $\overline{H}(r, s)$, $\overline{K}(r, s)$, $\overline{N}(r, s, p)$.

Comincio con lo scrivere le prime due di tali formule:

$$\begin{aligned}\overline{H}(r, s) = & \int_R H(x, y) \left[V(x, y ; r, s) - \frac{1}{2} L(x, y ; r) \right] dxdy + \\ & \int_R K(x, y) \left[W(x, y ; r, s) - \frac{1}{2} L(x, y ; r) \right] dxdy + \\ & \int_V N(x, y, z) \left[Q(x, y, z ; r, s) - \frac{1}{2} Z(x, y, z ; r) \right] dxdydz,\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\overline{K}(r, s) = & \int_R H(x, y) \left[W(x, y ; r, s) - \frac{1}{2} L(x, y ; r) \right] dxdy + \\ & \int_R K(x, y) \left[V(x. y ; r, s) - \frac{1}{2} L(x, y ; r) \right] dxdy + \\ & \int_V N(x, y, z) \left[T(x, y, z ; r, s) - \frac{1}{2} Z(x, y, z ; r) \right] dxdydz.\end{aligned} \tag{10}$$

Delle funzioni che figurano nei secondi membri le essenziali sono le V, W, Q, T, le altre si esprimono per mezzo di esse.

Le due V e W devono soddisfare alla sola condizione

$$\int_a^b (V \quad W)\,ds = \int_a^b (V - W)\,dy\,; \tag{11}$$

per conseguenza ciascuno di questi due integrali coincide con una funzione $f(x;\,r)$ delle sole x ed r.

La funzione $L(x,\,y;\,r)$ viene definita dalla posizione

$$L(x,\,y;\,r) = -\int_a^b W(x,\,y;\,r,\,s)ds \tag{12}$$

e per conseguenza, in base alla posizione

$$\int_a^b (V - W)ds = f(x;\,r)$$

risulta

$$\int_a^b V(x,\,y;\,r,\,s)ds = f(x;\,r) - L(x,\,y;\,r).$$

Per le funzioni Q, T, Z si hanno le condizioni:

$$\int_a^b Qds = \int_a^b Tds = -\,Z$$

e la Z deve essere simmetrica rispetto ad x ed y.

È bene introdurre altre due funzioni: $g(x;\,r,\,s)$, $v(x;\,r)$, ponendo

$$g(x;\,r,\,s) = -\int_a^b W(x,\,y;\,r,\,s)dy$$

e perciò in base alla (11) ed all'eguaglianza

$$\int_a^b (V - W)dy = f(x;\,r),$$

risulta

$$\int_a^b V(x,\ y;\ r,\ s)dy = f(x;\ r) - g(x;\ r,\ s).$$

La $v(x;\ r)$ viene definita da

$$v(x;\ r) = f(x;\ r) - \int_a^b g(x;\ r,\ s)ds$$

e perciò, in base alla (12) che definisce la $L(x,\ y;\ r)$, risulta

$$\int_a^b L(x,\ y;\ r)dy = f(x;\ r) - v(x;\ r).$$

Abbiamo così scritte le prime due formule di trasformazione: passiamo ora alla terza.

Essa è:

$$\overline{N}(r,\ s,\ p) = \int_R H(x,\ y)X(x,\ y;\ r,\ s,\ p)dxdy + \tag{13}$$

$$\int_R K(x,\ y)X(x,\ y;\ s,\ r,\ p)dxdy + \int_V N(x,\ y,\ z)S(x,\ y,\ z;\ r,\ s,\ p)dxdydz,$$

e la funzione S si riproduce scambiando x con y ed r con s, cioè

$$S(x,\ y,\ z;\ r,\ s,\ p) = S(y,\ x,\ z;\ s,\ r,\ p).$$

Inoltre, posto

$$P(x;\ r,\ s,\ p) = -\int_a^b X(x,\ y;\ r,\ s,\ p)dy,$$

la $P(x;\ r,\ s,\ p)$ è simmetrica rispetto ad r ed s.

Sono queste (9), (10), (13) le formule di trasformazione delle funzioni $H(x,\ y)$, $K(x,\ y)$, $N(x,\ y,\ z)$ nelle funzioni $\overline{H}(r,\ s)$, $\overline{K}(r,\ s)$, $\overline{N}(r,\ s,\ p)$, analoghe alle (6), (7), (8).

Chiamando i, j, h le variabili che sono state chiamate x, y, z, la $W(i,\ j,;\ r,\ s)$ corrisponde a

$$\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_s}\frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_r}\frac{\partial \bar{x}_s}{\partial x_j},\ (i \neq j,\ r \neq s);$$

la $V(i, j; r, s)$ corrisponde a

$$\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r}\frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_s}\frac{\partial \bar{x}_s}{\partial x_j}, \quad (i \neq j, \ r \neq s);$$

$f(i; r)$ corrisponde a $\dfrac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r}$; $\quad L(i, j; r)$ a $\dfrac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_r}\dfrac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r}\dfrac{\partial \bar{x}_r}{\partial x_j}\,(i \neq j)$;

$g(i; r, s)$ a $\dfrac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r}\dfrac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_s}\dfrac{\partial \bar{x}_s}{\partial x_i}\,(r \neq s)$; $\quad v(i; r)$ a $\dfrac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r}\dfrac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r}\dfrac{\partial \bar{x}_r}{\partial x_i}$;

$Q(i, j, h; r, s)$ a $\dfrac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r}\dfrac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_s}\dfrac{\partial \bar{x}_s}{\partial x_h}\,(r \neq s, \ h \neq i, \ h \neq j)$;

$T(i, j, h; r, s)$ a $\dfrac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_r}\dfrac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_s}\dfrac{\partial \bar{x}_s}{\partial x_h}\,(r \neq s, \ h \neq i, \ h \neq j)$;

$Z(i, j, h; r)$ a $\dfrac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r}\dfrac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_r}\dfrac{\partial \bar{x}_r}{\partial x_h}\,(h \neq i, \ h \neq j)$;

$X(i, j; r, s, p)$ a $\dfrac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r}\dfrac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_s}\dfrac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_j}\,(i \neq j, \ p \neq r, \ p \neq s)$;

$P(i; r, s, p)$ a $\dfrac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r}\dfrac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_s}\dfrac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_i}\,(p \neq r, \ p \neq s)$;

$S(i, j, h; r, s, p)$ a $\dfrac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r}\dfrac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_s}\dfrac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_h}\,(h \neq i, \ h \neq j, \ p \neq r, \ p \neq s)$;

gli integrali che figurano nelle formule o che servono a definire funzioni, come $f(i; r)$, $L(i, j; r)$, $g(i; r, s)$, $v(i; r)$ sono corrispondenti di somme.

Abbiamo già mostrato come dalle (6), (7), (8) si può passare alle formule per la trasformazione tensoriale; analogamente dalle formule (9), (10), (13) si può passare ad una trasformazione funzionale lineare corrispondente alla tensoriale. Là abbiamo introdotto un sistema semplice $P(i)$ arbitrario del quale si definisce opportunamente il trasformato $\bar{P}(r)$. Qui bisogna introdurre una funzione arbitraria $\varphi(x)$ e definire la trasformata $\bar{\varphi}(r)$ nel seguente modo:

$$\text{(14')} \qquad \bar{\varphi}(r) = \int_a^b \varphi(x) f(x; r)\,dx + \int_R [H(x, y) + K(x, y)] L(x, y; r)\,dx\,dy + \int_V N(x, y, z) Z(x, y, z; r)\,dx\,dy\,dz.$$

Porre poi:

$$F(x, y) = H(x, y) + \frac{1}{2}\varphi(x), \qquad G(x, y) = K(x, y) + \frac{1}{2}\varphi(x)$$

ed in corrispondenza:

$$\overline{F}(r, s) = \overline{H}(r, s) + \frac{1}{2}\overline{\varphi}(r),$$

$$\overline{G}(r, s) = \overline{K}(r, s) + \frac{1}{2}\overline{\varphi}(r).$$

Ed allora si trova per le φ, F, G e le trasformate $\overline{\varphi}$, $\overline{F}$, $\overline{G}$

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}(r) = \int_a^b \varphi(x)v(x; r)dx + \int_R [F(x, y) + G(x, y)]L(x, y; r)dxdy +\\ \int_V N(x, y, z)Z(x, y, z; r)dxdydz;\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\overline{F}(r, s) = \int_a^b \varphi(x)g(x; r, s)dx + \int_R F(x, y)V(x, y; r, s)dxdy +\\ \int_R G(x, y)W(x, y; r, s)dxdy + \int_V N(x, y, z)Q(x, y, z; r, s)dxdydz;\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\overline{G}(r, s) = \int_a^b \varphi(x)g(x; r, s)dx + \int_R F(x, y)W(x, y; r, s)dxdy +\\ \int_R G(x, y)V(x, y; r, s)dxdy + \int_V N(x, y, z)T(x, y, z; r, s)dxdydz;\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\overline{N}(r, s, p) = \int_a^b \varphi(x)P(x; r, s, p)dx + \int_R F(x, y)X(x, y; r, s, p)dxdy +\\ \int_R G(x, y)X(x, y; s, r, p)dxdy + \int_V N(x, y, z)S(x, y, z; r, s, p)dxdydz.\end{aligned} \tag{17}$$

Si hanno così le quattro formule (14), (15), (16), (17) che fanno passare dalle quattro funzioni $\varphi(x)$, $F(x, y)$, $G(x, y)$, $N(x, y, z)$ alle $\overline{\varphi}(r)$, $\overline{F}(r, s)$, $\overline{G}(r, s)$, $\overline{N}(r, s, p)$ e questa trasformazione è la corrispondente della trasformazione tensoriale (1) quando nel primo membro si mettono rispettivamente

$$\overline{T}^{r}_{rr},\ \overline{T}^{s}_{rs},\ \overline{T}^{s}_{sr}\ (r \neq s),\ \overline{T}^{p}_{rs}\ (p \neq r,\ p \neq s)$$

e si tiene conto che il secondo membro della (1) è la somma delle quattro somme (2).

Sulla trasformazione funzionale lineare ottenuta è da notare che se alle funzioni $F(x, y)$ e $G(x, y)$ si aggiunge una stessa funzione $h(x)$ ed a $\varphi(x)$ si aggiunge $2h(x)$, alle funzioni $\overline{F}(r, s)$ e $\overline{G}(r, s)$ si verrà ad aggiungere una stessa funzione $\overline{h}(r)$ ed a $\overline{\varphi}(r)$ si aggiungerà $2\overline{h}(r)$, mentre la $\overline{N}(r, s, p)$ resterà inalterata. Precisamente $2\overline{h}(r)$ è ciò che diventa $\overline{\varphi}(r)$ quando è $\varphi(x) = 2h(x)$, $F(x, y) = G(x, y) = h(x)$, $N(x, y, z) = 0$, risultando in tal caso $\overline{\varphi}(r) = 2\overline{h}(r)$, $\overline{F}(r, s) = \overline{G}(r, s) = \overline{h}(r)$, $\overline{N}(r, s, p) = 0$.

Risulta ancora, come è facile verificare,

$$(18)\qquad \begin{aligned} \int_a^b \overline{F}(r, s)\,ds &= \int_a^b f(x; r)\,dx \int_a^b F(x, y)\,dy, \\ \int_a^b \overline{G}(r, s)\,ds &= \int_a^b f(x; r)\,dx \int_a^b G(x, y)\,dy. \end{aligned}$$

Queste due eguaglianze corrispondono al fatto che si presenta nel calcolo tensoriale che T^{s}_{is} e T^{s}_{si} sono le componenti covarianti A_i e B_i di due vettori e perciò

$$\overline{A}_r = A_i \frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_r},\ \ \overline{B}_r = B_i \frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_r}.$$

Accade ancora che se

$$F(x, y) = G(x, y),\quad N(x, y, z) = N(y, x, z)$$

sarà pure

$$\overline{F}(r, s) = \overline{G}(r, s),\quad \overline{N}(r, s, p) = \overline{N}(s, r, p).$$

Ciò corrisponde al fatto che se il tensore T^{h}_{ij} è simmetrico rispetto ad i, j, la simmetria si conserva per il trasformato.

Lo stesso per la emisimmetria: se $\varphi(x) = 0$, $F(x, y) = -G(x, y)$, $N(x, y, z) = -N(y, x, z)$ è egualmente $\overline{\varphi}(r) = 0$, $\overline{F}(r, s) = -\overline{G}(r, s)$, $\overline{N}(r, s, p) = -\overline{N}(s, r, p)$.

Tutte le proprietà così trovate per la trasformazione funzionale discendono dalle condizioni imposte alle funzioni V, W, L, g, f, v, Q, T, Z, X, S, P e dai legami che tra esse sussistono. Viceversa, imposte alla trasformazione tali proprietà, ne derivano per le soprascritte funzioni le condizioni e i legami ad esse imposti. Ciò dimostra che il prodotto di due trasformazioni del tipo (14), (15), (16), (17) è ancora una trasformazione del medesimo tipo, il che potrebbe del resto essere verificato per mezzo di calcoli facili ma piuttosto lunghi.

Più in generale si potrebbero studiare trasformazioni lineari da applicare a funzioni sommabili con i loro quadrati, nel senso di LEBESGUE, per mezzo delle quali assegnate quattro funzioni $\varphi(x)$, $F(x, y)$, $G(x, y)$, $N(x, y, z)$ se ne ottengono altre quattro $\bar{\varphi}(r)$, $\bar{F}(r, s)$, $\bar{G}(r, s)$, $\bar{N}(r, s, p)$ con le condizioni seguenti: che aggiungendo a $\varphi(x)$, $2h(x)$; a $F(x, y)$ $h(x)$, a $G(x, y)$, $h(x)$, le trasformate siano $\bar{\varphi}(r) + 2\bar{h}(r)$, $\bar{F}(r, s) + \bar{h}(r)$, $\bar{G}(r, s) + \bar{h}(r)$, $\bar{N}(r, s, p)$, dove $2\bar{h}(r)$ è ciò che diventa la $\bar{\varphi}(r)$ quando la trasformazione si applica alle funzioni $\varphi(x) = 2h(x)$, $F(x, y) = h(x) G(x, y) = h(x)$, $N(x, y, z) = 0$.

Inoltre è assegnata una funzione $f(x; r)$ e devono valere le eguaglianze (18).

Deve ancora sussistere quanto detto come corrispondente alla simmetria o emisimmetria del tensore T^h_{ij}.

Il prodotto di due tali trasformazioni, per una delle quali interverrebbe la funzione $f(x; r)$ e per l'altra la funzione $f_1(r; q)$ sarebbe quindi una trasformazione del medesimo tipo ed interverrebbe la funzione

$$f_2(x; r) = \int_a^b f(x; t) f_1(t; r) dt.$$

Si presenterebbe il problema dell'operazione inversa: assegnate $\bar{\varphi}(r)$, $\bar{F}(r, s)$, $\bar{G}(r, s)$, $\bar{N}(r, s, p)$ trovare $\varphi(x)$, $F(x, y)$, $G(x, y)$, $N(x, y, z)$.

Si presenterebbe lo studio di equazioni funzionali del tipo:

$$\begin{aligned}
&\bar{\varphi}(r) + \lambda\varphi(r) = \alpha(r)\\
&\bar{F}(r, s) + \mu F(r, s) = \beta(r, s)\\
&\bar{G}(r, s) + \nu G(r, s) = \gamma(r, s)\\
&\bar{N}(r, s, p) + \sigma N(r, s, p) = \delta(r, s, p),
\end{aligned}$$

dove λ, μ, ν, σ sono costanti assegnate, α, β, γ, δ funzioni assegnate dei loro argomenti: le incognite sono le funzioni $\varphi(x)$, $F(x, y)$, $G(x, y)$, $N(x, y, z)$ che figurano implicitamente in $\bar{\varphi}(r)$, $\bar{F}(r, s)$, $\bar{G}(r, s)$, $\bar{N}(r, s, p)$ e figurano ancora nei primi membri con gli argomenti x, y, z sostituiti rispettivamente da r, s, p. Altre numerose ricerche si potrebbero escogitare.

Invece che alla trasformazione di quattro funzioni $\varphi(x)$, $F(x, y)$, $G(x, y)$, $N(x, y, z)$ in $\bar{\varphi}(r)$, $\bar{F}(r, s)$, $\bar{G}(r, s)$, $\bar{N}(r, s, p)$, si potrebbe pensare alla trasformazione di tre funzioni $H(x, y)$, $K(x, y)$, $N(x, y, z)$ in $\bar{H}(r, s)$, $\bar{K}(r, s)$, $\bar{N}(r, s, p)$ per mezzo delle (9), (10), (13).

Da notare ancora che insieme alle relazioni (14), (15), (16), (17) nei cui secondi membri figurano $\varphi(x)$, $F(x, y)$, $G(x, y)$, $N(x, y, z)$, che corrispondono alla trasformazione tensoriale (1), sussistono le altre, corrispondenti alle (1′), nei cui secondi membri intervengono $\varphi(x)$, $H(x, y)$, $K(x, y)$, $N(x, y, z)$.

Esse sono la (14) già scritta per definire $\bar{\varphi}(r)$, e le seguenti:

$$\bar{F}(r, s) = \frac{1}{2}\int_a^b \varphi(x) f(x; r)\,dx + \int_R H(x, y) V(x, y; r, s)\,dxdy +$$

$$\int_R K(x, y) W(x, y; r, s)\,dxdy + \int_V N(x, y, z) Q(x, y, z; r, s)\,dxdydz,$$

$$\bar{G}(r, s) = \frac{1}{2}\int_a^b \varphi(x) f(x; r)\,dx + \int_R H(x, y) W(x, y; r, s)\,dxdy +$$

$$\int_R K(x, y) V(x, y; r, s)\,dxdy + \int_V N(x, y, z) T(x, y, z; r, s)\,dxdydz,$$

$$\bar{N}(r, s, p) = \int_R H(x, y) X(x, y; r, s, p)\,dxdy +$$

$$\int_R K(x, y) X(x, y; s, r, p)\,dxdy + \int_V N(x, y, z) S(x, y, z; r, s, p)\,dxdydz.$$

e da esse risulta che se

$$H(x, y) = 0, \qquad K(x, y) = 0, \qquad N(x, y, z) = 0$$

è

$$\bar{\varphi}(r) = \int_a^b \varphi(x) f(x; r)\,dx, \qquad \bar{F}(r, s) = \bar{G}(r, s) = \frac{1}{2}\bar{\varphi}(r), \qquad \bar{N}(r, s, p) = 0.$$

In quanto alla

$$\bar{\varphi}(r) = \int_a^b \varphi(x) f(x;\ r) dx$$

corrisponde al fatto che si presenta nella trasformazione tensoriale quando

$$T^j_{ij} = T^j_{ji} = \frac{1}{2} T^i_{ii} \,(j \neq i), \qquad T^h_{ij} = 0 \;(h \neq i,\ h \neq j),$$

T^i_{ii} si trasforma in $\overline{T}^r_{rr}$ come le componenti covarianti di un vettore, cioè

$$\overline{T}^r_{rr} = T^i_{ii} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r}.$$

E come, assegnato ad arbitrio un vettore di componenti covarianti V_i si può definire un tensore T^h_{ij} ponendo

$$T^i_{ii} = V_i\,,\ T^j_{ij} = T^j_{ji} = \frac{1}{2} V_i\,,\ (i \neq j),\ T^h_{ij} = 0 \;(h \neq i,\ h \neq j)$$

risultando:

$$\overline{T}^r_{rr} = \overline{V}_r\,,\ \overline{T}^s_{rs} = \overline{T}^s_{sr} = \frac{1}{2} \overline{V}_r \;(r \neq s),\ \overline{T}^p_{rs} = 0 \;(p \neq r,\ p \neq s),$$

analogamente, fissata ad arbitrio una funzione $\varphi(x)$, posto

$$F(x,\ y) = G(x,\ y) = \frac{1}{2} \varphi(x), \qquad N(x,\ y,\ z) = 0,$$

la trasformazione

$$\bar{\varphi}(r) = \int_a^b \varphi(x) f(x;\ r) dx,$$

$$\overline{F}(r,\ s) = \overline{G}(r,\ s) = \frac{1}{2} \bar{\varphi}(r), \qquad \overline{N}(r,\ s,\ p) = 0$$

coincide per la particolare scelta delle funzioni F, G, N, con la trasformazione (14), (15), (16), (17).

Si può porre una domanda: limitandoci nel campo delle funzioni continue, può accadere che se

$$\varphi(x) = N(x,\ x,\ x), \quad F(x,\ y) = N(x,\ y,\ y), \quad G(x,\ y) = N(y,\ x,\ y)$$

risulti

$$\bar{\varphi}(r) = \overline{N}(r,\ r,\ r), \quad \overline{F}(r,\ s) = \overline{N}(r,\ s,\ s), \quad \overline{G}(r,\ s) = \overline{N}(s,\ r,\ s)\,?$$