BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Giuseppe Palamà

Il problema di Waring.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.1, p. 83–100.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_1_83_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1957.

Il problema di Waring.

Nota di GIUSEPPE PALAMÀ (a Lecce)

Sunto. - *Si puntualizzano i risultati più salienti relativi al problema di* WARING.

§ 1. Introduzione storica. Teorema dell'Hilbert e contributi di altri autori.

1. EDOARDO WARING (1734-1798) nella 2ª Parte delle sue *Meditationes Algebricae* (pp. 204-205) dedicata alla Teoria dei Numeri (la 1ª Edizione di tale Opera, come si sa, ebbe il titolo *Miscellanea Analytica*, che fu poi mutato nell'altro Medit. Algebr. in una 2ª e 3ª Edizione, e quest'ultima, del 1770, con notevoli aggiunte) affermò che *ogni intero e positivo si può esprimere mediante la somma di al più 4 quadrati, 9 cubi e di al più 19 biquadrati.* In generale egli fece una congettura che può così enunciarsi: *ogni intero e positivo si può rappresentare con la somma di un certo numero di* k*-me potenze positive, dipendente soltanto da* k *ed inferiore ad un certo limite:* in tale congettura consiste appunto il classico *Problema di Waring*, di cui qui ci dobbiamo occupare.

2. Dovette passare più di un secolo perchè l'illustre HILBERT dimostrasse vera, nel 1909, l'affermazione del WARING.

L'HILBERT [16] [1] dimostra innanzi tutto, a mezzo di un integrale quintuplo (in un primo Lavoro si serve invece di un integrale 25-plo), il Lemma ammesso ma non dimostrato dallo HURWITZ [17, *a*)], secondo cui, per ogni m ed $r=5$, esiste una identità del tipo

$$(x_1{}^2 + \dots + x_r{}^2)^m = \sum_h \rho_h (a_{1h}x_1 + \dots + a_{rh}x_r)^{2m},$$

ove a_{ih} sono interi e ρ_h sono numeri razionali positivi. Con tale Lemma l'HILBERT prova facilmente l'asserzione di WARING per potenze i cui esponenti sono 2^k, $k \geq 2$. Egli poi da questo caso deriva quello di un esponente qualsiasi con una elementare e lunga discussione, ma senza servirsi di calcoli.

A questo primo decisivo passo, con cui veniva dimostrata vera

(1) I numeri scritti fra parentesi quadre rimandano alla Bibliografia riportata alla fine del Lavoro.

la congettura di WARING, seguirono semplificazioni, miglioramenti e nuove dimostrazioni da parte di diversi altri Autori.

Primo di tutti in ordine di tempo fu P. HAUSDORFF [14] che provò il Lemma dell' HILBERT con un metodo più adatto al calcolo degli a_{ih}, ρ_h e mediante integrali involgenti esponenziali. Tale elegante modificazione della dimostrazione dell' HILBERT può essere ridotta, come osservò E. STRIDSBERG [33], ad uno studio elementare di coefficienti binomiali. Questi difatti usa potenze simboliche di h, h^ν per denotare $\frac{\nu\,!}{[\nu/2]\,!}$ e zero rispettivamente per ν pari ≥ 0, e ν dispari ≥ 1. Uno dei teoremi di HAUSDORFF si riduce così semplicemente al seguente: Se $f(x)$ è un polinomio qualsiasi ≥ 0 per ogni valore di x, allora è $f(x+h) > 0$, per x reale, perchè si ha

$$f(x+h) = (1/\sqrt{\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2/4} f(x+\alpha)d\alpha,$$

essendo questa verificata per $f(x+h) = h^\nu$. Il Lemma di HILBERT è provato con l'uso di

$$(h_1x_1 + \ldots + h_rx_r)^m = h^m(x_1{}^2 + \ldots + x_r{}^2)^{m/2}.$$

Finalmente lo STRIDSBERG semplificò la seconda parte (elementare) della dimostrazione di HILBERT del Teor. di WARING.

Altri contributi nella stessa direzione furono dati da R. REMAK [29], che ridusse a processi algebrici la dimostrazione del Teor. di WARING; da A. HURWITZ [17, *b*)] che diede una dimostrazione elementare del Teorema di HAUSDORFF sopra ricordato; da G. FROBENIUS [9] che diede anch'egli una dimostrazione algebrica del Teor. di WARING, con la modificazione della prova di STRIDSBERG nel punto in cui questi usa integrali.

Una nuova dimostrazione elementare fu data nel 1942 da J. W. LINNIK [3].

Della dimostrazione data prima da G. H. YARDY e J. E. LITTLEWOOD e poi da VINOGRADOFF si parlerà dopo.

3. Resoconti delle ricerche eseguite sul Problema di WARING sono stati dati da DICKSON [6; *a*)] (esposizione rapida ma concettosa ed aggiornata sino al 1919); da HARDY e WRIGHT [13] (esposizione accurata, orientata per lo più verso l'aspetto elementare, e ricca di notizie interessanti); da G. RICCI [30] (esposizione sintetica di alcuni procedimenti non elementari, relativi al Prob. di WARING); e da P. BACHMANN [1, 2ª Parte, pp. 328-348]. Inoltre dei resoconti dati da LANDAU [20, *b*)] si farà cenno in seguito.

Noi qui puntualizzeremo i risultati ottenuti sino ad oggi, che esporremo con ordine, mettendo in maggiore evidenza i più notevoli fra essi, quali sono ad esempio quelli di HARDY e LITTLEWOOD e di VINOGRADOFF.

Le dimostrazioni, soltanto quando si possano avere rapidamente e implichino taluni dei metodi più fecondi di applicazioni, saranno svolte completamente.

§ 2. Spiegazione dei due simboli $g(k)$ e $G(k)$.

1. Con $g(k)$ si suole indicare il più piccolo valore di s per cui *ogni intero naturale* N *si può rappresentare come somma di* s *potenze* k^me^ *di interi non negativi*, cioè il più piccolo s per cui è

$$N = x_1^k + \dots + x_s^k, \qquad (x_i \geq 0).$$

Così per es. è, conformemente alla congettura di WARING

$$g(3) = 9.$$

Invece per $G(k)$ s'intende il più piccolo s per cui è possibile la detta rappresentazione di tutti i numeri naturali *sufficientemente grandi*, superiori cioè ad un certo limite, rimanendone perciò esclusi un numero finito. Pertanto è

$$G(k) \leq g(k).$$

§ 3. Un classico teorema: $G(2) = g(2) = 4$.

1. È del LAGRANGE (1770) la prima dimostrazione del classico teorema secondo cui è

$$(1_3) \qquad g(2) = 4.$$

Il solo enunciato di tale teorema risale però al 1621 ed è di BACHET de MÉZIRIAC CLAUDE-GASPAR (1581-1638), cui talvolta viene attribuito il teorema.

Una semplice ed elementare dimostrazione della (1_3), dovuta ad EULERO, è riportata ad es. in [13, pp. 302-303].

Una volta dimostrata la (1_3) si dimostra subito che è anche $G(2) = 4$. Difatti i numeri della forma $8m + 7$ non possono essere rappresentati come la somma di tre quadrati, perchè una somma di tre quadrati divisa per 8, non può dare mai per resto 7.

§ 4. Risultati relativi a $g(k)$ e $G(k)$ per $k = 3, 4$.

1. Fu il WIEFERICH [38, *c*)] che nel 1909 dimostrò che

$$g(3) = 9;$$

ma in questa dimostrazione esisteva una lacuna derivante da lo avervi trascurato la rappresentazione di un gruppo limitato di interi; ad essa cercò di por rimedio, nel 1910, il BACHMANN [1, 2ª Parte, pp. 477-478], incorrendo però anch'egli in errori. È merito del KEMPNER [19'] aver colmato correttamente tale lacuna.

La dimostrazione, elementare, che

$$G(3) \leq 13,$$

è la seguente [13. pp. 318-319].

Se denotiano con C_s un numero che è la somma di s cubi non negativi e se supponiamo che z sia un intero della forma $6m+1$ $(m = 1, 2, \ldots)$, e indichiamo con I_z l'intervallo

$$\Phi(z) = 11z^9 + (z^3+1)^3 + 125z^3 \leq N \leq 14z^9 = \Psi(z),$$

per grandi z si ha

$$\Phi(z+6) < \Psi(z),$$

allora ogni N sufficientemente grande giace in qualche I_z, basta perciò dimostrare che ogni N di I_z è un C_{13}.

Non sarebbe difficile provare che ogni N di I_z può essere espresso nella forma

$$N = n + 8z^9 + 6mz^3,$$

in cui è

$$n = C_5, \qquad 0 \leq m < z^6.$$

Ammesso ciò, poichè $g(2) = 4$, si ha

$$m = x_1^2 + \ldots + x_4^2,$$

con

$$0 \leq x_i < z^3.$$

Pertanto si ottiene

$$N = n + 8z^9 + 6z^3(x_1^2 + \ldots + x_4^2) =$$

$$= n + \sum_{i=1}^{4} [(z^3+x_i)^3 + (z^3-x_i)^3] = C_5 + C_8 = C_{13}$$

e si ha perciò

$$G(3) \leq 13.$$

Questo risultato si affina dimostrando che è

$$N = C_{13}, \qquad \text{per} \qquad N \geq 10^{25},$$

da cui si ricava poi che è

$$g(3) \leq 13.$$

La dimostrazione che $g(3) = 9$ richiede l'uso del teorema, dovuto a LEGENDRE [21], (Cfr. inoltre [34]), sui numeri che sono rappresentabili con la somma di tre quadrati.

Dopo la dimostrazione della $G(3) \leq 13$, si ebbero successivamente i seguenti miglioramenti.

$$(1_1) \qquad G(3) \leq 8, \quad \text{LANDAU [20, } a)];$$

W. S. BAER [2] provò che ogni intero $\geq 23 \times 10^{14}$ è una somma di 8 o meno cubi positivi, mentre però la dimostrazione della (1_1) del LANDAU è del 1909, quella del BAER è invece del 1913.

Nel 1942 il russo LINNIK annunciò che [22]

$$G(3) \leq 7.$$

Di quest'ultima relazione una dimostrazione semplice, insieme con ulteriori notizie, fu data da G. L WATSON nel 1951, [36].

Ma come si vedrà in seguito è $G(k) \geq k + 1$, quindi è $G(3) \geq 4$, e perciò il valore di $G(3)$ è uno dei numeri 4, 5, 6, 7, però vi è più probabilità (Cfr. WESTERN [37]), per ragioni di carattere empirico, che $G(3)$ sia uno dei due numeri 4, 5.

HARDY e LITTLEWOOD [11, *a*)] dimostrarono inoltre che quasi tutti i numeri sono somme di 5 cubi. Infine DAVENPORT [4] ha provato che quasi tutti i numeri sono somme di 4 cubi: poichè i numeri $9m \pm 4$ richiedono almeno 4 cubi, questo è il risultato finale.

2. Esponiamo dettagliatamente la dimostrazione con cui si ottiene da $G(3) \leq 13$, che è $g(3) \leq 13$, perchè vi si fa uso del «*metodo dell'ascesa*» tanto proficuamente utilizzato nelle ricerche sul problema del WARING, come si dirà in seguito.

Dimostrato dunque [13, p. 319] che per $n \geq 10^{25}$ è $n = C_{13}$, ecco come si applica il detto metodo per provare che è $g(3) \leq 13$.

Si constata empiricamente che

$$n = C_9, \quad (1 \leq n \leq 239); \qquad n = C_8, \quad (240 \leq n \leq 40\,000).$$

Allora posto

$$m = [N^{1/3}], \quad N \geq 1, \quad ([\alpha] = \text{parte intera di } \alpha),$$

si ha

$$N - m^3 = (N^{1/3})^3 - m^3 = (N^{1/3} - m)(N^{2/3} + N^{1/3}m + m^2) \leq$$
$$\leq 3N^{2/3}(N^{1/3} - m) < 3N^{2/3}.$$

Ora supposto

$$240 \leq n \leq 10^{25},$$

si, ha successivamente, se si pone

$$\begin{array}{lll} n = 240 + N, & 0 \leq N < 10^{25}, & \\ N = m^3 + N_1, & m = [N^{1/3}], & 0 \leq N_1 < 3N^{2/3}, \\ N_1 = m_1^3 + N_2, & m_1 = [N_1^{1/3}], & 0 \leq N_2 \leq 3N_1^{2/3}, \\ \dots & \dots & \dots \\ N_4 = m_4^3 + N_5. & m_4 = [N_4^{1/3}], & 0 \leq N_5 \leq 3N_4^{2/3} \end{array}$$

che sommate membro a membro danno

$$n = 240 + N_5 + m^3 + m_1^3 + \dots + m_4^3; \tag{1_2}$$

ma

$$0 \leq N_5 \leq 3N_4^{2/3} \leq 3(3N_3^{2/3})^{2/3} \leq \dots < 3 \cdot 3^{2/3} \cdot 3^{4/9} \cdot 3^{8/27} \cdot 3^{16/81}(N^{2/3})^5 =$$
$$= 27\left(\frac{N}{27}\right)^{(2/3)^5} < 27\left(\frac{10^{25}}{27}\right)^{(2/3)^5} < 35\,000,$$

quindi

$$240 \leq 240 + N_5 < 35\,240 < 40\,000$$

e perciò $240 + N_5$ è C_8 e quindi dalla (1_5) si ha

$$g(3) \leq 13.$$

3. Il procedimento elementarissimo che segue, con cui si stabilisce un limite superiore per $g(4)$ è del 1859 ed è sostanzialmente dovuto a J. Liouville che lo espose iu una seduta del Collegio di Francia.

Se N è un intero naturale arbitrario, è nota l'identità [23, c)]

$$6N^2 = (a+b)^4 + (a-b)^4 + (a+c)^4 + (a-c)^4 + (a+d)^4 + (a-d)^4 + $$
$$+ (b+c)^4 + (b-c)^4 + (b+d)^4 + (b-d)^4 + (c+d)^4 + (c-d)^4, \tag{1_3}$$

in cui

$$N = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Ma ad un intero positivo n qualsiasi può darsi la forma

$$n = 6Q + R, \tag{2_3}$$

e quindi posto

$$Q = N_1^2 + \dots + N_4^2 \tag{3_3}$$

dalle (1_3), (2_3) e (3_3) segue

$$g(4) \leq 4.12 + 5, \quad \text{se si ritiene} \quad R \leq 5,$$

cioè

$$g(4) \leq 53.$$

Questo risultato si migliora subito tenendo presente che, se $n \geq 81$, può ritenersi

$$R = 0,\ 1,\ 2,\ 81,\ 16,\ 17$$

a seconda che rispettivamente è

$$n \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \pmod 6);$$

e che

$$1 = 1^4,\ 2 = 1^4 + 1^4,\ 81 = 3^4,\ 16 = 2^4,\ 17 = 2^4 + 1^4;$$

e che infine la rappresentazione di $n < 81$, come somma di biquadrati, richiede al massimo 19 biquadrati. Si ha pertanto

$$g(4) \leq 4.12 + 2 = 50.$$

I successivi risultati che migliorano l'ultimo, ottenuti tutti elementarmente, sono i seguenti

$g(4) \leq 47$ (REALIS [28], 1878); $g(4) \leq 45$ (LUCAS, [23, *a*)], 1878);
$g(4) \leq 41$ (LUCAS, [23, *b*)], 1878); $g(4) \leq 39$ (FLECK, [8, *a*)], 1906);
$g(4) \leq 38$ (LANDAU, [20, *c*)], 1907); $g(4) \leq 37$ (WIEFERICH, [38, *a*)] 1909).

Il procedimento seguito dal WIEFERICH per ottenere il limite superiore 37 di $g(4)$ è stato semplificato dal BAER nel 1913, [2].

Però il migliore limite superiore di $g(4)$ finora conosciuto è stato stabilito con metodo non elementare dal DICKSON [6, *b*)] ed è il seguente

$$g(4) \leq 35.$$

Ma in conseguenza di un teorema generale di cui si parlerà in seguito è $g(4) \geq 19$, e come del resto è ovvio, perchè ad es. $79 = 4 \times 2^4 + 15 \times 1^4$, quindi

$$19 \leq g(4) \leq 35,$$

e perciò vi è ancora molta incertezza circa il valore esatto di $g(4)$.

4. Per quanto si riferisce a $G(4)$ si dimostra subito che è

$$G(4) \geq 16.$$

Difatti si ha

$$x^4 \equiv 0 \quad \text{ovvero} \quad 1 \pmod{16}$$

Pertanto tutti i numeri $16n + 15$ richiedono almeno 15 biquadrati, ed è perciò

$$G(4) \geq 15.$$

Ma se i numeri $16n$ richiedessero 15 o meno biquadrati ognuno, si avrebbe

$$16n = \sum_1^{15} x_i^4 = \sum_1^{15} (2y_i)^4,$$

e quindi

$$n = \sum_1^{15} y_i^4,$$

perciò se $16n$ fosse la somma di 15 o meno biquadrati, dovrebbe essere lo stesso di n. Ma 31 non è la somma di 15 biquadrati e quindi neanche

$$16^m \cdot 31$$

è somma di 15 biquadrati e pertanto

$$G(4) \geq 16.$$

La precedente dimostrazione è del KEMPNER. Ma d' altra parte il DAVENPORT [4, *b*)] dimostrò che

$$G(4) \leq 16,$$

quindi

$$G(4) = 16.$$

Un altro risultato relativo al limite superiore di $G(4)$ fu stabilito indipendentemente dall' ESTERMANN [7, *b*)] e da DAVENPORT e HEILBRONN [5] ed è il seguente

$$G(4) \leq 17.$$

Di altri limiti superiori di $G(4)$ ma più alti si avrà occasione incidentalmente di accennare in seguito.

§ 5. **Valori di** $g(6)$, $g(8)$ **e** $g(10)$.

1. Come a mezzo della (1_3) del § precedente si è determinato il limite superiore 53 di $g(4)$, così con analoghe identità si stabiliscono le

$$(1_1) \qquad g(6) \leq 184g(3) + 59, \qquad g(8) \leq 840g(4) + 273,$$

dovute rispettivamente a FLECK [8, *b*)] e ad HURWITZ [17, *a*)].

Sia però dalla prima che dalla seconda si hanno per $g(6)$ e $g(8)$ dei limiti superiori assai alti. Difatti, anche se si ritiene $g(3) = 9$ e $g(4) \leq 37$, come fu dimostrato dopo che le (1_1) furono stabilite, dalle (1_1) si ha

$$g(6) \leq 1715, \qquad g(8) \leq 31\,353.$$

Un' analoga dimostrazione per $g(10)$ è dovuta invece a SCHUR [32] ed anche ora si ha un limite superiore troppo alto, che come i precedenti ha semplice valore di esistenza. Diffatti oggi si sa che

$$g(6) = 73, \quad g(8) = 279, \quad g(10) = 1079.$$

Limiti superiori per $g(6)$, $g(8)$ e $g(10)$, insieme con altri risultati, furono stabiliti pure da JAMES [18].

§ 6. Limite superiore di $g(5)$ e valori di $g(7)$ e $g(9)$.

1. Ecco riassunte alcune delle tappe relative alla ricerca di un limite superiore sempre più basso di $g(5)$.

$g(5) \leq 192$ (MAILLET, [24, *a*), *b*)], 1895); A. FLECK [8, *b*)], 1912, osservò che il limite precedente 192, può essere abbassato di circa 36 unità rimanendo tuttavia ancora troppo al di sopra del limite che si rileva dalle tavole numeriche.

$g(5) \leq 59$ (A. WIEFERICH [38, *b*)], 1909);
$g(5) \leq 58$ (BAER [2], 1913);
$g(5) \leq 54$ (DICKSON [6, *b*)], 1933);
$g(5) \geq 37$,

quindi si ha

$$37 \leq g(5) \leq 54,$$

I limiti inferiori 19 e 37 di $g(4)$ e $g(5)$, rispettivamente sono stati osservati da EULERO e probabilmente anche da WARING, essi seguono dalla (1_8) del successivo § 7, per $k = 4$, $k = 5$.

Si sa inoltre che

$$g(7) = 143, \qquad g(9) = 548.$$

§ 7. Formule generali relative a $g(k)$ e $G(k)$.

1. Di grandissimo interesse scientifico sono le ricerche eseguite sul problema di WARING da G. H. HARDY e J. E. LITTLEWOOD sia per i mezzi analitici dei quali si sono serviti questi Autori (mezzi analitici che, assai fecondi, hanno avuto estese applicazioni in aritmetica, e specialmente additiva, ad opera degli stessi Autori, di LANDAU e delle loro scuole) che per la portata assai generale dei risultati ottenuti.

HARDY e LITTLEWOOD pubblicarono i loro Lavori tra il 1920 ed il 1928 [11, *a*)], ed un dettagliato resoconto di essi si trova in LANDAU [20, *b*), pp. 235-339]. Però già alcuni anni prima, nel 1917, l'HARDY in collaborazione con S. RAMANUJAN [12] aveva provato che il logaritmo del numero dei modi con cui l'intero naturale n è rappresentabile come una somma di r^{me} potenze d'interi positivi (non contando come distinte permutazioni delle stesse potenze), è asintotico a

$$t\left[\frac{1}{r}\Gamma(t/r)\zeta(t/r)\right]^{r/t} n^{1/t}, \qquad \text{ove} \qquad t = r+1,$$

ed essendo ζ la classica funzione zeta di RIEMANN e Γ la funzione gamma.

Prima ancora del 1920, e cioè nel 1919, HARDY e LITTLEWOOD [11, *c*)] provarono con l'uso delle funzioni analitiche che ogni intero positivo abbastanza grande è una somma di al più

$$k \cdot 2^{k-1} + 1$$

k^{me} positive. Il metodo da loro usato conduce non soltanto alla dimostrazione dell'esistenza di rappresentazioni, ma anche a formule asintotiche per il loro numero.

HARDY e LITTLEWOOD [11, *a*)] si servirono poi delle somme $S_{a,q}$ di GAUSS definite dalla

$$S_{a,q} = \sum_{x=1}^{q} e\left(\frac{a}{q}x^k\right), \qquad (a,\ q) = 1,$$

essendo

$$e(z) = e^{2\pi i z},$$

e studiarono la funzione $W(N;\ k,\ s)$ che indica il numero delle rappresentazioni di N come somme del tipo

$$x_1{}^k + \ldots + x_s{}^k, \qquad (x_i \geq 0).$$

Intanto è del tutto ovvio che, se si fissa k, si ha

$$W(N;\ k,\ s) > 0 \ \text{ per } s \geq g(k) \text{ ed } N \text{ qualsiasi};$$

vi è poi un certo valore N' di N per cui si ha

$$W(N';\ k,\ g(k)-1) = 0.$$

Inoltre è

$$W(N;\ k,\ G(k)) > 0$$

ad eccezione di un numero finito di valori di N, e

$$W(N;\ k,\ G(k)-1) = 0$$

per infiniti valori di N.

HARDY e LITTLEWOOD studiarono la funzione $W(N;\ k,\ s)$ a mezzo della « *funzione generatrice* »

$$\Sigma\ W(N;\ k,\ s)x^N$$

in prossimità del suo cerchio di convergenza e furono così portati ad occuparsi delle così dette » serie singolari ».

Un risultato particolare da essi trovato relativo a W è il seguente

$$W(N;\ 4{,}21) = \frac{[2\Gamma(5/4)]^{21}}{\Gamma(21/4)} N^{17/4} \left[1 + 1{,}331 \cos\left(\frac{1}{8} N\pi + \frac{11}{16}\pi\right) + \right.$$
$$\left. + 0{,}379 \cos \frac{(2N-5)\pi}{8} + \ldots\right]$$

i successivi termini della serie essendo piccoli.

Vi è inoltre degli stessi Autori una formula generale di grande interesse teorico, che è riportata in [30].

A mezzo dei risultati generali stabiliti da HARDY e LITTLEWOOD si può, almeno teoricamente, determinare un limite superiore per $g(k)$, per ogni k; però i calcoli richiesti per grandi k, sono praticamente assai laboriosi ed impraticabili.

2. Può sembrare strano, ma vi è più difetto di risultati definitivi per $G(k)$ che per $g(k)$.

HARDY e LITTLEWOOD si occuparono nelle loro ricerche della determinazione di limiti superiori ed inferiori (e quest' ultimi furono ricercati sistematicamente [11, *b*)]) di $G(k)$ ed un loro risultato notevole è il seguente

$$(1_2) \qquad G(k) \leq (k-2)2^{k-1} + 5.$$

Invece un altro limite superiore per $G(k)$ da essi stabilito è una funzione più complicata di k che tende asintoticamente a $k \cdot 2^{k-2}$.

Di un loro risultato particolare si è detto precedentemente. Qui aggiungiamo che gli stessi Autori hanno trovato che

$$(2_2) \qquad G(4) \leq 19, \quad G(5) \leq 41, \quad G(6) \leq 87, \quad G(7) \leq 193, \quad G(8) \leq 425.$$

Invece dalla (1_2) per $k=4, 5, \ldots, 10$ si ha rispettivamente

$$G(4) \leq 21, \quad G(5) \leq 53, \quad G(6) \leq 133, \quad G(7) \leq 325, \quad G(8) \leq 773,$$
$$G(9) \leq 1797, \quad G(10) \leq 4101.$$

Mentre TH. ESTERMANN [7] ha stabilito nel 1937 i seguenti risultati

$$G(k) \leq 17,\ 29,\ 42,\ 59,\ 78,\ 101,\ 125,\ 153,\ 181,\ 217,\ 253,\ 292,\ 333$$

rispettivamente per $k=4, 5, \ldots, 16$; ed M. M. FULD [10] nel 1938 ha dimostrato invece che

$$G(k) \leq 369.\ 398,\ 427,\ 455$$

rispettivamente per

$$k = 17,\ 18,\ 19,\ 20.$$

Infine DAVENPORT dimostrò che [4, c)]

$$G(5) \leq 23. \quad G(6) \leq 36.$$

3. Se notevoli sono stati i contributi di HARDY e LITTLEWOOD anche importanti e profondi sono quelli del russo VINOGRADOFF che apparvero inizialmente nel 1924, e che, se come principio erano informati al metodo seguito da HARDY e LITTLEWOOD, pure conducevano più rapidamente ad alcuni loro risultati e ad una più semplice dimostrazione del Teorema dello HILBERT. Resoconto di tale lavoro è dato anche da LANDAU [20, b), pp. 340-358].

Il metodo del VINOGRADOFF fu usato per trovare un limite superiore per $g(k)$ e per provare che

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{g(k)}{k2^{k-1}} = 1.$$

VINOGRADOFF in un lavoro più recente ottenne miglioramenti più importanti a mezzo di un nuovo e più efficace metodo di valutazione di certe somme trigonometriche; pervenne così a dei risultati che, per grandi k, sono di gran lunga migliori di quelli conosciuti avanti e provò che

$$G(k) \leq 6k \log k + (4 + \log 216)k,$$

che fu poi alla sua volta migliorata da HEILBRONN [15] nella

$$(1_3) \qquad G(k) \leq 6k \log k + k[4 + 3 \log (3 + 2/k)] + 3,$$

in ciascuna delle quali $G(k)$ è al più dell'ordine $k \log k$.

Ad es. dalla (1_3) si ha

$$(2_3) \quad G(4) \leq 67, \quad G(5) \leq 89, \quad G(6) \leq 113, \quad G(7) \leq 137, \quad G(8) \leq 163.$$

e dal confronto delle (2_3) con le (2_2) emerge che di quest'ultime le (2_3) sono migliori per $k > 6$.

4. Ma VINOGRADOFF ha dato dei notevoli contributi anche per la valutazione di $g(k)$. Ecco i concetti a cui si è ispirato il VINOGRADOFF.

Se si sa che

$$G(k) \leq \bar{G}(k),$$

per tutti gli N maggiori di un $C(k)$, è facile pervenire ad un limite superiore di $g(k)$, perchè la rappresentazione degli interi naturali $<$ di $C(k)$ si ottiene a mezzo di semplici calcoli materiali.

Ora se riteniamo che un confine inferiore per $g(k)$ sia dato da:

$$(1_4) \qquad \underline{g}(k) = 2^k + [(3/2)^k] - 2, \quad ([\alpha] = \text{parte intera di } \alpha),$$

come facilmente dimostreremo tra breve, e se, assumiamo come limite superiore $\bar{G}(k)$ di $G(k)$ quello dato dalla (1_3), allora si ha

$$\underline{g}(k) > \bar{G}(k)$$

per $k \geq 7$, difatti la (1_4) ci dà

$$g(4) \geq 19, \quad g(5) \geq 37, \quad g(6) \geq 73, \quad g(7) \geq 143, \quad g(8) \geq 279, \text{ ecc.},$$

mentre dalla (1_3) si hanno le (2_3).

Allora se gli interi naturali $>$ di $C(k)$ sono rappresentabili con $\bar{G}(k)$ potenze k^{me}, se gli interi positivi che precedono $C(k)$ ne richiedono invece $\underline{g}(k)$ e se come si è supposto si ha

$$\underline{g}(k) > \bar{G}(k).$$

è

$$g(k) = \underline{g}(k).$$

Pertanto il problema è ridotto alla ricerca di $C(k)$ corrispondente ad un $\bar{G}(k)$ per cui si ha

$$\bar{G}(k) \leq \underline{g}(k).$$

5. Con il ragionamento esposto si è risolto quasi completamente il problema di WARING, almeno nella sua iniziale formulazione, sfruttando cioè ed adattando opportunatamente il metodo esposto di VINOGRADOFF, ed utilizzando opportunamente il « metodo di ascesa », del quale si è visto precedentemente una sua semplice applicazione per la dimostrazione della $g(3) \leq 13$.

6. Oltre a tutti questi già ricordati. numerosi altri risultati sono dovuti a VINOGRADOFF in questo campo. Ricordiamo qui soltanto la interessantissima limitazione [35], migliore fra quelle finora note (almeno per grandi valori di k):

$$G(k) < k(3 \log k + 11) \quad \text{per} \quad k \geq 2$$

da cui si deduce in particolare:

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{G(k)}{k \log k} \leq 3.$$

Questi risultati furono da lui ottenuti sopratutto sfruttando il suo metodo, fondato essenzialmente sulla valutazione di somme del tipo

$\Sigma\, e^{2\pi i \alpha x y}$ (α reale; x, y interi variabili in opportuni campi),

metodo da considerarsi ormai classico nella teoria analitica dei numeri.

7. Un risultato notevole che si ottiene con il metodo esposto alla precedente sezione 5 di questo §, che porta quasi ad una completa soluzione del problema di WARING è il seguente. È

$$g(k) = 2^k + A - 2, \quad \text{per} \quad k \geq 6 \tag{1_7}$$

purchè sia

$$B \leq 2^k - A - 2, \tag{2_7}$$

essendo

$$A = [(3/2)^k], \quad B = 3^k - 2^k A, \quad ([\alpha] = \text{parte intera di } \alpha).$$

Ora si sa che la (2_7) è soddisfatta per tutti i k dell'intervallo

$$3 < k < 401.$$

Ad es. dalla (1_7) si trae

$$g(6) = 73, \quad g(7) = 143, \quad g(8) = 279, \quad g(9) = 548, \quad g(10) = 1079,$$

già riportati in alto.

8. Che debba essere

$$g(k) \geq 2^k + A - 2, \tag{1_8}$$

si dimostra subito. Difatti i numeri n della forma

$$n = 2^k \cdot A - 1, \qquad A = [(3/2)^k],$$

essendo minori di 3^k, possono essere rappresentati soltanto mediante potenze 2^k e 1^k, e il minimo numero di tali potenze richieste per la detta rappresentazione è

$$n = (A - 1)2^k + (2^k - 1)1^k,$$

e perciò sono necessarie appunto

$$A - 1 + 2^k - 1 = 2^k + A - 2$$

k^{me}-potenze, quindi è

$$g(k) \leq 2^k + A - 2.$$

9. Si sa che non può essere $B = 2^k - A - 1$, e nemmeno $B = 2^k - A$; se esistono valori k per cui risulti:

$$B \geq 2^k - A + 1,$$

per essi anzichè la (1_7) valgono le seguenti formule:

(1_9) $$g(k) = 2^k + A + D - 3, \quad \text{se} \quad 2^k < AD + A + D,$$

(2_9) $$g(k) = 2^k + A + D - 2, \quad \text{se} \quad 2^k = AD + A + D,$$

ove

$$D = [(4/3)^k], \quad ([\alpha] = \text{parte intera di } \alpha).$$

Si dimostra poi facilmente che è

$$2^k \leq AD + A + D.$$

La maggior parte di questi risultati fu stabilita indipendentemente da Dickson [6, *c*)] e Pillai [27, *a*)]. Tali risultati furono poi completati da Pillai [27, *b*)], da Rubugunday [31] che dimostrò che

$$B \neq 2^k - A,$$

e finalmente da Niven [25] che provò la

$$g(k) = 2^k + A - 2, \quad \text{se} \quad B = 2^k - A - 2,$$

caso, questo, non ancora risolto precedentemente.

Pertanto le uniche questioni rimaste ancora aperte per quanto si riferisce a $g(k)$ sono le seguenti: a) *Quali sono i veri valori di* g(4) *e* g(5)? b) *La* (2_7) *vale per qualunque* k?

10. Infine altri risultati generali notevoli sono i seguenti

(1_{10}) $G(k) \geq k+1, \quad k \geq 2$; [MAILLET e HURWITZ],

(2_{10}) $G(2^m) \geq 2^{m+2}, \quad m \geq 2$; [KEMPNER],

(3_{10}) $G\{p^m(p-1)\} \geq p^{m+1}, \quad p > 2, \quad m \geq 0$;

(4_{10}) $G\left\{\frac{1}{2}p^m(p-1)\right\} \geq \frac{1}{2}(p^{m+1}-1), \quad p > 2, \quad m \geq 0.$

Ad es. dalla (3_{10}) e dalla (4_{10}) per $p=3$, $m=2$, rispettivamente si ha

$$G(18) \geq 27, \qquad G(9) \geq 13.$$

Dimostrazioni elementari delle (1_{10}), (2_{10}), (3_{10}), (4_{10}) si trovano in [13]. Si noti però che le dimostrazioni delle (2_{10}), (3_{10}) sono del tutto analoghe a quella con cui precedentemente si è dimostrato che è $G(4) \geq 16$.

Oggi di $G(k)$ non si conoscono che i soli due seguenti valori (!) $G(2)=4$, $G(4)=16$ e quindi il campo rimane aperto ad ulteriori ed estese ricerche.

11. Infine dalla teoria delle multigrade [26] si hanno le due seguenti proposizioni:

a) *Esistono infiniti* N *per cui si ha*

$$W(N;\, k,\, k+2) = m,$$

essendo m *arbitrario e quando è* k $= 2, 3, 5$.

Difatti è noto che si hanno multigrade a catena del tipo

$$(1_{11}) \qquad a_{1,1}, \dots, a_{1,k+1} \overset{k}{=} a_{2,1}, \dots, a_{2,k+1} \overset{k}{=} \dots \overset{k}{=} a_{m,1}, \dots, a_{m,k+1}$$

con m arbitrario e nei casi in cui è $k=2, 3, 5$, da ciascuna delle quali si ha

$$N = a^k_{1,1} + \dots + a^k_{1,k+1} + L^k = \dots = a^k_{m,1} + \dots + a^k_{m,1} + L^k$$

per L intero positivo qualsiasi e se si indica con N il valore comune dei membri della precedente.

Invece, poichè per $m=2$ si hanno esempi di (1_{11}) per $k \leq 9$, è

$$(b) \qquad W(N;\, k,\, k+2) = 2,$$

per $k = 4, 6, 7, 8, 9$ e per infiniti N.

BIBLIOGRAFIA

[1] P. Bachmann, *Niedere Zahlentheorie*, Leipzig, 1ª Parte (1902); 2ª Parte (1910).

[2] W. S. Baer, *Beiträge zum Waringschen Problem*, Diss. Göttingen. (1913), 74 pagg.

[3] A. J. Chintschin, *Drei perlen der Zahlentheorie*, « Akademie-Verlag ». Berlin (1951); traduzione dal russo (edizione originale russa, 1948).

[4] Davenport, *a)* « Acta Math. », 71, (1939), 123-43; *b)* « Annals of Math. », 40, (1939), 721-747; c) « Americ. Jour. of Math. », 64, (1942), pp. 199-207.

[5] Davenport and Heilbronn, « Proc. London Math. Soc. », (2), 41, (1936). pp. 143-150.

[6] L. E. Dickson, *a) History of the theory of numbers*, New York, 1934, Vol. II, Cap. XXV; *b)* « Bull. American Math. Soc. », 39, (1933), pp. 701-727; *c)* « Americ. Jour. Math. », 58, (1936), pp. 521-529, 530-535.

[7] Th Estermann, *a) On Waring's problem for fourth and higher powers*, « Acta arithmetica », 2, (1937), pp. 197-211; *b)* « Proc. London Math. Soc. », (2), 41, (1936), pp. 126-142.

[8] A. Fleck, *a)* « Sitzungsber. Berlin Math. Gesell. », 5, (1906), pp. 2-9: *b)* « Math. Ann. », 64, (1907), pp. 561-566.

[9] G. Frobenius, « Sitzungsber. Akad. Wiss. ». Berlin, (1912), pp. 666-670.

[10] M. M. Fuld, *On Waring's problem*, « Proc. Akad. Wetensch. Amsterdam », 41, (1938), pp. 289-290.

[11] Hardy and Littlewood, *a) Some problems of partitio numerorum*, (1920-1928); *b)* « Proc. London Math. Soc. », (2), 28, (1928), pp 518-542; *c)* « Quart. Jour. Math. », 48, (1919), p. 272 e seg.

[12] Hardy and S. Ramanujan, « Proc. London Math. Soc. », (2). 16, (1917), p. 130.

[13] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford, 1954.

[14] F. Hausdorff, « Math. Annalen », 67, (1909), pp. 301-305.

[15] Heilbronn, « Acta Arith. », I, (1936), pp. 212-221.

[16] D. Hilbert, « Göttingen Nachr. », (1909) pp. 17-36; « Math. Ann. ». 67, (1909), pp. 281-305.

[17] A. Hurwitz, *a)* « Math. Annalen », 65, (1908), pp. 424-427; *b)* « Idem », 73, (1912), pp. 173-176.

[18] James, « Trans. Americ. Math. Soc. », 36, (1934), pp. 395-444

[19] A. J. Kempner, *Über das Waringsche Problem und einige Verallgemeinerungen*, Diss. Göttingen, (1912). Vi è riassunto di tale lavoro in « Math. Ann. », 72, (1912), p. 387.

[20] E. Landau, *a)* « Math. Annalen », 66, (1909), pp. 102-105; *b) Vorlesungen über Zahlentheorie*, 3 Voll., Leipzig, 1927; *c)* « Rend. Circolo Mat. di Palermo », 23, (1907), pp. 91-96.

[21] L. LEGENDRE, *Essai sur la théorie des nombres*, (1798). pp. 202 e 398-399; C. F. GAUSS. *Disquisitiones arithmeticae*, Leipzig, 1801, § 291.
[22] LINNIK, « Comptes Rendus (Doklady) Acad. Sc. USRR. », 35, (1942), p. 162
[23] E. LUCAS, *a*) » Nouv. Corresp. Math. », 4, (1878), pp. 323-325: *b*) Nouv. Ann. Math. », (2), 17, (1878), 536-537; *c*) « Nouv. Corresp. Math. », 2), (1876), pp. 101.
[24] E. MAILLET, *a*) « Jour de Math. », (5), 2, (1896), pp. 363 380; *b*) « Bull. Soc. Math. de France », 23, (1895), pp. 40-49.
[25] NIVEN, « Amer. Jour. Math. », 66, (1944), pp. 137-143.
[26] G. PALAMÀ, *I Problemi di Escoit-Tarry e di Prouhet-Tarry*, d'imminente pubblicazione nel « Giorn. di Mat. del Battaglini », in due puntate di complessive pp. 100 circa.
[27] PILLAI, *a*) « Jour. Indian Math. Soc. », (2), 2, (1936), pp. 16-44, e « Proc. Indian Acad. Sc. », (A), 4, (1936), p. 261; *b*) « Idem », 12, (1940), pp 30-40.
[28] S. REALIS, « Nouv. Corresp. Math. », 4, (1878), pp. 209-210.
[29] R. REMAK, « Math. Annalen », 72, (1912), pp 153-156.
[30] G. RICCI, *Problemi secolari e risposte recenti nel campo della aritmetica*, « Atti del Convegno Matematico » dell'8-12 Nov., (1942).
[31] RUBUGUNDAY, » Jour. Indian Math. Soc. », (2), 6, (1942), pp. 192-198.
[32] J. SCHUR, « Math. Annalen », 66, (1909), p. 105. in un lavoro pubblicato da LANDAU.
[33] E. STRIDSBERG, « Arkiv för Mat., Astr., Fysik », 6, (1910-1911), N° 32, N° 39. Questo lavoro è riassunto in Francese in « Math. Annalen », 72, (1912), pp. 145-152.
[34] J. V. USPENSKY and M. A. HEASLET, *Elementary number theory*, New York, (1939), pp. 465-474.
[35] I. M. VINOGRADOFF, *The method of trigonometrical sums in the theory of numbers*, « Trav. Inst. math. Stekloff », 23, (1947), 109 pp. (traduzione inglese, con aggiunte, di K. F. ROTH e A DAVENPORT, Interscience Publ., London, X + 180 pp.).
[36] G. L. WATSON. « Jour. London Math. Soc. », 26, (1951), pp. 153-156.
[37] WESTERN, « Jour. London Math. Soc. », I, (1926), pp. 244-250.
[38] A. WIEFERICH, *a*) « Math. Annalen », 66, (1909), pp. 106-108; *b*) « Idem », 67, (1909), pp. 61-75; *c*) « Idem », 66, (1909), pp. 95-101.