Letterio Toscano

Relazioni e disuguaglianze su polinomi classici.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.1, p. 71–79.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_1_71_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1957.

Relazioni e disuguaglianze su polinomi classici.

Nota di LETTERIO TOSCANO (a Messina)

Sunto. - *È contenuto nelle ultime righe del primo paragrafo.*

1. Per i polinomi di HERMITE

$$H_{2n}(x) = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^n n!} {}_1F_1\left(-n\,;\ \frac{1}{2}\,;\ \frac{x^2}{2}\right)$$

$$H_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n (2n+1)!}{2^n n!} x\, {}_1F_1\left(-n\,;\ \frac{3}{2}\,;\ \frac{x^2}{2}\right),$$

di LAGUERRE

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+1,\ n)}{n!}\, {}_1F_1(-n\,;\ \alpha+1\,;\ x),$$

di LEGENDRE

$$P_n(x) = {}_2F_1\left(-n,\ n+1\,;\ 1\,;\ \frac{1-x}{2}\right),$$

ultrasferici

$$P_n^{(\lambda)}(x) = \frac{(2\lambda,\ n)}{n!}\, {}_2F_1\left(-n,\ 2\lambda+n\,;\ \lambda+\frac{1}{2}\,;\ \frac{1-x}{2}\right),$$

valgono le relazioni

$$(1) \qquad H_n^2(x) - H_{n+1}(x) H_{n-1}(x) = (n-1)! \sum_{0}^{n-1}{}_i \frac{H_i^2(x)}{i!},$$

$$(2) \qquad [L_n^{(\alpha)}(x)]^2 - L_{n+1}^{(\alpha)}(x) L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha,\ n)}{(n+1)!} \sum_{0}^{n}{}_i \frac{i!}{(\alpha,\ i)} [L_i^{(\alpha-1)}(x)]^2 \qquad \alpha > 0,$$

$$(3) \qquad P_n^2(x) - P_{n+1}(x) P_{n-1}(x) =$$
$$= \frac{1-x^2}{n(n+1)} \sum_{0}^{n-1}{}_i (2i+1) \left(\frac{1}{i+1} + \frac{1}{i+2} + \dots + \frac{1}{n}\right) P_i^2(x),$$

$$(4) \qquad \left[\frac{P_n^{(\lambda)}(x)}{P_n^{(\lambda)}(1)}\right]^2 - \frac{P_{n+1}^{(\lambda)}(x)}{P_{n+1}^{(\lambda)}(1)} \frac{P_{n-1}^{(\lambda)}(x)}{P_{n-1}^{(\lambda)}(1)} =$$
$$= \frac{n!\ (n-1)!\ 4\lambda(1-x^2)}{\Gamma(n+2\lambda)\Gamma(n+2\lambda+1)} \sum_{0}^{n-1}{}_i \sum_{i}^{n-1}{}_j \frac{(i+\lambda)(2\lambda,\ j)[\Gamma(i+2\lambda)]^2}{i!\ (j+1)!\ (2\lambda,\ i)} \left[\frac{P_i^{(\lambda)}(x)}{P_i^{(\lambda)}(1)}\right]^2$$
$$\lambda \neq 0 \quad \lambda > -\frac{1}{2}.$$

Per quanto la loro dimostrazione sia semplice, chè basta riferirsi alla formula sommatoria di CHRISTOFFEL-DARBOUX, ad esse si è pervenuti in questi ultimi anni estendendo la ricerca di *se e quando i primi membri di esse relazioni sono positivi.*

La letteratura dell'argomento si può trovare quasi completa in un recente lavoro di A. E. DANESE [1].

In questa nota dapprima perfeziono la relazione (4) e ne aggiungo altre analoghe per polinomi associati ai precedenti classici. Poi assegno una nuova relazione sui polinomi di HERMITE, con relative disuguaglianze. E tale risultato costituisce lo scopo principale del lavoro.

2. Cominciamo con la trasformazione della relazione (4). trovata da DANESE nella sua citata memoria, in altra più semplice e definitiva.

Posto $S_i = \sum_{i}^{n-1}{}_j \dfrac{(2\lambda,\ j)}{(j+1)!}$ si ha successivamente

$$S_i = \sum_{0}^{n-i-1}{}_l \frac{(2\lambda,\ l+i)}{(l+i+1)!} = \sum_{0}^{n-i-1}{}_l \frac{(2\lambda,\ n-l-1)}{(n-l)!}.$$

E poichè

$$(2\lambda,\ n-l-1) = \frac{(2\lambda,\ n-1)}{(2\lambda+n-l-1,\ l)} = \frac{(-1)^l(2\lambda,\ n-1)}{(-2\lambda-n+2,\ l)},$$

segue

$$S_i = \frac{(2\lambda,\ n-1)}{n!} \sum_{0}^{n-i-1}{}_l \frac{(-n,\ l)}{(-2\lambda-n+2,\ l)}.$$

Ancora

$$S_i = \frac{(2\lambda,\ n-1)}{n!}\left[\sum_{0}^{n}{}_l \frac{(-n,\ l)}{(-2\lambda-n+2,\ l)} - \sum_{n-i}^{n}{}_l \frac{(-n,\ l)}{(-2\lambda-n+2,\ l)}\right]$$

$$= \frac{(2\lambda,\ n-1)}{n!}\left[\sum_{0}^{n}{}_l \frac{(-n,\ l)}{(-2\lambda-n+2,\ l)} - \sum_{0}^{i}{}_l \frac{(-n,\ n-i+l)}{(-2\lambda-n+2,\ n-i+l)}\right]$$

$$= \frac{(2\lambda,\ n-1)}{n!}\left[\sum_{0}^{n}{}_l \frac{(-n,\ l)}{(-2\lambda-n+2,\ l)} - \frac{(-n,\ n-i)}{(-2\lambda-n+2,\ n-i)} \sum_{0}^{i}{}_l \frac{(-i,\ l)}{(-2\lambda-i+2,\ l)}\right]$$

$$= \frac{(2\lambda,\ n-1)}{n!}\Big[{}_2F_1(-n,\ 1;\ -2\lambda-n+2;\ 1) - \\ - \frac{(i+1,\ n-i)}{(2\lambda+i-1,\ n-i)}\ {}_2F_1(-i,\ 1;\ -2\lambda-i+2;\ 1)\Big].$$

[1] *Explicit evaluations of Turàn expressions*, Annali di Matematica pura e applicata. (IV), XXXVIII, 1955, pp. 339-348.

Cfr. pure L. TOSCANO, *Su una disuguaglianza relativa ai polinomi di* HERMITE, Bollettino della Unione Matematica Italiana, (III). VII, 1952, pp. 171-173.

Ma

$$ {}_2F_1(-n,\ 1\,;\ -2\lambda-n+2\,;\ 1)=\frac{2\lambda+n-1}{2\lambda-1}\,, $$

e quindi

$$ S_i=\frac{(2\lambda,\ n-1)}{(2\lambda+i,\ n-i-1)\,n\,!}\,\frac{(2\lambda+i,\ n-i)-(i+1,\ n-i)}{2\lambda-1}\,. $$

Risalendo ora alla (4) si ottiene

$$ (4') \qquad \left[\frac{P_n^{(\lambda)}(x)}{P_n^{(\lambda)}(1)}\right]^2-\frac{P_{n+1}^{(\lambda)}(x)}{P_{n+1}^{(\lambda)}(1)}\,\frac{P_{n-1}^{(\lambda)}(x)}{P_{n-1}^{(\lambda)}(1)}= $$

$$ =\frac{(n-1)\,!\,4\lambda(1-x^2)}{\Gamma(n+2\lambda)\Gamma(n+2\lambda+1)}\sum_0^{n-1}{}_i\,\frac{(i+\lambda)[\Gamma(i+2\lambda)]^2}{i\,!}\,\frac{(2\lambda+i,\,n-i)-(i+1,\,n-i)}{2\lambda-1}\left[\frac{P_i^{(\lambda)}(x)}{P_i^{(\lambda)}(1)}\right]^2 $$

$$ \lambda\neq0 \quad \lambda>-\frac{1}{2}\,. $$

Questa è più semplice della (4) in quanto al secondo membro di essa si presenta una volta e non due, il simbolo di sommatoria.

Per $\lambda=1$ e $x=\cos\theta$ si ha la relazione

$$ (5) \qquad n(n+2)\,\mathrm{sen}^2(n+1)\theta-(n+1)^2\,\mathrm{sen}\,n\theta\,\mathrm{sen}\,(n+2)\theta= $$

$$ =4\,\mathrm{sen}^2\theta\sum_0^{n-1}{}_i\,(n-i)\,\mathrm{sen}^2(i+1)\theta. $$

3. Ai polinomi richiamati nel primo paragrafo corrispondono le funzioni di seconda specie

$$ h_{2n}(x)=(-1)^n2^nn\,!\ x\,{}_1F_1\left(-n+\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{2}\,;\,\frac{x^2}{2}\right) $$

$$ h_{2n+1}(x)=(-1)^{n+1}2^nn\,!\ {}_1F_1\left(-n-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{x^2}{2}\right) $$

$$ l_n^{(\alpha)}(x)=-\Gamma(\alpha)x^{-\alpha}\,{}_1F_1(-\alpha-n\,;\,1-\alpha\,;\,x) $$

$$ Q_n^{(\lambda)}(x)=\frac{\Gamma(2\lambda+n)(x-1)^{-2\lambda-n}}{2^{n+1}(\lambda,\ n+1)}\,{}_2F_1\left(2\lambda+n,\ \lambda+n+\frac{1}{2}\,;\,2\lambda+2n+1\,;\,\frac{2}{1-x}\right). $$

E con le formule di riduzione

$$ h_n(x)=H_n(x)h_0(x)-e^{\frac{x^2}{2}}G_{n-1}(x) $$

$$ l_n^{(\alpha)}(x)=L_n^{(\alpha)}(x)l_0^{(\alpha)}(x)+\Gamma(\alpha+1)x^{-\alpha}e^xF_{n-1}^{(\alpha)}(x) $$

$$ Q_n^{(\lambda)}(x)=P_n^{(\lambda)}(x)Q_0^{(\lambda)}(x)-\Gamma(2\lambda)(x^2-1)^{-\lambda+\frac{1}{2}}R_{n-1}^{(\lambda)}(x) $$

restano introdotti i polinomi associati $G_{n-1}(x)$, $F_{n-1}^{(\alpha)}(x)$, $R_{n-1}^{(\lambda)}(x)$.

Anche per questi valgono relazioni del tipo (1), ..., (4'), e si ha

$$G_n^2(x) - G_{n+1}(x)G_{n-1}(x) = n!\left[1 + \sum_0^{n-1}{}_i \frac{G_i^2(x)}{(i+1)!}\right], \tag{6}$$

$$(n+1)[F_n^{(\alpha)}(x)]^2 - (n+2)F_{n+1}^{(\alpha)}(x)F_{n-1}^{(\alpha)}(x) + F_n^{(\alpha)}(x)F_{n-1}^{(\alpha)}(x) = \tag{7}$$

$$= \frac{(\alpha+1, n)}{(n+1)!}\left\{1 + x\sum_0^{n-1}{}_i \frac{(i+1)!}{(\alpha+1, i+1)}[F_i^{(\alpha)}(x)]^2\right\} \qquad \alpha > -1,$$

$$(n+1)[R_n^{(\lambda)}(x)]^2 - (n+2)R_{n+1}^{(\lambda)}(x)R_{n-1}^{(\lambda)}(x) + R_n^{(\lambda)}(x)R_{n-1}^{(\lambda)}(x) = \tag{8}$$

$$= \frac{(2\lambda, n)}{(n+1)!}\left\{1 + 2(1-x^2)\sum_0^{n-1}{}_i \frac{(\lambda+i+1)(i+1)!}{(2\lambda, i+1)}[R_i^{(\lambda)}(x)]^2\right\} \quad \lambda > 0.$$

La prima è nota ([2]). Le altre due si ottengono a partire dalla formula sommatoria di CHRISTOFFEL-DARBOUX, e osservando che ([3])

$$x\frac{d}{dx}F_n^{(\alpha)}(x) = (n+2)[F_{n+1}^{(\alpha)}(x) - F_n^{(\alpha)}(x)] - L_{n+1}^{(\alpha)}(x)$$

$$(1-x^2)\frac{d}{dx}R_n^{(\lambda)}(x) = (n+2)[xR_n^{(\lambda)}(x) - R_{n+1}^{(\lambda)}(x)] + P_{n+1}^{(\lambda)}(x),$$

e che

$$L_n^{(\alpha)}(x)F_n^{(\alpha)}(x) - L_{n+1}^{(\alpha)}(x)F_{n-1}^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+1, n)}{(n+1)!}$$

$$P_n^{(\lambda)}(x)R_n^{(\lambda)}(x) - P_{n+1}^{(\lambda)}(x)R_{n-1}^{(\lambda)}(x) = \frac{(2\lambda, n)}{(n+1)!}.$$

Seguono le disuguaglianze

$$(n+1)[F_n^{(\alpha)}(x)]^2 - (n+2)F_{n+1}^{(\alpha)}(x)F_{n-1}^{(\alpha)}(x) + F_n^{(\alpha)}(x)F_{n-1}^{(\alpha)}(x) > 0, \; x > 0, \; \alpha > -1. \tag{9}$$

$$(n+1)[R_n^{(\lambda)}(x)]^2 - (n+2)R_{n+1}^{(\lambda)}(x)R_{n-1}^{(\lambda)}(x) + R_n^{(\lambda)}(x)R_{n-1}^{(\lambda)}(x) > 0, \; -1 \le x \le 1, \; \lambda > 0. \tag{10}$$

([2]) L. KOSCHMIEDER, *Das Vorzeichen gewisser aus Hermiteschen Polynomen zweiter Art gebildeter Determinanten*, Akad. Wiss. Wien, Math. Nat. Kl. Anz., 1951, pp. 165-167.

([3]) L. TOSCANO, *Polinomi associati a polinomi classici*, Rivista di Matematica della Università di Parma, 4, 1953, pp. 387-402.

4. Con particolare riferimento ai polinomi di HERMITE richiamiamo la più generale formula di riduzione

$$h_\nu(x)H_{n+\nu}(x) - H_\nu(x)h_{n+\nu}(x) = \nu\,!\; e^{\frac{x^2}{2}} G_{n-1,\,\nu}(x) \qquad \nu \geq 0.$$

E per i polinomi $G_{n,\,\nu}(x)$ si ha [4]

$$(11) \qquad G^2_{n,\nu}(x) - G_{n+1,\,\nu}(x)G_{n-1,\,\nu}(x) = (n+\nu)!\left[\frac{1}{\nu\,!} + \sum_{0}^{n-1}{}_i \frac{G^2_{i,\,\nu}(x)}{(\nu+i+1)\,!}\right],$$

la quale si riduce alle (1) e (6) per $\nu = -1$ e $\nu = 0$.

5. Altra estensione della (1), ma di tipo diverso delle precedenti, è la nuova relazione

$$(12) \qquad \frac{1}{2}\binom{2m}{m} H_n{}^2(x) + \sum_{1}^{m}{}_i (-1)^i \binom{2m}{m-i} H_{n+i}(x)\,H_{n-i}(x) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(2m)!}{m\,!}\,(n-m)\,!\sum_{m}^{n}{}_j \binom{j-1}{m-1}\frac{H^2{}_{n-j}(x)}{(n-j)\,!} \qquad 1 \leq m \leq n.$$

Per provarla premettiamo un risultato sulle funzioni ipergeometriche ad argomento unitario.

È noto che [5]

$$ {}_4F_3\left[\begin{matrix} a,\ b,\ c,\ -m\,; \\ k-b,\ k-c,\ k+m\,; \end{matrix}\ 1\right] =$$

$$= \frac{(k,\,m)(k-b-c,\,m)}{(k-b,\,m)(k-c,\,m)}\,{}_5F_4\left[\begin{matrix} \frac{1}{2}k-\frac{1}{2}a,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}a,\ b,\ c,\ -m\,; \\ k-a,\ \frac{1}{2}k,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}k,\ b+c-k+1-m\,; \end{matrix}\ 1\right].$$

— a segue

$$ {}_4F_3\left[\begin{matrix} a,\ b,\ c,\ -m\,; \\ a-b,\ a-c,\ a+m\,; \end{matrix}\ 1\right] =$$

$$= \frac{(a,\,m)(a-b-c,\,m)}{(a-b,\,m)(a-c,\,m)}\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,{}_4F_3\left[\begin{matrix} \frac{1}{2},\ b,\ c,\ -m\,; \\ \frac{1}{2}a,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}a,\ b+c-a+1-m\,; \end{matrix}\ 1\right]\right\}.$$

[4] L. TOSCANO, *Formule di riduzione tra funzioni e polinomi classici*, Rivista di Matematica della Università di Parma, 6, 1955, pp. 117-140.

[5] W. N. BAILEY, *Generalized hypergeometric series*, Cambridge University Press, 1935.

E per $a_i = 1$

$$ {}_4F_3\left[\begin{matrix}1,\ b,\ c,\ -m;\\ 1-b,\ 1-c,\ m+1;\end{matrix}\ 1\right] = \frac{m!\,(1-b-c,\ m)}{(1-b,\ m)(1-c,\ m)}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}b,\ c,\ -m;\\ 1,\ b+c-m;\end{matrix}\ 1\right]\right\}. $$

D'altra parte vale la formula di SAALSCHÜTZ

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix}-m,\ b,\ c;\\ d,\ e;\end{matrix}\ 1\right] = \frac{\Gamma(d)\Gamma(1-m-e)\Gamma(1+b-e)\Gamma(1+c-e)}{\Gamma(1-e)\Gamma(d+m)\Gamma(d-b)\Gamma(d-c)} $$

con $d + e = b + c - m + 1$.

E applicandola al caso nostro si trova la formula

$$ (13)\qquad {}_4F_3\left[\begin{matrix}1,\ b,\ c,\ -m;\\ 1-b,\ 1-c,\ m+1;\end{matrix}\ 1\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{m!\,(1-b-c,\ m)}{(1-b,\ m)(1-c,\ m)}\,. $$

Ciò premesso, per provare la (12) prendiamo le mosse dal suo primo membro che denotiamo con Δ. Si sa che

$$ H_{n+i}(x)H_{n-i}(x) = \sum_{0}^{n-i}{}_r\ r!\binom{n+i}{r}\binom{n-i}{r} H_{2n-2r}(x), $$

$$ H_{2n-2r}(x) = \sum_{0}^{n-r}{}_s\ (-1)^s s!\binom{n-r}{s}^2 H^2_{n-r-s}(x). $$

Quindi

$$ H_{n+i}(x)H_{n-i}(x) = \sum_{0}^{n}{}_j\ H^2_{n-j}(x)\sum_{0}^{j}{}_r\ (-1)^{j-r} r!\binom{n+i}{r}\binom{n-i}{r}(j-r)!\binom{n-r}{j-r}^2. $$

E brevemente

$$ H_{n+i}(x)H_{n-i}(x) = \sum_{0}^{n}{}_j\ \sigma_j H^2_{n-j}(x) $$

con $\sigma_0 = 1$

$$ \sigma_j = \frac{(-1)^j(n+i)!\ (n-i)!}{(n-j)!\ (n-j)!\ j!}\sum_{0}^{j}{}_r\ \frac{(-j,\ r)(n-r-i+1,\ i)}{r!\ (n-r+1,\ i)}\,. $$

Allora

$$ \Delta = \frac{1}{2}\binom{2m}{m} H^2_n(x) + \left[\sum_{1}^{m}{}_i\ (-1)^i\binom{2m}{m-i}\right] H^2_n(x) + $$

$$ + \sum_{1}^{m}{}_i\ (-1)^i\binom{2m}{m-i}\sum_{1}^{n}{}_j\ \sigma_j H^2_{n-j}(x). $$

E poichè

$$\sum_{1}^{m} {}_i (-1)^i \binom{2m}{m-i} = -\frac{1}{2}\binom{2m}{m},$$

resta

$$\Delta = \sum_{1}^{m} {}_i (-1)^i \binom{2m}{m-i} \sum_{1}^{n} {}_j \sigma_j H^2{}_{n-j}(x);$$

cioè esplicitamente

$$\Delta = \sum_{1}^{n} {}_j \frac{(-1)^j}{[(n-j)!]^2 j!} H^2{}_{n-j}(x) \sum_{0}^{j} {}_r \frac{(-j,\ r)}{r!} \cdot$$

$$\cdot \sum_{1}^{m} {}_i (-1)^i \binom{2m}{m-i} (n+i)!\,(n-i)!\, \frac{(n-r-i+1,\ i)}{(n-r+1,\ i)}.$$

Intanto la somma rispetto all'indice i si può scrivere

$$\binom{2m}{m} n!\,n! \sum_{1}^{m} {}_i \frac{(-m,\ i)(n+1,\ i)(-n+r,\ i)(1,\ i)}{(-n,\ i)(m+1,\ i)(n-r+1,\ i) i!},$$

cioè

$$\binom{2m}{m} n!\,n!\,{}_4F_3 \left[\begin{matrix} -m,\ n+1,\ -n+r,\ 1; \\ -n,\ m+1,\ n-r+1; \end{matrix}\ 1\right].$$

E applicando la (13) con $b = n+1$ e $c = -n+r$, si trova che tale somma è uguale a

$$\frac{(-1)^m}{2} \frac{(2m)!\,n!\,(n-m)!\,(-r,\ m)}{m!\,(n-r+1,\ m)} + \frac{1}{2}\binom{2m}{m} n!\,n!.$$

Pertanto risalendo si ha

$$\Delta = \sum_{1}^{n} {}_j \frac{(-1)^j}{[(n-j)!]^2 j!} H^2{}_{n-j}(x) \sum_{0}^{j} {}_r \frac{(-j,r)}{r!} \left[\frac{(-1)^m}{2} \frac{(2m)!n!(n-m)!(-r,m)}{m!(n-r+1,m)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\binom{2m}{m} n!\,n!\right].$$

Successivamente

$$\Delta = \frac{(-1)^m}{2} \frac{(2m)!n!(n-m)!}{m!} \sum_{1}^{n} {}_j \frac{(-1)^j}{[(n-j)!]^2 j!} H^2{}_{n-j}(x) \sum_{0}^{j} {}_r \frac{(-j,r)(-r,m)}{(n-r+1,m) r!} +$$

$$+ \frac{1}{2}\binom{2m}{m} n!\,n! \sum_{1}^{n} {}_j \frac{(-1)^j}{[(n-j)!]^2 j!} H^2{}_{n-j}(x) \sum_{0}^{j} {}_r \frac{(-j,\ r)}{r!}.$$

E poichè

$$\sum_{0}^{j}{}_r \frac{(-j,\ r)}{r\,!} = 0,$$

resta

$$\Delta = \frac{(-1)^m}{2} \frac{(2m)\,!\,n\,!\,(n-m)\,!}{m\,!} \sum_{m}^{n}{}_j \frac{(-1)^j}{[(n-j)\,!\,]^2 j\,!} H^2{}_{n-j}(x) \sum_{m}^{j}{}_r \frac{(-j,r)(-r,\ m)}{(n-r+1,m)r\,!}\,.$$

D'altra parte

$$\sum_{m}^{j}{}_r \frac{(-j,\ r)(-r,\ m)}{(n-r+1,\ m)r\,!} = \sum_{0}^{j-m}{}_l \frac{(-j,\ l+m)(-l-m,\ m)}{(n-m-l+1,\ m)(l+m)\,!}\,.$$

E poichè

$$(-j,\ l+m) = (-j,\ m)(-j+m,\ l)$$

$$(-l-m,\ m) = \frac{(-1)^m(l+m)\,!}{l\,!}$$

$$\frac{1}{(n-m-l+1,\ m)} \frac{(-1)^m(-n,\ l)}{(-n,\ m)(-n+m,\ l)}\,,$$

la precedente somma si può presentare nella forma

$$\frac{(-j,\ m)}{(-n,\ m)} \sum_{0}^{j-m}{}_l \frac{(-j+m,\ l)(-n,\ l)}{(-n+m,\ l)l\,!}\,,$$

e simbolicamente

$$\frac{(-j,\ m)}{(-n,\ m)}\, {}_2F_1(-j+m, -n;\ -n+m;\ 1).$$

Da cui risulta uguale a

$$\frac{(-j,\ m)(m,\ j-m)}{(-n,\ j)}\,.$$

Risalendo si ha

$$\Delta = \frac{(-1)^m}{2} \frac{(2m)\,!\,n\,!\,(n-m)\,!}{m\,!} \sum_{m}^{n}{}_j \frac{(-1)^j}{[(n-j)\,!\,]^2 j\,!} \frac{(-j,\ m)(m,\ j-m)}{(-n,\ j)} H^2{}_{n-j}(x),$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \frac{(2m)\,!}{m\,!} (n-m)\,! \sum_{m}^{n}{}_j \binom{j-1}{m-1} \frac{H^2{}_{n-j}(x)}{(n-j)\,!}\,.$$

E così resta stabilita la (12).

6. Dalla (12), al variare dell'indice m da 1 a n, si ha il sistema notevole di relazioni

$$(12-1) \equiv (1) \qquad H_n^2(x) - H_{n+1}(x)H_{n-1}(x) = (n-1)!\sum_1^n{}_j \frac{H^2_{n-j}(x)}{(n-j)!},$$

$$(12-2) \qquad 3H_n^2(x) - 4H_{n+1}(x)H_{n-1}(x) + H_{n+2}(x)H_{n-2}(x) = \\ = 6(n-2)!\sum_2^n{}_j (j-1)\frac{H^2_{n-j}(x)}{(n-j)!},$$

$$(12-3) \qquad 10H_n^2(x) - 15H_{n+1}(x)H_{n-1}(x) + 6H_{n+2}(x)H_{n-2}(x) - \\ - H_{n+3}(x)H_{n-3}(x) = 30(n-3)!\sum_3^n{}_j (j-1)(j-2)\frac{H^2_{n-j}(x)}{(n-j)!},$$

$$(12-n) \qquad \frac{1}{2}\binom{2n}{n}H_n^2(x) + \sum_1^n{}_i(-1)^i\binom{2n}{n-i}H_{n+i}(x)H_{n-i}(x) = \frac{1}{2}\frac{(2n)!}{n!}.$$

E di queste solo la prima è nota.

In ogni caso si può affermare che il polinomio di grado $2n-2m$ in x

$$\frac{1}{2}\binom{2m}{m}H_n^2(x) + \sum_1^m{}_i(-1)^i\binom{2m}{m-i}H_{n+i}(x)H_{n-i}(x)$$

è definito positivo su tutto l'asse reale.

Dalla

$$3H_n^2(x) - 4H_{n+1}(x)H_{n-1}(x) + H_{n+2}(x)H_{n-2}(x) > 0,$$

sostituendo a x una radice $x_{n-2,i}$ dell'equazione $H_{n-2}(x) = 0$, o $x_{n+2,i}$ dell'altra $H_{n+2}(x) = 0$, si ottengono le

$$H_n^2(x_{n-2,i}) - \frac{4}{3}H_{n+1}(x_{n-2,i})H_{n-1}(x_{n-2,i}) > 0$$

$$H_n^2(x_{n+2,i}) - \frac{4}{3}H_{n+1}(x_{n+2,i})H_{n-1}(x_{n+2,i}) > 0.$$

E queste provano la disuguaglianza

$$H_n^2(x) - KH_{n+1}(x)H_{n-1}(x) > 0$$

per i valori $x_{n-2,i}$, $x_{n+2,i}$ di x e con $K = \frac{4}{3} > 1$.

Analoghe disuguaglianze si possono stabilire con le (10 — 3), ..., (10 — n).