Bollettino Unione Matematica Italiana

Ugo Barbuti

Sulla nozione di t_∞-similitudine tra matrici e sulla stabilità dei sistemi differenziali lineari.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.1, p. 61–66.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_1_61_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1957.

Sulla nozione di t_∞-similitudine tra matrici e sulla stabilità dei sistemi differenziali lineari.

Nota di UGO BARBUTI (a Pisa)

Sunto. - *Riprendendo la nozione di t_∞-similitudine tra matrici, introdotta recentemente nella teoria della stabilità dei sistemi differenziali lineari, si danno due criteri di t_∞-similitudine ad una matrice diagonale.*

In una recente nota lincea (1) R. CONTI ha introdotto la nozione di t-similitudine tra matrici, analoga alla «Kinematic similarity» introdotta, pure recentemente, da L. MARKUS (2), e quella, più generale, di t_∞-similitudine. Quest'ultima bene si presta a chiarire alcuni aspetti del problema della stabilità dei sistemi differenziali lineari. Riprendiamo in questa breve nota le interessanti considerazioni del CONTI con lo scopo di aggiungere qualche osservazione ed indicare alcuni risultati che si collegano con una recentissima nostra ricerca (3).

1. Usando le stesse notazioni del CONTI, diciamo $\mathfrak{M}$ la classe delle matrici $A(t)$ $(n \times n)$ (reali o complesse) funzioni di t, per $t \geq 0$, e sommabili in ogni tratto finito di $(0, +\infty)$; diciamo τ lo insieme delle matrici $T(t)$ (reali o complesse), definite ancora per $t \geq 0$, assolutamente continue (4), dotate di inversa $T^{-1}(t)$ ed aventi norma limitata (5) così come le loro inverse. Se $A(t)$ e $B(t)$ appartengono ad $\mathfrak{M}$, diciamo, con CONTI, che $A(t)$ è t_∞-simile a $B(t)$ se esiste una matrice $T(t) \in \tau$, per cui è:

$$\dot{T}(t) + T(t)B(t) - A(t)T(t) = Z(t), \tag{1}$$

ove $Z(t)$ è assolutamente integrabile (6).

(1) R. CONTI, *Sulla t-similitudine tra matrici etc.*, «Rend. Acc. Lincei», S. VIII, V. XIX, (1955), pp. 247-250. Si veda anche la nuovissima opera: G. SANSONE e R. CONTI, *Equazioni differenziali non lineari*, Mon. del Consiglio Naz. delle Ricerche, ed. Cremonese, Roma, (1956), a p. 557 e 600.

(2) Si veda la nota (2) del lavoro citato in (1).

(3) U. BARBUTI, *Contributi al problema della stabilità per i sistemi differenziali lineari ordinari*, in corso di stampa sugli Ann. della Sc. Norm. Sup. di Pisa. Questo lavoro sarà nel seguito richiamato con la sigla « *C* ».

(4) L'assoluta continuità è intesa in ogni tratto finito di $(0, +\infty)$.

(5) Se $T(t) = [t_{ik}(t)]$, la norma di $T(t)$ si definisce con $\| T(t) \| = \Sigma \mid t_{ik}(t) \mid$.

(6) In $(0, +\infty)$; intenderemo sempre, per il seguito, che assolutamente integrabile voglia significare su questo intervallo anche se ciò sarà taciuto. Se la matrice $Z(t)$ è la matrice nulla allora $A(t)$ é detta t-simile alla $B(t)$ (Si veda il lavoro cit. in (1)). È allora chiaro che se $A(t)$ è t-simile a $B(t)$ le è anche t_∞-simile.

Questa relazione è riflessiva, simmetrica e transitiva; essa è poi illuminata dalla proposizione seguente (7):

Se i sistemi differenziali :

$$\dot{x} = A(t)x \tag{2}$$

$$\dot{y} = B(t)y \tag{3}$$

hanno matrici A(t), B(t) t_∞*-simili allora la stabilità uniforme e ristretta* (8) *di uno dei due sistemi induce quella dello stesso nome sull'altro.*

Notiamo anche che : *Se* A(t) *e* B(t) *differiscono per* Z(t), *matrice assolutamente integrabile, esse sono* t_∞*-simili.*

Infatti se $A(t) = B(t) + Z(t)$ si può soddisfare alla (1) prendendo per $T(t)$ la matrice identica.

2. Volendo utilizzare la nozione di t_∞-similitudine al fine di decidere della stabilità uniforme (o ristretta) del sistema (2), ci si deve orientare nella ricerca di un qualche sistema (3) che sia uniformemente stabile (o stabile in senso stretto) e la cui matrice $B(t)$ sia t_∞-simile alla $A(t)$ (9).

Supponiamo che $A(t)$ abbia radici caratteristiche tutte semplici per ogni t; essa ammette allora la forma canonica di JORDAN nella trasformazione per similitudine ; forma che riesce, nelle nostre condizioni, diagonale. Viene allora spontaneo di ricercare in quali condizioni $A(t)$ possa riuscire t_∞-simile alla sua forma canonica. Ciò si verifica, ad es., nei casi previsti dal seguente:

TEOREMA 1. *Se* A(t) *è a variazione limitata* (10) *e, posto* $L = \lim A(t)$, L *ha radici caratteristiche tutte semplici, allora* A(*t*) *è* t_∞*-simile alla sua forma canonica.*

Supponiamo inizialmente che $A(t)$ sia anche assolutamente continua; in tali condizioni le radici caratteristiche di $A(t)$ sono semplici, assolutamente continue e a variazione limitata in $(t', +\infty)$

(7) Cfr. il lavoro citato in (1).

(8) A chiarimento di questo enunciato va notato cha la t_∞-similitudine non conserva la stabilità ordinaria (Cfr. il lavoro citato in (1)). Per le nozioni di stabilità ordinaria, uniforme, ristretta vedasi, ad es., la memoria: R. CONTI, *Sulla stabilità dei sistemi di equazioni differenziali lineari;* « Riv. di Mat. della Univ. di Parma », (1955).

(9) Questa tecnica è frequentemente usata nella teoria della stabilità.

(10) sull'intervallo $(0, +\infty)$; intenderemo sempre per il seguito, quando parleremo di funzioni a variazione limitata, che lo siano su questo intervallo.

$(t' \geq 0)$ ([11]), e, potremo supporre sempre $t'=0$. Esiste inoltre (si può ancora supporre in $(0. +\infty)$) una matrice $T(t) \in \tau$, i cui elementi si costruiscono razionalmente con quelli di $A(t)$ e con le sue radici caratteristiche ([12]), la quale trasforma, per similitudine, $A(t)$ alla sua forma canonica. Da ciò segue che $T(t)$ è a variazione limitata e che perciò $\dot{T}(t)$ è assolutamente integrabile. Riuscendo, dunque, $A(t)T(t) - T(t)C(t) = 0$ e $\dot{T}(t)$ assolutamente integrabile, sarà verificata, con questa $T(t)$, la (1).

Se $A(t)$ non è assolutamente continua si può provare la stessa tesi, utilizzando il seguente lemma:

LEMMA. *Se* A(t) *è a variazione limitata* ([13]) *esistono due matrici* $A_1(t)$, $A_2(t)$, *tali che* $A_1(t)$ *è assolutamente continua,* $A_1(t)$, $\dot{A}_1(t)$ *sono a variazione limitata e inoltre* $A_2(t)$ *è assolutamente integrabile, per le quali si ha:*

$$A(t) = A_1(t) + A_2(t) \quad ([14]).$$

Si consideri la matrice $T(t) \in \tau$ che trasforma $A_1(t)$ alla sua forma canonica $C_1(t)$. Avremo:

$$A_1(t)T(t) - T(t)C_1(t) = 0 \tag{4}$$

e $\dot{T}(t)$ assolutamente integrabile, Poichè $A_2(t)$ è assolutamente integrabile e inoltre $A_2(t) \to 0$ (Cfr. nota (14)), se diciamo $C(t)$ la forma canonica di $A(t)$ si ha: $C(t) = C_1(t) + R(t)$ con $R(t)$ diagonale e assolutamente integrabile ([15]). Da ciò segue, per la (4), che:

$$\dot{T}(t) + A(t)T(t) + T(t)C(t) = \dot{T}(t) + (A_1(t) + A_2(t))T(t) - T(t)(C_1(t) + R(t)) =$$
$$= \dot{T}(t) + A_2(t)T(t) - T(t)R(t)$$

che è una matrice assolutamente integrabile per essere tali le $\dot{T}(t)$, $A_2(t)$ ed $R(t)$. Ciò che prova il teorema.

3. Vogliamo osservare che se $A(t)$ è ancora a variazione limitata ed ha radici tutte semplici per ogni t, ma cio non avviene per L,

([11]) Cfr. L. CESARI, *Un nuovo criterio di stabilità etc.*, «Ann. della Sc. Norm. Sup. di Pisa», S. II, V. XI, (1940), a p. 167.

([12]) Cfr. L. CESARI in loco citato (nota prec.).

([13]) Si veda la nota ([10]).

([14]) Rimandiamo al lavoro «C». Se consideriamo la successione $\{nd\}$ $(d>0)$, $n=1, 2, \dots$, la $A_1(t)$ varia linearmente tra i valori $A(nd)$ e $A((n+1)d)$ per $nd \leq t \leq (n+1)d$; la $A(t)$ non è perciò unica. Dalla definizione di $A_1(t)$ segue che $A_2(t) \to 0$ per $t \to +\infty$.

([15]) Rimandiamo al lavoro «C». (lemma V) il precedente ragionamento cade in difetto. Esso infatti si fonda sulla circostanza che $T(t)$ (che si costruisce razionalmente con gli elementi di $A(t)$ e con le sue radici caratteristiche) è a variazione limitata (ciò che porta l'assoluta integrabilità di $T(t)$). Ora l'essere le radici caratteristiche di $A(t)$ a variazione limitata dipende essenzialmente dal fatto che sono tutte semplici le radici di L ([16]). Se questa condizione manca le radici caratteristiche di $A(t)$ possono non riuscire a variazione limitata. Valga a questo proposito l'esempio ([17])

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{(2+\operatorname{sen} t)^2}{t^2} \\ \dfrac{1}{\log^2 t} & 0 \end{bmatrix};$$

la $A(t)$ è a variazione limitata in $(t^0, +\infty)(t^0 > 1)$ e le sue radici caratteristiche (sempre semplici per ogni t):

$$l(t) = \pm i \frac{2 + \operatorname{sen} t}{t \log t}$$

non sono a variazione limitata in nessun intervallo $(t^0, +\infty)$.

4. – È ben noto che, ferma restando la ipotesi che $A(t) \to L$, per $t \to +\infty$, e che L abbia radici caratteristiche tutte semplici, $A(t)$ può non riuscire t_∞–simile alla sua forma canonica. In questi casi il carattere di stabilità (uniforme o ristretta) del sistema (2) non può più dedursi dall'omonimo carattere del suo sistema canonico attraverso la proposizione del n° 2. Queste circostanze si presentano, ad es., in certi casi che sono stati altrove chiamati «risonanze» ([18]), come nell'esempio ([19]) che segue:

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - \dfrac{\operatorname{sen} 2t}{t} & 0 \end{bmatrix} \qquad (t \geq t^0 > 1)$$

([16]) Cfr. L. CESARI in loc. cit.

([17]) Cfr. L. CESARI in loc. cit. a p. 186.

([18]) Si veda G. ASCOLI, *Osservazioni sopra alcune questioni di stabilità*, «Rend. Acc. Lincei», S. VIII, V. 9, (1950) Nota II, pp. 210-213. Si veda anche: U. BARBUTI, *Sopra un caso di «risonanza» per la equazione* $x'' + B(t)x = 0$, «Boll. Un. Mat. Italiana», S. III, (1952), n. 2 pp 154-159 e F. V. ATKINSON, *The asymptotic solution of second-order etc.* «Ann di Mat. pura e applicata», S. IV, T. XXXVII, (1954).

([19]) Cfr. G. ASCOLI in loco cit.

la cui forma canonica è:

$$C(t) = \begin{bmatrix} i\sqrt{1+\dfrac{\operatorname{sen} 2t}{t}} & 0 \\ 0 & -i\sqrt{1+\dfrac{\operatorname{sen} 2t}{t}} \end{bmatrix}$$

ed è evidente che gli integrali del sistema $\dot{y} = C(t)y$ sono stabili (in senso uniforme ed anche ristretto), ma non sono stabili, neppure in senso ordinario [19], quelli del sistema la cui matrice è la $A(t)$ sopra scritta.

5. Nella eventualità che $A(t)$ non sia t_∞–simile alla sua forma canonica, come nei casi accennati al n. 4, si presenta la opportunità di studiare le possibili correzioni della matrice canonica di $A(t)$ al fine di ottenere matrici diagonali ancora $t_{-\infty}$simili alla $A(t)$; questo studio può avere l'interesse di mettere in luce gli ulteriori elementi, estranei alla forma canonica di $A(t)$, dai quali dipende la stabilità del sistema (2). Qualche indicazione in questo ordine di idee si può desumere da alcuni risultati conseguiti nel lavoro «*C*». Allo scopo di enunciare una proposizione in proposito, premettiamo che in «*C*» abbiamo indicato con $\mathcal{A}_2$ la classe delle funzioni (reali o complesse) $f(t)$ della variabile reale t, per $t \geq 0$, ognuna delle quali soddisfa alle condizioni:

1°) è assolutamente continua ed esiste finito il lim $f(t)$, per $t \to +\infty$;

2°) la derivata $f'(t)$ (che esiste quasi ovunque) ammette la decomposizione: $f'(t) = \bar{f}(t) + f^*(t)$, ove $\bar{f}(t)$ è assolutamente continua e a variazione limitata, mentre $f^*(t)$ è assolutamente integrabile.

Appartengono alla classe $\mathcal{A}_2$ le funzioni che soddisfano la condizione 1°) ed hanno derivata assolutamente continua e a variazione limitata (potendosi fare $f^*(t) = 0$); più in generale sono della classe $\mathcal{A}_2$ quelle funzioni che soddisfano la condizione 1°) ed hanno derivata a variazione limitata, ma non di necessità assolutamente continua; ciò si desume facilmente dal lemma del n. 2. Appartengono pure alla classe $\mathcal{A}_2$ quelle funzioni che soddisfano la condizione 1°) e sono a variazione limitata (potendosi fare nella 2°) $\bar{f}(t) = 0$).

Si può ora enunciare la seguente proposizione:

TEOREMA 2. *Se* A(t) *è della classe* $\mathcal{A}_2$ *e la matrice* L(L = lim A(t), *per* t $\to$ + ∞) *ha radici caratteristiche tutte semplici allora* A(t) *è* t_∞*-simile alla matrice diagonale:*

$$C(t) - D(t) + M(t), \tag{5}$$

ove C(t) *è la forma canonica di* A(t), D(*t*) *è diagonale e gli elementi sulla diagonale principale sono eguali a quelli di egual posto della* $S^{-1}(t)\,S(t)$, *essendo* S(t) *è la matrice canonizzante la* A(t) (*supposta esistere in* (0, $+\infty$)) *e* M(t) *una matrice, ancora diagonale, per la quale esistono gli integrali:*

$$\int_0^{+\infty} m_{kk}(t)dt \qquad (k = 1,\ 2, \ldots,\ n).$$

Si ha in primo luogo che la matrice:

$$B(t) = S^{-1}(t)A(t)\,S(t) - S^{-1}(t)\,\dot{S}(t) = C(t) - S^{-1}(t)\,\dot{S}(t)$$

è t_∞-simile (anzi t-simile) ([20]) alla $A(t)$. Si ha poi che in « C » è sostanzialmente provato ([21]) che esiste una matrice $P(t)$ (potremo supporre in $(0, +\infty)$) che appartiene a τ, per la quale si ha;

$$B_1(t) = P^{-1}(t)B(t)P(t) - P^{-1}(t)\dot{P}(t) = (C(t) - D(t) + M(t)) + Z(t)$$

ove $Z(t)$ è assolutamente integrabile e $C(t)$, $D(t)$, $M(t)$ hanno le proprietà del testo. Da ciò segue che $B(t)$ riuscirà t_∞-simile (anzi t-simile) alla $B_1(t)$ e questa t_∞-simile alla $C(t) - D(t) + M(t)$, differendo da quest'ultima per il termine $Z(t)$ assolutamente integrabile. Da ciò segue la tesi.

Vale osservare che nel sistema che ha per matrice la (5) il carattere asintotico di stabilità (uniforme o ristretta) dipende unicamente dalle matrici $C(t)$ e $D(t)$ per la proprietà goduta da $M(t)$ ([22]); che la matrice $D(t)$ possa poi aver peso sul comportamento asintotico degli integrali del sistema di matrice (5) è provato in « C » con un esempio, il quale mostra, tra l'altro, la impossibilità di dedurre dal carattere di stabilità (uniforme o ristretta) del sistema canonico di $A(t)$ la omonima stabilità per esso, già nel caso che $A(t)$ appartenga alla classe $\mathfrak{A}_2$.

([20]) Cfr. la nota ([6]).

([21]) In « C » nella dimostrazione del teorema I.

([22]) La matrice $H(t) = C(t) - D(t)$ riesce t_∞-simile (anzi t-simile) alla $H(t) + M(t)$ per la proprietà goduta da $M(t)$. Si prenda infatti la matrice $T(t)$ diagonale, i cui elementi sulla diagonale principale sono dati da $\exp\int_0^t m_{kk}(a)da$; questa matrice appartiene alla classe τ, come subito si vede, ed inoltre si ha $\dot{T}(t) - M(t)\,T(t) = 0$. Da ciò segue che le matrici $H(t)$ e $H(t) + M(t)$ soddisfano la (1) con questa matrice $T(t)$; si ha infatti: $\dot{T}(t) + T(t)H(t) - (H(t) + M(t))\,T(t) = 0$ per la proprietà goduta da $T(t)$ e per essere il prodotto $T(t)H(t)$ permutabile, essendo $T(t)$ ed $H(t)$ diagonali.