Bollettino
Unione Matematica Italiana

Giovanni Liverani

Su un teorema di reciprocità per i sistemi a ritardo.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.4, p. 582–584.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_4_582_0>

Su un teorema di reciprocità per i sistemi a ritardo.

Nota di Giovanni Liverani (a Bologna)

Sunto. - *Cfr. il seguente paragrafo 1.*

1. Si consideri un sistema meccanico, a n gradi di libertà, definito delle coordinate lagrangiane $q_1, q_2, \ldots, q_n$, soggetto a forze conservative, che compia, attorno a una posizione di equilibrio stabile, piccoli movimenti forzati, prodotti da sollecitazioni addizionali di componenti lagrangiane $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, assegnate funzioni del tempo t [1]. Siano poi $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$, i valori dei parametri lagrangiani quando nello stesso sistema, soggetto alle stesse forze conservative, agiscano invece della Q_i le sollecitazioni addizionali di componenti $Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_n$.

Supposto che in ambedue i casi le condizioni iniziali siano nulle, vale la formula di reciprocità [2]:

$$\sum_1^n {}_n \int_t^0 Q_n(t-u)q'_n(u)du = \sum_1^n {}_n \int_t^0 Q'_n(t-u)q_n(u)du \tag{1}$$

da cui si possono dedurre relazioni semplici ed utili [3].

Recentemente sono stati però considerati i cosidetti sistemi meccanici a «ritardo», retti da equazioni miste differenziali e alle differenze. Tali equazioni si possono ottenere da quelle relative ai sistemi considerati in principio sostituendo, in alcuni termini, alla q_i calcolata nell'istante generico t, le stesse grandezze calcolate in un istante antecedente $t - \tau$ dove τ è, di solito, una costante che esprime appunto il ritardo con cui certe azioni si manifestano.

(1) Ovviamente la condizione di equilibrio si riferisce al caso in cui agiscono solo forze conservative, i movimenti sono prodotti da queste forze e da quelle addizionali.

(2) Confr.: M. Parodi, *Applications Physiques de la Transformation de Laplace*, C. N. R. S. Editeur, Paris, (1948) cap. II-3 pp. 52-54. D. Graffi, *Sul teorema di reciprocità per le correnti variabili*, «Annali di Matematica Pura ed Applicata», 4-XXV, pp. 267-276 (1946).

Questi teoremi sono stati dimostrati tutti per i circuiti elettrici; ma, tenendo presente l'identità fra le equazioni dei circuiti elettrici e dei sistemi meccanici in discorso, si ricava subito la relazione del testo.

(3) Vedi a questo proposito i lavori citati al numero precedente.

Scopo di questa nota sarà di mostrare che la relazione di reciprocità (1), e quindi le sue conseguenze, valgono, sotto opportune condizioni, anche per sistemi a «ritardo».

2. Consideriamo, per fissare le idee, un sistema a «ritardo» dissipativo a due gradi di libertà; l'estensione al caso ad n gradi non offre difficoltà,

Le equazioni che reggono il sistema sono:

$$\text{(2)} \qquad \left\{ \begin{aligned} & a_{11}\ddot{q}_1(t) + a_{12}\ddot{q}_2(t) + b_{11}\dot{q}_1(t) + b_{12}\dot{q}_2(t) + \\ & \qquad + c_{11}q_1(t-\tau_{11}) + c_{12}q_2(t-\tau_{12}) = Q_1(t) \\ & a_{21}\ddot{q}_1(t) + a_{22}\ddot{q}_2(t) + b_{21}\dot{q}_1(t) + b_{22}\dot{q}_2(t) + \\ & \qquad + c_{21}q_1(t-\tau_{21}) + c_{22}q_2(t-\tau_{22}) = Q_2(t) \end{aligned} \right.$$

dove le $a_{m,n}$, $b_{m,n}$, $c_{m,n}$, $\tau_{m,n}$ $(m,\ n=1,\ 2)$ indicano quantità costanti e indipendenti dall'ordine degli indici; per esempio si ha $\tau_{m,n}=\tau_{n,m}$. Le $\tau_{m,n}$ si suppongono positive e rappresentano, come si è detto, i «ritardi».

Supponiamo poi il sistema inizialmente in posizione di riposo o meglio le q_i e le $\dot{q}_i$ nulle nell'istante iniziale e in tutti gli istanti antecedenti.

Infine, ammettiamo trasformabili secondo LAPLACE, non solo le Q_i, ma anche le q_i, il che del resto appare intuitivo tenendo anche conto che il sistema è dissipativo.

Ciò posto, moltiplichiamo la (2) per e^{-pt} (dove p numero complesso con parte reale positiva) e integriamo da 0 a ∞.

Per le nostre ipotesi e tenendo presente il teorema di trasposizione e note proprietà delle trasformate di LAPLACE abbiamo:

$$\text{(3)} \qquad \left\{ \begin{aligned} & (a_{11}p^2 + b_{11}p + c_{11}e^{-p\tau_{11}})\mathfrak{L}[q_1] + \\ & \qquad + (a_{12}p^2 + b_{12}p + c_{12}e^{-p\tau_{12}})\mathfrak{L}[q_2] = \mathfrak{L}[Q_1(t)] \\ & (a_{21}p^2 + b_{21}p + c_{21}e^{-p\tau_{21}})\mathfrak{L}[q_1] + \\ & \qquad + (a_{22}p^2 + b_{22}p + c_{22}e^{-p\tau_{22}})\mathfrak{L}[q_2] = \mathfrak{L}[Q_2(t)] \end{aligned} \right.$$

dove $\mathfrak{L}[q_1]$, $\mathfrak{L}[q_2]$, $\mathfrak{L}[Q_1]$, $\mathfrak{L}[Q_2]$ indicano le trasformate rispettivamente di q_1, q_2, Q_1, Q_2 [4].

[4] Per esempio

$$\mathfrak{L}[q] = \int_0^\infty e^{-p\tau}\, q(t)dt$$

Nel caso in cui le Q_i si sostituiscono con le Q'_i, s'intende sotto le stesse ipotesi, valgono ancora le (3), salvo la sostituzione di q'_i e Q'_i rispettivamente a q_i e Q_i.

Moltiplichiamo rispettivamente per $\mathfrak{L}[q'_1]$ e $\mathfrak{L}[q'_2]$ le due equazioni (3) e sommando assieme si ha:

$$(4)\qquad \begin{cases} (a_{11}p^2 + b_{11}p + c_{11}e^{-p\tau_{11}})\mathfrak{L}[q_1]\mathfrak{L}[q'_1] + \\ + (a_{12}p^2 + b_{12}p + c_{12}e^{-p\tau_{12}})\mathfrak{L}[q_2]\mathfrak{L}[q'_1] \\ + (a_{21}p^2 + b_{21}p + c_{21}e^{-p\tau_{21}})\mathfrak{L}[q_1]\mathfrak{L}[q'_2] + \\ + (a_{22}p^2 + b_{22}p + c_{22}e^{-p\tau_{22}})\mathfrak{L}[q_2]\mathfrak{L}[q'_2] = \\ = \mathfrak{L}[Q_1(t)]\mathfrak{L}[q'_1(t)] + \mathfrak{L}[Q_2(t)]\mathfrak{L}[q'_2(t)]. \end{cases}$$

Ora scambiando le Q'_i e q'_i con le Q_i e q_i il primo membro della (4) resta invariato, così deve accadere del secondo e si ha:

$$(5)\qquad \mathfrak{L}[Q_1]\mathfrak{L}[q'_1] + \mathfrak{L}[Q_2]\mathfrak{L}[q'_2] = \mathfrak{L}[Q'_1]\mathfrak{L}[q_1] + \mathfrak{L}[Q'_2]\mathfrak{L}[q_2].$$

Da cui, applicando il teorema del Faltung ed il teorema di LERCH, si ricava subito la (1), che perciò risulta valida, come già affermato, anche per i sistemi a ritardo ([5]).