Bollettino Unione Matematica Italiana

Giuseppe Palamà

Su taluni problemi che si riducono a quello ideale di Escott-Tarry o di Prouhet-Tarry.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.4, p. 569–577.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_4_569_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1956.

Su taluni problemi che si riducono a quello ideale di Escott-Tarry o di Prouhet-Tarry.

Nota di GIUSEPPE PALAMÀ (a Lecce)

Sunto. - *Come nel titolo.*

1. Ricordiamo che si dice Problema ideale o normale di ESCOTT-TARRY e di PROUHET-TARRY il Problema che consiste nella ricerca di soluzioni intere del sistema

$$(1_1)\quad x_{1,1}^k + \ldots + x_{1,n+1}^k = x_{2,1}^k + \ldots + x_{2,n+1}^k = \ldots = x_{m,1}^k + \ldots + x_{m,n+1}^k,$$

$$(\text{per } k = 1,\ 2, \ldots, n)$$

rispettivamente nei casi $m = 2$, ed m qualsiasi.

Ora qui ci occupiamo di alcuni problemi che si riducono appunto a quello ideale di ESCOTT-TARRY o di PROUHET-TARRY.

Si sa che se

$$x_{i,j} = a_{i,j}, \quad (i = 1,\ 2, \ldots, m;\ j = 1,\ 2, \ldots, n+1),$$

è una soluzione di (1_1), si scrive

$$(2_1)\qquad a_{1,1}, \ldots, a_{1,n+1} \overset{n}{=} a_{2,1}, \ldots, a_{2,n+1} \overset{n}{=} \ldots \overset{n}{=} a_{m,1}, \ldots, a_{m,n+1},$$

che si dice *multigrada ideale* o *normale di ordine* n, se $m = 2$; e *multigrada ideale* o *normale a catena di ordine* n se m è qualsiasi [1]. Una scrittura analoga si adotta naturalmente anche per la (1_1).

Come è noto si conoscono multigrade ideali per $n \leq 9$ e multigrade ideali a catena per $n = 2,\ 3,\ 5$

Rammentiamo inoltre che una multigrada si dice *autocomplementare* o *simmetrica*, quando nella (2_1), per $m = 2$, si ha, se i

[1] Per notizie sulle multigrade cfr. per es. G. PALAMÀ, *Saggio di una nuova trattazione delle multigrade.* « Boll. Un. Mat. Ital. », **3**, 3, (1948), pp. 263-278. Un lavoro di estese informazioni è G. PALAMÀ, *I problemi di Escott-Tarry e di Prouhet-Tarry*, d'imminente pubblicazione, in due puntate, nel « Giorn. di Mat. » del BATTAGLINI.

termini dei due membri li indichiamo rispettivamente con a_i, b_i

$$a_1 + a_{n+1} = a_2 + a_n = \dots = b_1 + b_{n+1} = b_2 + b_n = \dots, \text{ se } n \text{ è disp.};$$

$$a_1 + b_{n+1} = a_2 + b_n = \dots = a_{n+1} + b_1, \quad \text{se } n \text{ è pari.}$$

Fra gli esempi noti di multigrade ideali, vi sono sempre multigrade autocomplementari.

Naturalmente anche le multigrade ideali, o no, a catena possono essere autocomplementari.

La (2_1) implica l'altra

$$(3_1) \quad Aa_{1,1} + B, \dots, Aa_{1,n+1} + B \overset{n}{=} Aa_{2,1} + B, \dots, Aa_{2,n+1} + B \overset{n}{=} \dots$$
$$\dots \overset{n}{=} Aa_{m,1} + B, \dots, Aa_{m,n+1} + B,$$

con A, B interi qualsiasi ma con $A \neq 0$.

Ad esempio, ad una multigrada ideale a catena di ordine dispari autocomplementare, può farsi assumere la forma, a mezzo della (3_1)

$$(4_1) \quad -c_{1,1}, \dots, -c_{1,n+1}, c_{1,n+1}, \dots, c_{1,1} \overset{2n+1}{=} \dots$$
$$\overset{2n+1}{=} -c_{m,1}, \dots, -c_{m,n+1}, c_{m,n+1}, \dots, c_{m,1}.$$

2. Ciò premesso ecco i problemi di cui qui ci occupiamo.

PROBLEMA 1° - *Trovare un polinomio intero in* x *di grado* 2n + 2 *che assuma per* $x = a_{i,j}$ *e per i valori opposti* $x = -a_{i,j}$ *uno stesso valore* $\pm N_i^2$, *quando per ogni* $i = 1, 2, \dots, m$, *si faccia* $j = 1, 2, \dots, n+1$, *essendo* $a_{i,j}$, N_i *interi opportuni ed* m *arbitrario.*

PROBLEMA 2° - *Trovare un polinomio intero in* x *di grado* 2n + 2 *che assuma per* $x = a_{i,j}$ *e per* $x = s - a_{i,j}$, $(j = 1, 2, \dots, n+1)$, *uno stesso valore* M_i, *per* $i = 1, 2, \dots, m$ *e per* $a_{i,j}$, M_i, s *interi opportuni ed* m *arbitrario.*

PROBLEMA 3° - *Ricavare da ogni soluzione dei precedenti problemi un'altra in modo che rispettivamente le* $\pm N_i^2$ *ed* M_i *siano minime o massime.*

PROBLEMA 4° - *Trovare più polinomi interi in* x *con gli zeri interi che abbiano i massimi, i minimi ed i flessi per gli stessi valori di* x *e determinare tali valori di* x.

Tali problemi si riducono tutti, come emergerà da quanto segue, a quello ideale di ESCOTT–TARRY o di PROUHET–TARRY.

3. SOLUZIONI DEL 1° PROBLEMA.

Poichè della (4_1) si conoscono esempi per m arbitrario in ciascuno dei casi $n=1$, $n=2$, dalle formule di GIRARD-NEWTON relative alle funzioni simmetriche elementari e dalla stessa (4_1) segue che

$$\begin{aligned} y &= (x-c_{1,1})\dots(x-c_{1,n+1})(x+c_{1,n+1})\dots(x+c_{1,1}) + \\ &\qquad + (-1)^n c_{1,1}^2 \dots c_{1,n+1}^2 = \\ &= (x-c_{2,1})\dots(x-c_{2,n+1})(x+c_{2,n+1})\dots(x+c_{2,1}) + \\ &\qquad + (-1)^n c_{2,1}^2 \dots c_{2,n+1}^2 = \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= (x-c_{m,1})\dots(x-c_{m,n+1})(x+c_{m,n+1})\dots(x+c_{m,1}) + \\ &\qquad + (-1)^n c_{m,1}^2 \dots c_{m,n+1}^2 , \end{aligned}$$

e si ha pertanto, se assumiamo

$$N_i = c_{i,1}c_{i,2}\dots c_{i,n+1}, \quad (i=1,\ 2, \dots, m),$$

che il precedente polinomio per

$$x = c_{i,j}, \qquad x = -c_{i,j}, \qquad (j=1,\ 2, \dots n+1),$$

prende il valore

$$(-1)^n N_i^2 ,$$

per ogni $i=1,\ 2, \dots, m$; e si hanno così soluzioni del 1° Problema.

4. Poichè si ha ad es.

$$(1_4) \qquad -63,\ -16,\ 16,\ 63 \overset{3}{=} -56,\ -33,\ 33,\ 56 \overset{3}{=}$$
$$\overset{3}{=} -52,\ -39,\ 39,\ 52 \overset{3}{=} -60,\ -25,\ 25,\ 60 \overset{3}{=} -65,\ 0,\ 0,\ 65,$$

si ottiene il polinomio

$$\begin{aligned} y &= (x^2-16^2)(x^2-63^2)-(16\cdot 63)^2 = (x^2-33^2)(x^2-56^2)-(33\cdot 56)^2 = \\ &= (x^2-39^2)(x^2-52^2)-(39\cdot 52)^2 = (x^2-25^2)(x^2-60^2)-(25\cdot 60)^2 = \\ &= x^2(x^2-65^2) \end{aligned}$$

che diventa uguale a

$$-1008^2, \quad -1848^2, \quad -2028^2, \quad -1500^2, \quad 0,$$

rispettivamente per

$$x = \pm 16, \pm 63\,; \quad x = \pm 33, \pm 56\,; \quad x = \pm 39, \pm 52\,;$$

$$x = \pm 25, \pm 60\,; \quad x = 0, \pm 65.$$

5. Soluzioni del 2° problema.

Soluzioni del 2° problema si hanno immediatamente da ogni esempio noto di (2_1) autocomplementare e di ordine dispari. Così, se nella (2_1) mutato n in $2n+1$, si ha

$$(1_5) \qquad a_{i,j} + a_{i,2n+3-j} = s, \quad (i = 1, \dots, m\,;\ j = 1, \dots, n+1),$$

la (2_1) può scriversi

$$(2_5) \qquad a_{1,1}, \dots, a_{1,n+1},\ s - a_{1,n+1}, \dots, s - a_{1,1} \overset{2n+1}{=} \dots$$
$$\overset{2n+1}{=} a_{m,1}, \dots, a_{m,n+1},\ s - a_{m,n+1}, \dots, s - a_{m,1},$$

e pertanto, se indichiamo i termini dell'elemento i^{mo} di quest'ultima con

$$a_{i,1}, \dots, a_{i,2n+2},$$

cioè se indichiamo

$$s - a_{i,n+1}, \dots, s - a_{i,1}$$

rispettivamente con

$$a_{i,n+2}, \dots, a_{i,2n+2},$$

e poniamo

$$M_i = -a_{i,1} a_{i,2} \cdot \ldots \cdot a_{i,2n+2}, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

si trae il polinomio

$$y = (x - a_{1,1}) \cdot \ldots \cdot (x - a_{1,n+1})(x - s + a_{1,n+1}) \cdot \ldots \cdot (x - s + a_{1,1}) + M_1 =$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= (x - a_{m,1}) \cdot \ldots \cdot (x - a_{m,n+1})(x - s + a_{m,n+1}) \cdot \ldots \cdot (x - s + a_{m,1}) + M_m$$

che dà soluzioni del 2° Problema.

6. Per es. essendo (²)

$$(1_6)\quad 1,50,57,212-1,212-50,212-57 \overset{5}{=} 2,41,67,212-2,212-41,212-67 \overset{5}{=}$$
$$\overset{5}{=} 7,26,87,212-7,212-26,212-87 \overset{5}{=} 15,15,106,212-15,212-15,212-106 \overset{5}{=}$$
$$\overset{5}{=} 10,21,95,212-10,212-21,212-95,$$

si ha il polinomio

$$y = (x-1)(x-50)(x-57)(x-212+1)(x-212+50)(x-212+57)-$$
$$-50.57.155.162.211 =$$
$$= (x-2)(x-41)(x-67)(x-212+2)(x-212+41)(x-212+67)-$$
$$-2.41.67.145.171.210 =$$
$$= (x-7)(x-26)(x-87)(x-212+7)(x-212+26)(x-212+87)-$$
$$-7.26.87.125.186.205 =$$
$$= (x-15)^2(x-106)(x-212+15)^2(x-212+106)-15^2.106^2.197^2 =$$
$$= (x-10)(x-21)(x-95)(x-212+10)(x-212+21)(x-212+95)-$$
$$-10.21.95.117.191.202,$$

che dà soluzione del 2° problema.

Si noti che da ogni esempio solamente numerico di multigrada ideale a catena, quale è per es. la (1_6), si hanno infinite soluzioni del 2° problema, perchè ad ogni termine della (1_6) si può aggiungere un intero h arbitrario.

Pertanto aggiungendo un tale intero h arbitrario ad ogni termine della (2_1), supposta autocomplementare, nell'enunciato del 2° Problema, si può ritenere s intero arbitrario, come emerge chiaramente da ciò che segue qui appresso.

7. Soluzioni del 3° problema.

Se si ha la seguente multigrada autocomplementare a catena

$$(1_7)\quad a_{1,1}+h, \ldots, a_{1,2n+2}+h \overset{2n+1}{=} \ldots \overset{2n+1}{=} a_{m,1}+h, \ldots, a_{m,2n+2}+h,$$

essa, se valgono le (1_5), ponendo

$$s+2h = s',$$

(²) Cfr. G. Palamà, *Quelques théorèmes sur les multigrades*, « Archives de l'Institut Grand-ducal de Luxembourg », Nouv. Série, Vol. XVI, (1938-1946), pp. 98-103.

può anche scriversi

$$a_{1,1}+h, \ldots, a_{1,n+1}+h, s'-a_{1,n+1}-h, \ldots, s'-a_{1,1}-h \overset{2n+1}{=} \ldots$$
$$\overset{2n+1}{=} a_{m,1}+h, \ldots, a_{m,n+1}+h, s'-a_{m,n+1}-h, \ldots, s'-a_{m,1}-h.$$

Ora da quest' ultima, e se poniamo

$$(2_7) \qquad M_i = -(a_{i,1}+h)(a_{i,2}+h) \ldots (a_{i,2n+2}+h), \qquad (i=1, 2, \ldots, m),$$

si ha un polinomio analogo ai precedenti nel quale M_i è dato dalle (2_7)

Pertanto si tratta di determinare h in modo che le M_i, $(i=1, \ldots, m)$ siano minime o massime. La questione è interessante anche perchè il valore di h che rende minimo o massimo uno dei polinomi M_i, rende anche minimo o massimo tutti gli altri. Difatti si riconosce facilmente che, i polinomi M_i nella variabile h, dati dalle (2_7), per la (1_7) e per le formule di GIRARD-NEWTON, differiscono da una costante ed hanno perciò rispetto ad h le stesse derivate di ordine qualsiasi.

Se per es. ai termini della (1_4) aggiungiamo $66+h$ essa diventa

$$3+h,\ 50+h,\ 82+h,\ 129+h \overset{3}{=} 10+h,\ 33+h,\ 99+h,\ 122+h \overset{3}{=}$$
$$\overset{3}{=} 14+h,\ 27+h,\ 105+h,\ 118+h \overset{3}{=} 6+h,\ 41+h,\ 91+h,\ 126+h \overset{3}{=}$$
$$\overset{3}{=} 1+h,\ 66+h,\ 66+h,\ 131+h,$$

che ci dà un polinomio che si può scrivere sotto cinque forme diverse essendo rispettivamente

$$M_i = -A(h) - B_i, \qquad (i=1, 2, 3, 4, 5),$$

con

$$A(h) = h^4 + 264h^3 + 21\ 911h^2 + 592\ 284h,$$

e

$$B_1 = 3.50.82.129, \quad B_2 = 10.53.99.122, \quad B_3 = 14.27.105.118,$$
$$B_4 = 6.41.91.126, \quad B_5 = 66^2.131.$$

Ma poichè ad $A(h)$ può anche darsi la forma

$$(3_7) \qquad A(h) = (66+h)^2(1+h)(131+h) - 66^2.131,$$

si ha che gli zeri di

$$M_1' = -A'(h) = -(66+h)(4h^2+528h+8974),$$

ove con l'apice si indicano derivate prime rispetto ad h, (analogamente con due apici si indicano derivate seconde), sono

$$(4_7) \qquad h = -66, \quad h = -20{,}04\ldots, \quad h = -111{,}96\ldots.$$

Ma è, a meno di un fattore costante positivo

$$M_1''(h) = -(h^2 + 132h + 2243.5) - 2(66 + h)(h + 132),$$

e si ha

$$M_1''(-66) > 0, \qquad M_1''(-20{,}04\ldots) < 0, \qquad M_1''(111{,}96\ldots) < 0,$$

quindi ai tre valori (4_7) di h corrispondono rispettivamente un minimo e due massimi di $M_1(h)$ che risultano tra loro uguali, perchè i due valori di h per cui si ha un massimo hanno una somma che è uguale a -132 e per tali valori di h i valori assunti da $A(h)$ sono identici. Inoltre, come anche la semplice ispezione della (3_7) fa subito vedere, per $h = -66$, si ha un minimo.

Per ragioni di continuità si trovano poi subito i valori interi di h per cui si hanno i detti minimi e massimi. Così nell'es. precedente i massimi di M si hanno per i seguenti valori interi di h:

$$h = -20, \; h = -112.$$

8. Svolgiamo alcuni altri esempi.

Dalla multigrada

$$(1_8) \qquad 1 + h,\; 6 + h,\; 7 + h,\; 17 + h,\; 18 + h,\; 23 + h \stackrel{5}{=}$$
$$\stackrel{5}{=} 2 + h,\; 3 + h,\; 11 + h.\; 13 + h,\; 21 + h,\; 22 + h$$

si ha il polinomio, se indichiamo con $a_1, \ldots, a_6$; $b_1, \ldots, b_6$ rispettivamente i termini del primo e del secondo membro della (1_8)

$$y = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_6) - a_1 a_2 \ldots a_6 =$$
$$= (x - b_1)x - b_2) \ldots (x - b_6) - b_1 b_2 \ldots b_6,$$

e quindi

$$M_1 = -(1 + h)(6 + h)(7 + h)(17 + h)(18 + h)(23 + h) =$$
$$-(z + 23)(z + 108)(z + 119),$$

$$M_2 = -(2 + h)(3 + h)(11 + h)(13 + h)(21 + h)(22 + h) =$$
$$-(z + 44)(z + 63)(z + 143),$$

se si pone

$$h^2 + 24h = z.$$

Ma M_1 ed M_2 differiscono per una costante, perciò

$$M_1' = M_2' = -2(h + 12)(3z^2 + 500z + 18\,073),$$

i cui zeri sono

$$h_1 = -21{,}53939\,..., \qquad h_2 = -17{,}50757\,..., \qquad h_3 = -12,$$
$$h_4 = -6{,}49243\,..., \qquad h_5 = -2{,}46061\,....$$

Ma nei successivi intervalli

$$(-\infty, -23), \ (-23, -18), \ (-18, -17), \ (-17, -7), \ (-7, -6),$$
$$(-6, -1), \ (-1, \infty),$$

M_1 è alternativamente negativa e positiva, quindi agli zeri h_1, h_3, h_5 di M_1' si hanno dei massimi e negli altri due zeri h_2 ed h_4 si hanno invece minimi di M_1. Per la ragione detta un po' più in alto i due massimi corrispondenti ad h_1 e h_5 sono fra loro uguali e così sono pure uguali i minimi che si hanno per $h = h_2$, $h = h_4$.

I valori interi di h, con i quali si hanno i minimi ed i massimi di M_1, seguono dai precedenti h_i, essi sono

$$-22, \ -18, \ -12, \ -6, \ -2$$

ove però -22, -18, -6, -2 possono essere sostituiti rispettivamente da

$$-21, \ -17, \ -7, \ -3.$$

Le ascisse dei flessi sono date invece dagli zeri di

$$27z^2 + 5\,956z + 306\,073 = 0.$$

9. Consideriamo ora un esempio di multigrada ideale di ordine pari. Si tratti per es. della

$$1 + h, \ 19 + h, \ 28 + h, \ 59 + h, \ 65 + h, \ 90 + h, \ 102 + h \overset{6}{=}$$
$$2 + h, \ 14 + h, \ 39 + h, \ 45 + h, \ 76 + h, \ 85 + h, \ 103 + h,$$

che, se indichiamo i suoi termini con c_i e $d_i = 104 + 2h - c_{7+1-i}$, ci dà

$$y = (x - c_1)(x - c_2)\,...\,(x - c_7) + c_1 c_2\,...\,c_7 =$$
$$= (x - d_1)(x - d_2)\,...\,(x - d_7) + d_1 d_2\,...\,d_7,$$

ed è perciò

$$M_1 = c_1 c_2 \dots c_7, \qquad M_2 = d_1 d_2 \dots d_7$$

che al solito differiscono per una costante. Pertanto si ha

$$(1_9) \qquad M_1' = M_2' = 7h^6 + 2\,184h^5 + 262\,850h^4 + 15\,302\,560h^3 +$$
$$+ 440\,029\,947h^2 + 5\,589\,721\,592h + 21\,381\,177\,180.$$

Poichè $M_1 - 1.19.28.59.65.90.102$ assume valori opposti per $h = a$ ed $h = -104 - a$, una simile relazione deve esistere fra le ascisse dei massimi e dei minimi, cioè se $h = a$ è una di tali ascisse una altra è $h = -104 - a$ e perciò (1_9) deve essere divisibile per un'espressione del tipo

$$h^2 + 104h + b$$

quando b sia determinato opportunamente. Difatti si ha

$$M_1' = M_2' = (h^2 + 104h + b)[7h^4 + 1456h^3 + (11\,426 - 7b)h^2 +$$
$$+ (3\,714\,256 - 728b)h + 7b^2 - 35\,714b + 53\,747\,323] +$$
$$+ 7b^3 - 35\,714b^2 + 53\,747\,323b - 21\,381\,177\,180.$$

Pertanto i valori di b che annullano il resto $R(b)$

$$R(b) \equiv 7b^3 - 35\,714b^2 + 53\,747\,323b - 21\,381\,177\,180,$$

sono quelli che a noi convengono. Poichè si ha $R(0) < 0$, $R(1700) > 0$, $R(2200) < 0$, $R(2700) > 0$, gli zeri b_1, b_2, b_3 di $R(b)$ sono reali ed avendosi $b_i < 2700$, gli zeri di

$$M_1' = M_2' = 7(h^2 + 104h + b_1)(h^2 + 104h + b_2)(h^2 + 104h + b_3)$$

sono anch'essi reali. Con tali zeri che si trovano subito, si determinano poi agevolmente i corrispondenti valori interi di h.

10. PROBLEMA 4°.

È facile trovare polinomi interi in x che abbiamo gli zeri interi ed i massimi, i minimi ed i flessi per gli stessi valori di x e, dopo quanto si è detto, è agevole, in taluni casi, determinare tali valori di x, o, comunque, semplificarne notevolmente la ricerca.