Bollettino Unione Matematica Italiana

Marialuisa De Socio

Sulla velocità dell'energia in una guida d'onda soggetta ad un campo magnetico.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.4, p. 566–568.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_4_566_0>

Sulla velocità dell'energia in una guida d'onda soggetta ad un campo magnetico.

Nota di Marialuisa De Socio (a Milano)

Sunto. - *Come il n. 1.*

1. In una nota precedente ([1]) ho dimostrato come la velocità di gruppo di un' onda elettromagnetica piana, che si propaga liberamente e senza perdite in un gas ionizzato soggetto a un campo magnetico uniforme, coincide con la componente, nella direzione di propagazione dell' onda, della velocità media dell' energia.

In questo lavoro estenderò il teorema ora citato al caso della propagazione in una guida limitata da pareti perfettamente conduttrici e riempita da un gas ionizzato soggetto a un campo magnetico uniforme $\boldsymbol{h}$ ([2]), cioè, generalizzando una proprietà delle guide ordinarie, dimostrerò come, anche nelle guide sopracitate, la velocità media dell' energia di un modo di propagazione coincide con la velocità di gruppo.

2. Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, con l' asse z coincidente con l' asse del tubo, supponiamo che nella guida si propaghi, secondo l'asse z, un modo di propagazione di pulsazione ω, velocità di propagazione di fase v, e che i vettori complessi $\boldsymbol{E}$ ed $\boldsymbol{H}$ del campo elettrico e magnetico dipendano da z secondo il fattore $e^{-j\omega\alpha z}$, con $\alpha = \frac{1}{v}$, j unità immaginaria, sì da essere:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{-j\omega\alpha z}, \qquad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{-j\omega\alpha z} \tag{1}$$

dove $\boldsymbol{E}_0$ ed $\boldsymbol{H}_0$ sono vettori indipendenti da z.

([1]) M. De Socio, *Sulla velocità dell'energia in un gas ionizzato soggetto ad un campo magnetico*, « Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino », XC (1955-56).

([2]) Guide d'onda di questo tipo sono già state realizzate per ricerche sperimentali, p. e. F. Diamand, A. Gozzini et Kahan, *Interaction des ondes centimétriques avec un plasma en présence d'un champ magnétique*, C. R. 242, (1956) pag. 90-92.

Nelle guide con gas ionizzato che supporremo senza perdite valgono l'equazioni di MAXWELL:

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = j\omega\chi \boldsymbol{E} \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\mu j\omega \boldsymbol{H} \end{cases}$$

dove μ è la permeabilità magnetica che supponiamo costante, χ un' omografia vettoriale definita da:

$$\chi = \varepsilon_0 - \frac{Ne^2}{m\omega}\left(\omega - j\frac{e}{m}\boldsymbol{h} \wedge\right)^{-1}$$

ε_0 costante dielettrica del gas non ionizzato, $\boldsymbol{h}$ campo magnetico influente, m ed e massa e carica degli elettroni, N numero degli elettroni per unità di volume; l'effetto degli altri corpuscoli elettrici si suppone, per semplicità, trascurabile. La velocità media degli elettroni $\boldsymbol{v}$ vale inoltre ([3])

$$\boldsymbol{v} = -j\frac{e}{m}\left(\omega - j\frac{e}{m}\boldsymbol{h} \wedge\right)^{-1}\boldsymbol{E}.$$

I vettori $\boldsymbol{E}$ ed $\boldsymbol{H}$ dipendono ovviamente da ω, allora, partendo dalle (2) e dalle equazioni che si ottengono derivando le (2) rispetto ad ω, si ha, con calcoli esposti nella nota citata in (1) la relazione:

$$\text{(3)} \qquad -j(\varepsilon_0 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E}^* + mN\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}^* + \mu \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}^*) = \\ = \operatorname{div}\left(\boldsymbol{E}^* \wedge \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial\omega} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial\omega} \wedge \boldsymbol{H}^*\right).$$

Ora, detto $\boldsymbol{u}$ il vettore di cui a secondo membro di questa equazione si è determinata la divergenza, poichè la guida si suppone limitata da conduttori perfetti e quindi $\boldsymbol{E}$ e $\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial\omega}$ sono, sulla superficie Σ che limita la guida, paralleli al versore $\boldsymbol{n}$ normale a Σ stessa, si ha, sempre su Σ, che $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n} = 0$. Pertanto, indicata

3) M. DE SOCIO, *Sulla propagazione delle onde elettromagnetiche in un gas ionizzato soggetto a un campo magnetico*, Seminario Matematico e Fisico dell'Università di Modena, VII, 1952-53.

con σ una sezione normale della guida, con s il suo contorno e con $\mathrm{div}_\sigma \boldsymbol{u}$ la divergenza superficiale di $\boldsymbol{u}$ su σ (cioè la divergenza calcolata tenendo conto solo delle componenti di $\boldsymbol{u}$ lungo gli assi x e y), si ha:

$$\int_\sigma \mathrm{div}\, \boldsymbol{u} d\sigma = \int_\sigma \mathrm{div}_\sigma \boldsymbol{u} d\sigma + \int_\sigma \frac{\partial(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{k})}{\partial z} d\sigma = \int_s \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n} ds + \int_\sigma \frac{\partial(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{k})}{\partial z} d\sigma .$$

Ma il primo integrale che figura nell'ultimo membro delle relazioni ora scritte è nullo mentre, ricordando le (1) si ha subito:

$$\frac{\partial(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{k})}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\boldsymbol{E}_0^* \wedge \frac{\partial \boldsymbol{H}_0}{\partial \omega} + \boldsymbol{E}_0 \wedge \frac{\partial \boldsymbol{H}_0^*}{\partial \omega}\right) \times \boldsymbol{k} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left[- jz \frac{\partial(\alpha\omega)}{\partial \omega} (\boldsymbol{E}_0^* \wedge \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{E}_0 \wedge \boldsymbol{H}_0^*)\right] \times \boldsymbol{k}.$$

Anche il primo termine a secondo membro di questa equazione è nullo, poichè $\boldsymbol{E}_0$ e $\boldsymbol{H}_0$ non dipendono da z; nel secondo termine compare poi il fattore $\frac{\partial(\alpha\omega)}{\partial \omega}$ che è l'inverso della velocità di gruppo v_g.

Sostituendo nella (3) e tenendo conto delle osservazioni fatte, si ha:

$$v_g = \frac{\frac{1}{4}\int_\sigma (\boldsymbol{E}^* \wedge \boldsymbol{H} + \boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{H}^*) \times \boldsymbol{k} d\sigma}{\frac{1}{4}\int_\sigma (\varepsilon_0 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E}^* + mN\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}^* + \mu \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}^*) d\sigma} .$$

Ora la frazione che compare a secondo membro di questa relazione esprime la velocità media dell'energia nella guida: essa è infatti il rapporto fra il flusso medio del vettore di POYNTING attraverso la superficie σ e l'integrale sulla σ stessa della densità dell'energia somma dell'energia elettrica, dell'energia cinetica degli elettroni e dell'energia magnetica.

Il teorema, enunciato in principio è dunque completamente provato.